



**HAL**  
open science

# Stabilité des systèmes incertains via une méthode MEgPC et développements - application à un modèle éléments finis de frein

Emmanuelle Sarrouy, Jean-Jacques Sinou

► **To cite this version:**

Emmanuelle Sarrouy, Jean-Jacques Sinou. Stabilité des systèmes incertains via une méthode MEgPC et développements - application à un modèle éléments finis de frein. 11e Colloque National en Calcul des Structures - CSMA 2013, May 2013, Giens, France. pp.1-7. hal-00877185

**HAL Id: hal-00877185**

**<https://hal.science/hal-00877185>**

Submitted on 27 Oct 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Stabilité des systèmes incertains via une méthode MEgPC et développements – Application à un modèle éléments finis de frein

Emmanuelle SARROUY<sup>1\*</sup>, Jean-Jacques SINOÛ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMA (UPR CNRS 7051), École Centrale Marseille, emmanuelle.sarrouy@ec-marseille.fr

<sup>2</sup> LTDS (UMR CNRS 5513), École Centrale de Lyon, jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr

\* Auteur correspondant

**Résumé** — La difficulté à caractériser finement certains organes pousse à introduire dans les modèles une forme de méconnaissance à leur sujet. Cette incertitude peut être introduite et traduite de différentes façons. Nous avons choisi ici une approche stochastique, reposant sur l'introduction de variables aléatoires pour représenter l'incertitude liée à des paramètres choisis du système. Le système cible est un couple disque-plaquette de frein dont on cherche à étudier le crissement pouvant apparaître lors du couplage de deux modes et une perte de stabilité. Pour repérer ces plages de fonctionnement instable pouvant donner lieu à des vibrations auto-entretenues (crissement), il faut étudier le système aux valeurs propres tangent à l'équilibre. C'est ainsi un problème aux valeurs propres stochastique que l'on se propose de résoudre ici.

La démarche s'appuie sur une décomposition sur le chaos polynomial pour traduire la dispersion des éléments propres ainsi qu'une partition de l'espace stochastique (famille des méthodes MEgPC). Trois développements sont proposés pour rendre plus efficace la méthode : une sélection des modes propres déterministes utilisés pour représenter les modes stochastiques, un critère de qualité de l'approximation polynomiale pour chaque élément de la partition basé sur le coefficient de Rayleigh et enfin, une construction dynamique de la partition empruntant des principes aux méthodes de continuation.

La propagation d'une incertitude relative au coefficient de frottement entre le disque et la plaquette sera présentée. Ce paramètre est en effet difficile à caractériser dans l'environnement de fonctionnement et au cours de la vie d'un frein alors qu'il est à l'origine même du phénomène engendrant les vibrations auto-entretenues.

**Mots clés** — Crissement de frein, Analyse de stabilité, Chaos polynomial

## 1 Introduction

Le crissement de frein est un problème pour les équipementiers automobile et ferroviaire qui peut trouver son origine par un couplage de modes ou une évolution du coefficient de frottement à l'interface [4]. L'absence de maîtrise de l'environnement d'utilisation pousse à l'introduction d'incertitudes. Parmi les différentes méthodes stochastiques [8], ce travail opte pour une approche stochastique – reposant sur l'introduction de variables aléatoires – paramétrique – ce sont des paramètres donnés du système qui seront affectés d'un certain aléa.

## 2 Partie théorique et points clés de la méthode

### 2.1 Stabilité d'un équilibre, paramètres incertains et problème aux valeurs propres

L'équation générale d'un système dynamique linéaire peut s'écrire

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}_e \quad (1)$$

où l'on trouve les matrices de masse, amortissement et raideur, le vecteur des coordonnées généralisées  $\mathbf{q}$  et ses dérivées par rapport au temps ainsi que le vecteur des efforts extérieurs  $\mathbf{f}_e$ .

Si l'on s'intéresse à la stabilité d'une position d'équilibre (statique)  $\mathbf{q}^*$  – satisfaisant donc  $\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{0}$  et

$\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{f}_e$  – il faut regarder l'évolution dans le temps d'une "petite" perturbation de l'équilibre, notée  $\mathbf{r}$ , à un instant quelconque que l'on prendra nul ici. L'état du système perturbé  $\mathbf{q}^* + \mathbf{r}$  satisfait à

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}^* + \ddot{\mathbf{r}}) + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}^* + \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{K}(\mathbf{q}^* + \mathbf{r}) = \mathbf{f}_e \quad (2)$$

et par suite, réinjectant que  $\mathbf{q}^*$  est solution (statique) de (1), la perturbation satisfait au cours du temps à

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (3)$$

c'est-à-dire un problème dont le second membre est nul. On peut le réécrire sous la forme d'un système du premier ordre :

$$-\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

dont les solutions sont combinaisons linéaires de fonctions  $\varphi_k e^{j\lambda_k t}$  obtenues par calcul des couples {valeur propre, vecteur propre}  $(\lambda_k, \varphi_k)$  que l'on nomme aussi modes propres.

L'étude de la stabilité d'un équilibre (statique) du problème dynamique linéaire (1) se fait donc via l'étude du problème au valeurs propres sous-jacent (5) (présentant une condition de normalisation pour l'unicité de la définition des vecteurs propres).

$$\mathbf{A}\varphi = \lambda\mathbf{B}\varphi, \quad \varphi^T \mathbf{B}\varphi = 1 \quad (5)$$

S'il existe une valeur propre  $\lambda_k$  de module supérieur strictement à 1, l'équilibre est dit instable car une perturbation de composante initiale non-nulle selon  $\varphi_k$  présentera une amplitude incessamment croissante au cours du temps, s'éloignant "infiniment" du point d'équilibre considéré.

Si l'on souhaite prendre en compte une certaine méconnaissance du système, il faut choisir une façon d'introduire cette lacune d'information [5, 6]. Nous utiliserons ici une approche probabiliste paramétrique, introduisant l'aléa par le biais de variables aléatoires  $\xi_i$  impactant des paramètres donnés du système (module d'Young, coefficient de frottement, etc.). Cette expression de certains paramètres dépendant de variables aléatoire se propage jusqu'aux matrices, donnant une formulation du système dynamique similaire à (1) :

$$(\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{M}})\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}})\mathbf{q} = \mathbf{f}_e \quad (6)$$

où le symbole tilda dénote la dépendance des matrices aux variables aléatoires. La stabilité d'un équilibre de (6) est alors étudiée au travers du problème au valeurs propres stochastiques analogue à (5) :

$$(\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}})\tilde{\varphi} = \tilde{\lambda}(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})\tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi}^T (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}})\tilde{\varphi} = 1 \quad (7)$$

L'enjeu est alors de trouver une expression des valeurs propres  $\tilde{\lambda}_k$  et vecteurs propres  $\tilde{\varphi}_k$  en fonction des variables aléatoires  $\xi_i$ .

## 2.2 Expansion sur le Chaos Polynomial et partitionnement de l'espace stochastique

Wiener a proposé en 1938 de décomposer certains processus stochastiques sur la base des polynômes d'Hermite [10], décomposition dont la convergence a été démontrée par Cameron et Martin en 1947 [1]. Plus récemment, ce principe a été étendu et travaillé pour aboutir aux méthodes Multi-Element generalized Polynomial Chaos (MEgPC) [9, 11]. Dans le domaine de la mécanique, un ouvrage majeur est l'application de l'expansion sur le Chaos Polynomial dans le cadre des éléments finis par Ghanem et Spanos [2]. Nous n'exposerons ici que les points clés utilisés pour résoudre le problème aux valeurs propres stochastique qui nous intéresse. De plus, pour simplifier les notations, une seule variable aléatoire  $\xi$  sera considérée.

Notons  $\psi_n$ ,  $1 \leq n \leq N$  une base de  $N$  polynômes orthogonaux et  $\langle \psi_i, \psi_j \rangle$  le produit scalaire associé. Par convention,  $\psi_1$  vaut 1. On utilise cette base pour décomposer les matrices  $\tilde{\mathbf{X}}$  avec les notations suivantes :

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{n=2}^N \mathbf{X}_n \psi_n(\xi) \quad (8)$$

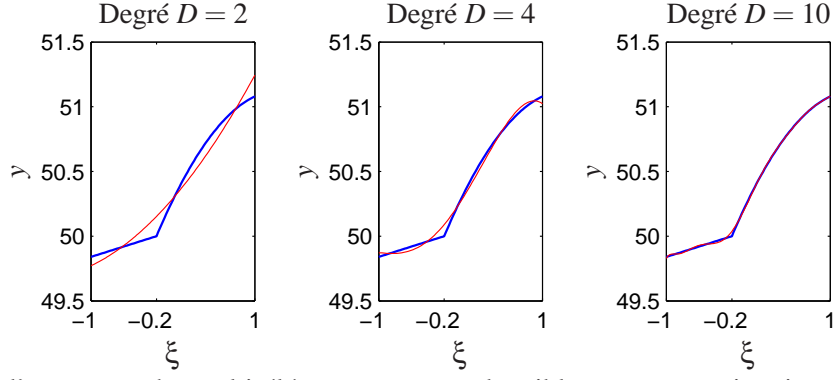


Fig. 1 – Intérêt d’une approche multi-éléments. — courbe cible ; — approximation polynomiale  $y = \psi(\xi)$  avec  $\psi$  de degré  $D$ .

La composante de moyenne non nulle ( $n = 1$ ) est supposée contenue dans  $\mathbf{X}$  décrivant le problème déterministe.  $\mathbf{X}$  peut prendre les valeurs  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{K}$ . L’idée est alors de décomposer les grandeurs d’intérêt – ici  $\tilde{\lambda}_k$  et  $\tilde{\varphi}_k$  – sur cette même base polynomiale :

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_k \sum_{s=1}^N \left( \binom{(k)}{a_s} + \mathbf{j} \binom{(k)}{b_s} \right) \psi_s(\xi) \text{ et } \tilde{\varphi}_k = \sum_{p \in \mathcal{P}_k} \left( \sum_{n=1}^N \left( \binom{(k)}{\gamma_p^n} + \mathbf{j} \binom{(k)}{\mu_p^n} \right) \psi_n(\xi) \right) \varphi_p \quad (9)$$

où les coefficients  $\binom{(k)}{\gamma_p^n}$ ,  $\binom{(k)}{\mu_p^n}$ ,  $\binom{(k)}{a_s}$  et  $\binom{(k)}{b_s}$  sont réels et  $\mathbf{j}$  est l’unité imaginaire ( $\mathbf{j}^2 = -1$ ).  $\mathcal{P}_k$  est l’ensemble des modes déterministes  $\varphi_p$  utilisés pour représenter le  $k$ -ème mode stochastique. Le système d’équations à résoudre pour déterminer ces coefficients s’obtient en injectant ces décompositions (8) et (9) dans le problème avec condition de normalisation (7) puis en projetant ce système d’équations sur la base polynomiale employée, en appliquant donc une méthode de Galerkin. On obtient alors  $2N(n+1)$  équations (quadratiques) pour  $2N(P_k+1)$  inconnues par mode traité où  $n$  désigne la taille du système d’ordre 1 et  $P_k$  correspond au nombre de modes déterministes dans l’ensemble  $\mathcal{P}_k$ . Pour passer d’un système surcontraint à un système carré, la dernière étape est de prémultiplier les  $2N$  systèmes (de taille  $n$ ) issus du problème aux valeur propre (et non de la condition de normalisation) par la transposée de la matrice dans laquelle les  $P_k$  modes  $\varphi_p$  sont rangés en colonne. Ceci revient à projeter l’équation définissant le problème au valeur propre de (7) sur la base des modes de  $\mathcal{P}_k$ .

Si la variable aléatoire suit une loi normale centrée, la famille optimale des polynômes  $\psi_n$  est celle des polynômes d’Hermite. Si l’on élargit la famille de lois de probabilité, on parle de Chaos Polynomial généralisé (gPC). On peut alors mentionner le couple loi uniforme, polynômes de Legendre qui sera utilisé par la suite.

Cette méthode permet d’approcher une quantité aléatoire selon une somme de polynômes. Si cette quantité a une dépendance peu régulière à la variable aléatoire  $\xi$ , il faudra de façon évidente augmenter le nombre de polynômes  $N$  de la base ce qui aura pour conséquence de faire croître la taille du système à résoudre sans pour autant apporter une approximation satisfaisante comme le montre la figure 1 qui présente l’approximation par des polynômes de degrés croissants d’une courbe cible présentant un point singulier. Au vu de cette illustration simple, il semble naturel de mettre en œuvre une approximation polynomiale par morceaux, basée sur une partition de l’espace stochastique. On parle alors de méthode MEgPC dont on trouvera une écriture formelle dans [7, 9]. On se contentera ici de rappeler les points suivants.

1. Le partitionnement impose de façon pratique d’utiliser une loi uniforme pour la variable aléatoire  $\xi$ . La loi (éventuellement non uniforme) que l’on souhaite étudier pour le paramètre rendu aléatoire se transmet via la génération de l’échantillon utilisé pour réaliser les simulations de Monte Carlo (utilisant non pas le calcul direct des grandeurs de sortie mais les expressions polynomiales du type (9) beaucoup plus rapides à évaluer).
2. Le choix de la partition peut être fait *a priori*, décidant de découper l’espace initial en  $N$  éléments distincts. Cependant, on cherche généralement plutôt à réaliser une partition adaptative : il faut alors établir un critère de raffinement permettant de décider si l’on raffine ou non la partition actuelle.

3. Enfin, se pose la question de la façon de générer itérativement les partitions successives dans le cas d'une partition adaptative.

## 2.3 Développements

Les développements proposés portent sur les deux derniers points de l'énumération précédente ainsi que sur la sélection des modes déterministes constituant  $\mathcal{P}_k$  et sont abordés dans ce même ordre.

**Critère de raffinement de la partition :** Ayant établi une extension sur le Chaos Polynomial généralisé (ou plus sobrement ayant déterminé les coefficients de la décomposition polynomiale) des grandeurs  $\tilde{\lambda}_k$  et  $\tilde{\varphi}_k$  pour un élément donné de la partition en cours, il est légitime de se demander si cette décomposition rend "correctement" compte de la grandeur visée. Si c'est le cas, on peut s'occuper d'un autre élément de la partition, si non, on souhaite subdiviser l'élément dans l'espoir d'obtenir une décomposition meilleure à degré polynomial constant sur chacun des sous-éléments. On trouvera dans [9] un critère assez général basé sur le taux de décroissance de l'erreur relative en variance lorsque l'on compare l'expansion sur le Chaos Polynomial de degré  $D$  calculée à l'expansion sur un Chaos Polynomial de degré  $D - 1$ . Nous proposons ici un critère adapté au problème aux valeurs propres basé sur le quotient de Rayleigh. En effet, quelle que soit la valeur prise par la variable aléatoire  $\xi$  sur l'élément considéré, on souhaite vérifier (7), ce qui nous permet de formuler l'indicateur d'erreur suivant :

$$\varepsilon(\xi) = \left| \left( \frac{(\tilde{\varphi}_k(\xi))^T (\mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}}(\xi)) \tilde{\varphi}_k(\xi)}{(\tilde{\varphi}_k(\xi))^T (\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}}(\xi)) \tilde{\varphi}_k(\xi)} \right) \frac{1}{\tilde{\lambda}_k(\xi)} - 1 \right| \quad (10)$$

L'évaluation de  $\varepsilon(\xi)$  est très peu coûteuse étant donné qu'elle ne requiert que l'évaluation de quantités polynomiales. On peut donc évaluer l'erreur commise en un grand nombre de points de l'élément.

**Construction de la partition :** Lorsque le critère de raffinement détermine que l'on doit subdiviser un élément, une approche usuelle est de générer deux sous-éléments après avoir déterminé la direction dans laquelle la division aura lieu [9]. Nous proposons ici une seconde approche empruntant certains principes aux méthodes de continuation. Choisissons une partition initiale de trois éléments et supposons que l'on possède une décomposition satisfaisante sur l'élément central. Le traitement usuel de l'élément à sa droite consiste en le calcul de la décomposition polynomiale partant d'une valeur initiale égale par exemple à la valeur prise à droite de l'élément central, et ce, partout sur l'élément de droite. Nous proposons ici de ne pas traiter tout l'élément à droite de l'élément central mais de calculer un élément de taille "optimale", basé par exemple sur le nombre d'itérations qu'il aura fallu à l'algorithme de résolution du système non linéaire pour aboutir à la solution sur l'élément central. Supposant de plus une certaine continuité de la décomposition, l'algorithme de résolution pour cet élément est initialisé par prolongement de la décomposition obtenue sur l'élément central. Une comparaison des performances des deux approches est proposée dans la dernière section.

**Choix de l'ensemble  $\mathcal{P}_k$  :** Il semble raisonnable de supposer que chaque coordonnée des vecteurs propres  $\tilde{\varphi}_k$  n'est pas impactée de façon indépendante par l'aléa introduit. Au lieu de laisser chaque coordonnée varier librement, on propose donc de permettre la variation selon certains mouvements seulement, choisis parmi les modes déterministes  $\varphi_p$ . Ceci permet une réduction de la taille du système (7) traité. Nous proposons dans l'exemple traité une façon de composer cet ensemble  $\mathcal{P}_k$ .

## 3 Application à l'étude du crissement de frein

Le système étudié est un modèle éléments finis d'un système de freinage automobile (système disque/plaquette) issu de [3] et présenté en figure 2. Le modèle initial est réduit par une méthode de Craig & Bampton gardant 4 nœuds de contact et 30 modes pour chaque pièce ainsi que 4 ddls au dos de la plaquette permettant d'appliquer la pression hydraulique. Le système initial comporte donc 88 ddls qui correspondent à 176 modes  $(\lambda_k, \varphi_k)$  en formulation augmentée. Le contact est supposé permanent entre le disque et la plaquette, donnant lieu à une équation de la forme (1). Ce contact se traduit par des termes

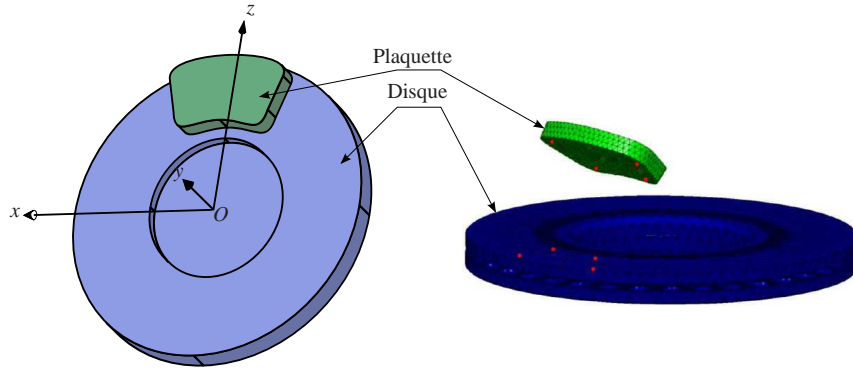


Fig. 2 – Schéma du modèle de frein étudié

couplant les deux sous-structures dans la matrice de raideur via des termes issus des efforts normaux et tangentiels :

$$F_{i,\text{normal}} = k_c(U_{i,\text{Plaquette}} - U_{i,\text{Disque}}) \quad (11)$$

$$F_{i,\text{tangent}} = \mu F_{i,\text{normal}} \text{Sign}(V_{i,\text{rel}}) \quad (12)$$

où  $i$  varie de 1 à 4 et sert à désigner les quatre couples de nœuds de contact,  $U_{i,\bullet}$  désigne le déplacement normal et  $V_{i,\text{rel}}$  la vitesse relative.  $k_c$  et  $\mu$  désignent respectivement la raideur de contact et le coefficient de frottement entre les deux éléments. C'est ce dernier paramètre qui est rendu aléatoire. Il est en effet très difficile d'en déterminer la valeur à chaque freinage, étant donné sa forte variabilité à l'usure des plaquettes et à l'environnement général (poussière, débris, humidité) [4]. Un tel système présente un équilibre statique dont on souhaite étudier la stabilité. En effet, c'est lors de la perte de stabilité que l'on peut voir apparaître le crissement qui est considéré comme nuisible.

La dispersion de plusieurs modes est étudiée en utilisant deux lois de probabilité pour décrire les variations du coefficient de frottement  $\mu$ , l'une normale et l'autre non classique, présentées en figure 3. Ceci permet par exemple d'établir la probabilité d'avoir  $n$  modes instables simultanément et ainsi que les plages fréquentielles de crissement.

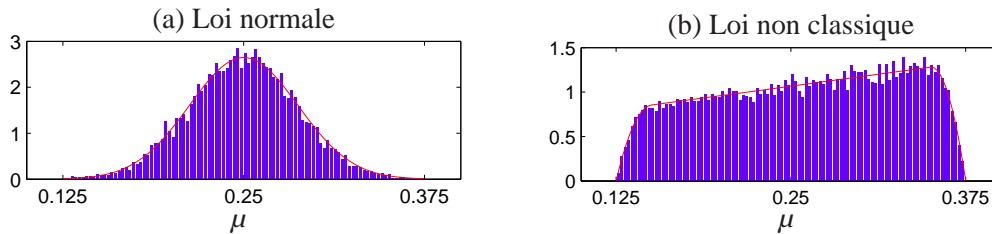


Fig. 3 – Densités de probabilité et histogrammes des échantillons testés

Au total, 7 modes ( $\tilde{\lambda}_k, \tilde{\varphi}_k$ ) sont retenus pour l'étude. L'ensemble  $\mathcal{P}_k$  est pris identique pour tous les modes et déterminé en retenant les vecteurs propres de la structure moyenne  $\varphi_p$  qui sont le plus impactés par le couplage des deux structures via le contact frottant. Pour ce faire, les MACs ont été calculés sans et avec couplage. Ont été gardés les 124 vecteurs propres sur 176 qui faisaient apparaître une différence supérieure à 0.5. La variabilité de la stabilité de l'équilibre statique étudié est alors calculée par la méthode développée précédemment et permet d'établir les résultats présentés en figure 4. On lit sur cette figure que les résultats sont significativement différents selon la loi de probabilité choisie ; ceci souligne l'intérêt de chercher à évaluer une telle loi sans systématiquement s'en remettre à une loi normale, faute d'information. Le nombre de modes simultanément instables peut être relié à la difficulté de concevoir un système ne crissant pas : stabiliser cinq modes est *a priori* plus difficile que d'en stabiliser un. Enfin, les histogrammes centraux donnent une idée du risque de crissement en présentant la fréquence avec laquelle l'instabilité démarre. Si le cycle limite n'aura pas pour fréquence exactement celle-ci, il fonctionnera généralement sur une fréquence proche. Ceci donne donc une idée quant à la plage de fréquences générées par les oscillations auto-entretenues, et de son recoupement avec la plage des fréquences audibles (schématiquement, 20 Hz-20kHz).

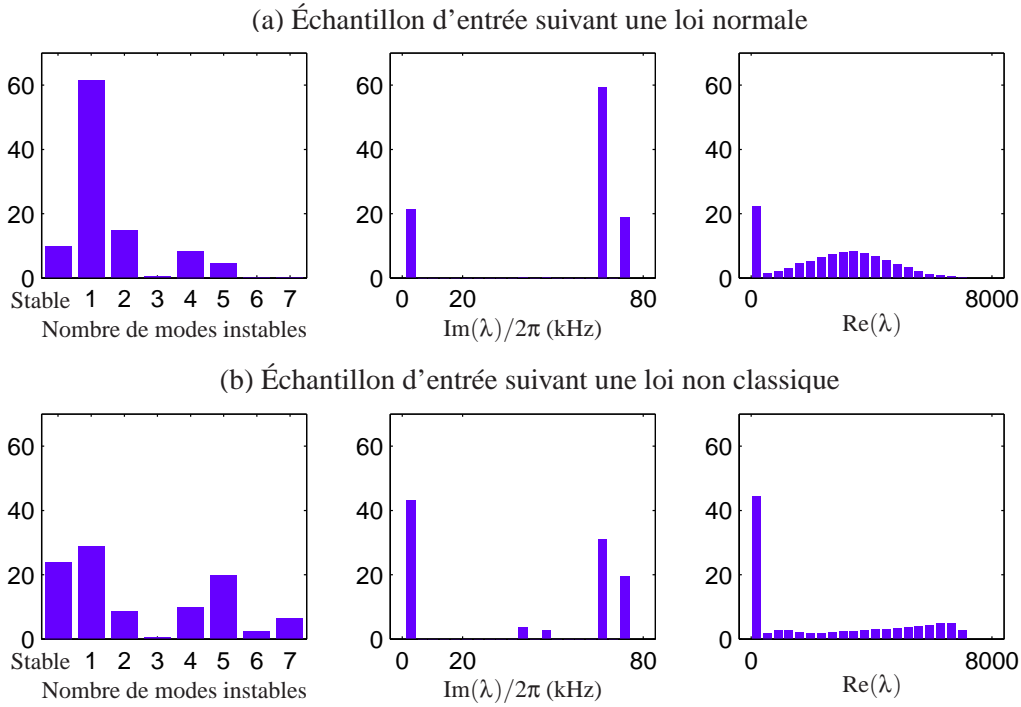


Fig. 4 – Résultats : histogrammes donnant en pour-cent (%) la distribution du nombre de modes instables et pour l'ensemble des occurrences instables, les distributions des fréquences possibles de crissement et de la partie réelle des valeurs propres étudiées

Nous proposons enfin une estimation de la qualité et de l'efficacité de la méthode proposée. Pour chaque échantillon, le calcul des mêmes modes propres a été effectué de façon directe en résolvant le système aux valeurs propres pour chaque élément de l'échantillon, réalisant donc de classiques simulations de Monte-Carlo.

Les coûts de calculs sont comparés dans le tableau 1. On voit donc que pour de larges échantillons, la

Taille échantillon	MC (s)	(a) Dichotomie (s) $t_{\text{fit}} + t_{\text{shoot}} = t_{\text{total}}$	(b) Continuation (s) $t_{\text{fit}} + t_{\text{shoot}} = t_{\text{total}}$
1000	345	$1455 + 4 = 1459$	$788 + 5 = 793$
10000	3451	$1455 + 44 = 1498$	$788 + 46 = 834$

Tableau 1 – Comparaison des temps CPU pour des simulations de Monte-Carlo (MC) et la méthode proposée avec création de la partition (a) par dichotomie et (b) selon des principes de continuation

méthode proposée est plus performante. De plus, une fois la décomposition établie, plusieurs échantillons différents suivant chacun une loi de probabilité différente peuvent être testés à un coût  $t_{\text{shoot}}$  dérisoire. C'est en effet le temps de calcul de la décomposition  $t_{\text{fit}}$  qui constitue la quasi-totalité du coût CPU. On constate aussi que la construction de la partition en utilisant des principes des méthodes de continuation est plus efficace.

Nous nous intéressons enfin à la précision des résultats obtenus par la méthode proposée comparés aux résultats obtenus par calcul direct pour 201 points régulièrement répartis sur la plage de valeurs de la variable aléatoire  $\xi$ ,  $[-1, +1]$ . On peut alors établir que pour 97% des points, la méthode proposée commet une erreur relative inférieure à 5% sur la partie réelle de la valeur propre. 91% des points présentent une erreur relative inférieure à 2%. 100% des points testés sont en dessous de 2% d'erreur relative pour la partie imaginaire. De même, tous les points présentent une erreur relative sur les vecteurs propres inférieure à 5%. Cette erreur relative sur les vecteurs propres est calculée comme suit :

$$e_{\phi} = \max \left| \frac{|\varphi^{\text{PC}}| - |\varphi^{\text{MC}}|}{\max |\varphi^{\text{MC}}|} \right| \times 100 \quad (13)$$

où MC correspond au calcul direct et PC à la valeur obtenue par l'expansion polynomiale. Enfin, mentionnons que seuls 0.5% des points testés présentent une erreur sur le signe de la partie réelle des valeurs

propres, commettant alors une erreur sur la stabilité du système. La méthode proposée présente donc une précision tout à fait satisfaisante, tant pour l'évaluation des valeurs propres que celle des vecteurs propres ainsi que la détermination de la stabilité de l'équilibre étudié.

## 4 Conclusion

Ce papier propose une étude de stabilité d'un système dynamique comportant une interface frottante avec un paramètre incertain (coefficient de frottement). La démarche se base sur la résolution d'un problème aux valeurs propres stochastique à un état d'équilibre donné avec une décomposition sur le chaos polynomial et une partition de l'espace stochastique. Afin de permettre une utilisation robuste de l'approche stochastique proposée, cette méthodologie inclut de plus une construction des modes stochastiques par sélection des modes propres déterministes, un critère de raffinement de la partition et une construction de cette dernière par des techniques empruntées aux méthodes de continuation.

L'efficacité de cette démarche est testée sur le problème de crissement de frein (modèle éléments finis disque-plaquette) à travers une comparaison avec des résultats (en termes de valeurs propres et vecteurs propres) obtenus par calcul direct de type Monte-Carlo. Cette étude permet alors d'illustrer la variabilité du nombre de modes instables ainsi que les plages de fréquences pour ces modes en fonction de l'aléa introduit. Il est aussi démontré que la loi de probabilité choisie a un impact non négligeable sur les résultats de stabilité d'un point d'équilibre donné.

## Remerciements

Ces travaux ont été réalisés grâce au soutien de l'Agence Nationale pour la Recherche, dans le cadre du programme Jeune Chercheur ANR-07-JCJC-0059-01-CSD2.

## Références

- [1] R. H. Cameron, W. T. Martin. *The Orthogonal Development of Non-Linear Functionals in Series of Fourier-Hermite Functionals*, The Annals of Mathematics, 48(2), 385–392, 1947.
- [2] R. G. Ghanem, Pol D. Spanos, *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, Springer-Verlag, 1991.
- [3] N. Coudeyras, S. Nacivet, J-J. Sinou. *Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal*, Journal of Sound and Vibration, 328(4-5), 520–540, 2009.
- [4] N.M. Kinkaid, O.M. O'Reilly, P. Papadopoulos. *Automotive disc brake squeal*, Journal of Sound and Vibration, 267, 105-166, 2003.
- [5] G. J. Klir. *Uncertainty and Information – Foundations Of Generalized Information Theory*, John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [6] G. Puel. *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*, École Normale Supérieure de Cachan, 2004.
- [7] E. Sarrouy, O. Dessombz, J-J. Sinou. *Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear brake system*, Journal of Sound and Vibration, 332, 577–594, 2013.
- [8] G. Schuëller, H. Pradlwarter. *Uncertain linear systems in dynamics : Retrospective and recent developments by stochastic approaches*, Engineering Structures, 31, 2507-2517, 2009.
- [9] X. Wan, G.E. Karniadakis. *An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations*, Journal of Computational Physics, 209, 617-642, 2005.
- [10] N. Wiener. *The Homogeneous Chaos*, American Journal of Mathematics, 60(4), 897–936, 1938.
- [11] D. Xiu, G. Em Karniadakis. *The Wiener-Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations*, SIAM Journal on Scientific Computing, 24(2), 619–644, 2002.