



HAL
open science

Dynamique atypique de structures réticulées

Céline Chesnais, Claude Boutin, Stéphane Hans

► **To cite this version:**

Céline Chesnais, Claude Boutin, Stéphane Hans. Dynamique atypique de structures réticulées. 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. 6p. hal-00876890

HAL Id: hal-00876890

<https://hal.science/hal-00876890>

Submitted on 25 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dynamique atypique de structures réticulées

Céline Chesnais ^a, Claude Boutin^b, Stéphane Hans^b

a. IFSTTAR, 58 Bd Lefebvre, 75732 PARIS Cedex 15

b. Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, Université de Lyon, DGCB/CNRS, 69120
Vaulx-en-Velin

Résumé :

La dynamique de poutres réticulées périodiques constituées de cellules non contreventées est étudiée avec la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets. Par rapport à des milieux massifs, ce type de microstructure peut présenter un fort contraste entre les déformabilités de compression et de cisaillement, ce qui génère une cinématique locale plus riche (rotation globale, déformation ou résonance interne) selon la structure et la gamme de fréquence étudiées. Ces fonctionnements atypiques sont décrits théoriquement et illustrés sur des exemples numériques et des structures réelles.

Abstract :

The dynamics of reticulated periodic beams made up of unbraced cells is studied through the homogenization method of periodic discrete media. Compared to massive media, this kind of microstructure may present a large contrast between shear and compression deformabilities. This induces a richest local kinematics (global rotation, inner deformation, inner resonance) according to the studied structure and frequency range. These atypical behaviors are described theoretically and illustrated numerically on real structures.

Mots clefs : dynamique ; homogénéisation ; milieux discrets

1 Introduction

Cet article traite du comportement dynamique de poutres réticulées périodiques. Supposant la taille de la cellule constitutive petite devant la longueur d'onde, le macro-comportement est déterminé à l'aide de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques discrets [3] qui permet une description plus poussée du fonctionnement physique de la cellule que l'homogénéisation des milieux périodiques continus [11], [6]. L'étude fait un usage systématique de l'analyse dimensionnelle [1], [8]. Elle est réalisée sur le cas archétypique de cellules portiques non contreventées qui peuvent présenter un fort contraste de déformabilité en cisaillement et en compression (contrairement aux milieux usuels « massifs »). Ceci ouvre la possibilité de cinématiques locales enrichies, introduisant des mécanismes de rotation globale, de déformation interne ou de résonance interne (coexistence de dynamiques globale et locale) selon la configuration étudiée et la gamme de fréquence, [5].

La partie 2 donne un aperçu de la méthode et des hypothèses. Les parties 3 et 4 détaillent les comportements vibratoires possibles en mode transversal et longitudinal. L'accent est mis sur les situations atypiques conduisant à des modes de giration et à des descriptions avec résonance interne. On soulignera en particulier l'émergence d'une dynamique macroscopique non-newtonienne où la masse effective, fonction de la fréquence, introduit des bandes de fréquences interdites, [4].

En dernière partie on expose une extension du modèle qui inclut le cisaillement des éléments de cellule traités comme des poutres de Timoshenko. Une illustration est donnée pour un bâtiment réel sur lequel des mesures accélérométriques ont permis d'identifier les caractéristiques modales.

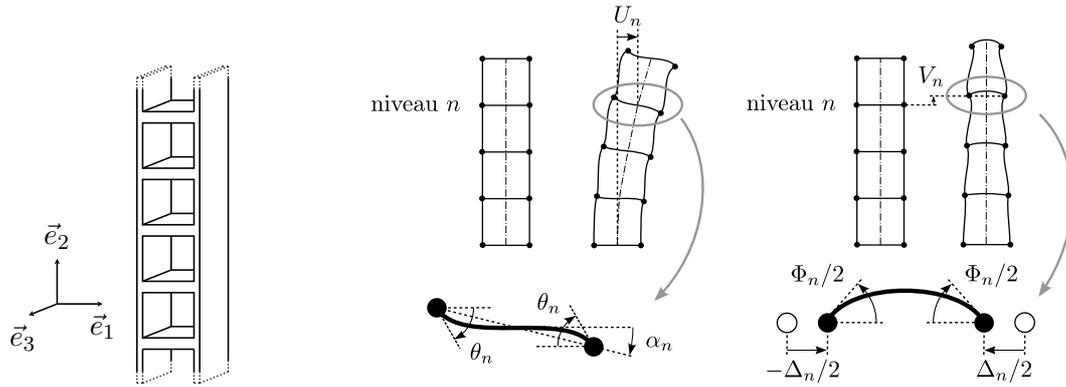


FIGURE 1 – Exemple de structure (gauche) et description des cinématiques transverse (milieu) et longitudinale (droite)

2 Structures étudiées et méthode d’homogénéisation

Les structures étudiées sont constituées par l’empilement d’un grand nombre de portiques identiques non contreventés (Fig 1). Ces derniers sont formés de plaques dont le comportement hors plan est décrit par le modèle de poutre d’Euler-Bernoulli. Les plaques horizontales et verticales peuvent avoir des propriétés mécaniques différentes. Comme les plaques sont encastées entre elles, les mouvements de toutes les extrémités connectées à un même nœud sont identiques et définissent les variables cinématiques discrètes du système. Le mouvement dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de chaque niveau n est donc décrit par six variables : les déplacements et rotations des deux nœuds. Ces variables peuvent être remplacées par (i) trois variables associées au mouvement de corps rigide du niveau n : la rotation $\alpha(n)$, les déplacements moyens, $U(n)$ selon \vec{e}_1 et $V(n)$ selon \vec{e}_2 , et (ii) trois variables décrivant la déformation du niveau n : la dilatation transverse $\Delta(n)$, les rotations moyennes et différentielles des nœuds, $\theta(n)$ et $\Phi(n)$ (Fig. 1). Du fait de la symétrie longitudinale, les cinématiques transversale et longitudinale gouvernées respectivement par (U, α, θ) et (V, Φ, Δ) sont découplées.

2.1 Homogénéisation

L’homogénéisation des systèmes réticulés périodiques procède en deux étapes [13]. Tout d’abord, l’équilibre harmonique de la poutre d’Euler-Bernoulli est intégré pour condenser rigoureusement au niveau des nœuds l’étude de l’équilibre dynamique de la structure. Ensuite, l’homogénéisation proprement dite conduit au modèle continu. L’hypothèse clef est que la taille de la cellule ℓ est petite devant la taille caractéristique L des vibrations de la structure, ainsi $\epsilon = \ell/L \ll 1$. L’existence d’une échelle macroscopique est traduite par la variable d’espace macroscopique x (selon la direction de périodicité \vec{e}_2). Les variables cinématiques discrètes sont alors considérées comme des valeurs particulières prises par des fonctions continues de x , soit $U_\epsilon(x_n) = U(\text{niveau } n)$. Ces fonctions, comme toutes les inconnues, sont supposées converger lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, et sont remplacées par des développements asymptotiques en fonction de ϵ . Le ratio d’échelles ϵ est également utilisé pour le développement en séries de Taylor des efforts et la normalisation. Cette dernière étape consiste à peser selon les puissances de ϵ les caractéristiques géométriques et mécaniques des éléments ainsi que la fréquence. De cette manière, chaque effet mécanique apparaît au même ordre indépendamment de la valeur de ϵ et la physique locale est conservée dans le modèle homogénéisé. Enfin, tous les développements sont introduits dans les équations d’équilibre des nœuds et l’ordre dominant fournit les équations d’équilibre du milieu macroscopique. Les différents comportements présentés par la suite sont obtenus en jouant sur les ordres de grandeurs des paramètres lors de la normalisation.

2.2 Quasi-statique ou dynamique locale

La séparation d’échelles requiert généralement un état local quasi-statique. Cela signifie que, lorsque le système global est en régime dynamique, les longueurs d’onde de flexion et de compression générées dans chaque élément sont beaucoup plus grandes que l’élément. Dans ce cas, les forces nodales peuvent

être développées en séries de Taylor selon ϵ . Toutefois, à plus hautes fréquences, il se peut que seules les longueurs d'onde de compression soient beaucoup plus grandes que l'élément et qu'apparaisse une résonance locale en flexion. Malgré tout, l'homogénéisation reste possible grâce au développement des forces de compression, mais conduit à des descriptions atypiques avec dynamique interne.

3 Vibrations transversales

Selon les propriétés de la cellule, la méthode peut mettre en évidence deux types de vibrations transverses associés à la nature de l'équilibre dynamique. Pour le premier type, qui correspond aux modes « naturels » de vibration, les forces élastiques horizontales équilibrent l'inertie de translation horizontale. Pour le second type, le moment élastique équilibre l'inertie de rotation, ce qui conduit à des modes de giration inhabituels.

3.1 Modes « naturels » - Poutre générique, [8]

La synthèse des différents comportements possibles montre que les modes « naturels » se développent dans un état local quasi-statique. Par ailleurs, seuls trois mécanismes - flexion globale, cisaillement, flexion interne - gouvernent la physique, chacun étant associé à une rigidité - EI_M , K , et EI_μ respectivement - qui se déduit des propriétés des éléments en statique. La méthode permet de construire un modèle de poutre générique qui inclut ces trois mécanismes et implique les variables décrivant le mouvement de corps rigide de la section U et α . Ce modèle est gouverné par une équation différentielle de degré six qui généralise la dynamique des poutres classiques et des poutres sandwichs [10], [12] :

$$\frac{EI_\mu EI_M}{K} U^{(6)}(x) - (EI_\mu + EI_M) U^{(4)}(x) - \frac{EI_M}{K} \Lambda \omega^2 U^{(2)}(x) + \Lambda \omega^2 U(x) = 0 \quad (1)$$

où Λ désigne la masse linéique macroscopique. Par dégénérescence, cette équation redonne les descriptions plus classiques (Timoshenko, Euler-Bernoulli, cisaillement). Notons que pour les modes « naturels », l'inertie de rotation de section n'apparaît pas et que le cisaillement peut gouverner le comportement de poutres réticulées élancées, contrairement aux poutres « massives ».

Les mécanismes pilotant le comportement réel d'une structure donnée peuvent être identifiés via une analyse dimensionnelle s'appuyant sur le modèle générique. En introduisant la taille caractéristique de vibration \tilde{L} (par exemple, pour le mode fondamental d'une poutre encastree-libre, $\tilde{L} = 2H/\pi$), le changement de variables $\mathbf{x} = x/\tilde{L}$ transforme (1) en :

$$C \gamma U^{*(6)} - (1 + \gamma) U^{*(4)} - \Omega^2 U^{*(2)} + \frac{\Omega^2}{C} U^* = 0 \quad (2)$$

où par construction, les termes sans dimension notés par * sont $O(1)$ et les paramètres sont :

$$C = \frac{EI_M}{K \tilde{L}^2}, \quad \gamma = \frac{EI_\mu}{EI_M}, \quad \Omega^2 = \frac{\Lambda \omega^2 \tilde{L}^2}{K} \quad (3)$$

C et γ pèsent respectivement les contrastes entre flexion globale et cisaillement, et entre flexions interne et globale. Selon leur ordre de grandeur en puissance de $\tilde{\epsilon} = \ell/\tilde{L} = \pi/(2N)$, l'équation (2) dégénère en des formes simplifiées. C et γ constituent donc des critères d'identification permettant de recenser sept comportements dont les domaines de validité (Fig. 2) sont caractérisés par les deux paramètres x et y définis par $C = \tilde{\epsilon}^x$ et $\gamma = \tilde{\epsilon}^y$.

3.2 Modes et poutre de giration

A plus hautes fréquences, les forces élastiques ne peuvent contrebalancer l'inertie de translation, de sorte que la translation doit s'annuler. Cependant un nouvel équilibre dynamique est possible entre le moment élastique et l'inertie de rotation. Le modèle atypique correspondant ne fait intervenir que la rotation de section pilotée par un mécanisme de traction-compression opposée dans les éléments verticaux. Les fréquences étant plus élevées, nous n'avons plus nécessairement un état quasi-statique local et deux cas sont possibles, [5].

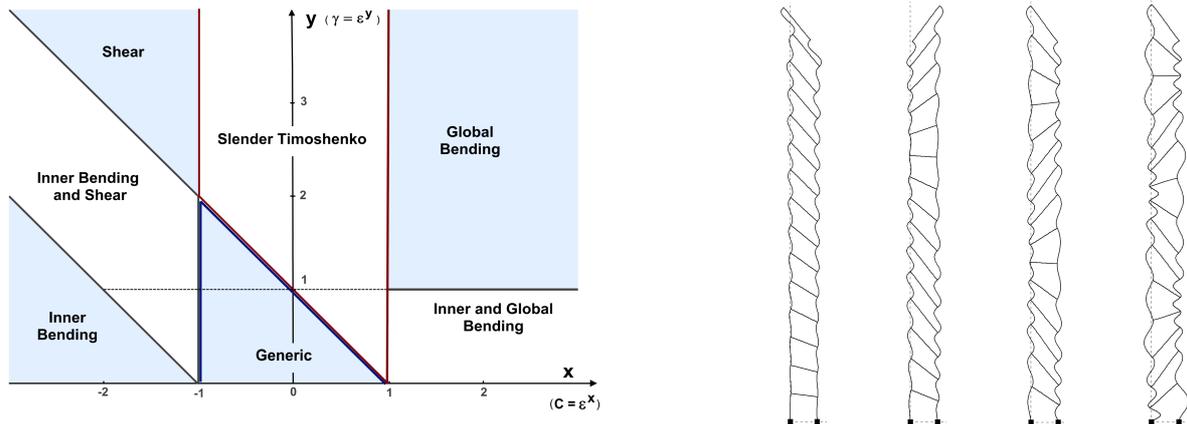


FIGURE 2 – Gauche : domaines de validité des différents comportements pour les modes « naturels » transverses. Droite : les 4 premiers modes de giration d’une poutre formée de 15 cellules

Etat quasi-statique local : L’équation d’équilibre (en moment) est du second degré. Les paramètres sont les rigidités de flexion globale et de cisaillement déjà déterminées ainsi que l’inertie de rotation de section usuelle J . Le modèle de poutre de giration s’écrit :

$$EI_M \alpha''(x) - K \alpha(x) + J \omega^2 \alpha(x) = 0 \quad (4)$$

On notera la présence du terme de source interne de moment lié au cisaillement de la cellule. Ce modèle est illustré et confirmé numériquement sur une structure de $N = 15$ niveaux en Fig .2.

Dynamique interne : Dans ce cas la longueur d’onde de flexion est de l’ordre de la longueur des éléments, mais la longueur d’onde de compression reste largement supérieure. Les efforts associés à la flexion ne sont plus développés, ce qui interdit tout découplage entre termes élastiques et inertiels. Le macro comportement reste gouverné par une équation différentielle du second degré de même allure formelle que (4) mais il faut remplacer la rigidité de cisaillement K et l’inertie de rotation J par une rigidité et une inertie effectives qui dépendent de la fréquence $K(\omega)$ et $J(\omega)$. De tels effets, qui correspondent à une dynamique non-Newtonienne, apparaissent également en vibration longitudinale et sont discutés dans le paragraphe suivant.

4 Vibrations longitudinales

Les vibrations longitudinales impliquent les variables (V, Φ, Δ) , cf. Fig. 1 et présentent un moindre degré de complexité car le principal mécanisme est la compression verticale de rigidité $2EA$. Les différences entre les modèles identifiés tiennent à la présence ou non d’une dynamique interne, [5]. Pour un état quasi-statique local, on obtient la description usuelle d’une poutre en compression :

$$2EAV''(x) + \Lambda \omega^2 V(x) = 0 \quad (5)$$

La présence d’une dynamique interne se traduit par une masse apparente fonction de la fréquence $\Lambda(\omega)$ qui remplace la masse réelle Λ pour les mêmes raisons que celles mentionnées plus haut. Soient Λ_w la masse linéique des éléments verticaux et Λ_f celle des éléments horizontaux, l’expression de la masse apparente est :

$$\Lambda(\omega) = \Lambda_w + \Lambda_f \psi \left(\frac{\omega}{\omega_{f1}} \right) \quad \text{avec} \quad \psi(\hat{\omega}) = \frac{8}{3\pi\sqrt{\hat{\omega}} \left[\coth\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\hat{\omega}}\right) \right]} \quad (6)$$

A nouveau, la présence conjointe des dynamiques locale et globale fait passer d’une description newtonienne à l’échelle microscopique à une description non-newtonienne à l’échelle globale. L’étude de

l'expression analytique de la masse apparente $\Lambda(\omega)$ montre que [4] (i) $\Lambda(\omega) \rightarrow \Lambda$ lorsque $\omega \rightarrow 0$, et (ii) $|\Lambda(\omega)| \rightarrow \infty$ lorsque $\omega \rightarrow \omega_{f_{2k+1}}$, où $\omega_{f_{2k+1}}$ sont les fréquences des modes impairs des éléments horizontaux en flexion (cf. Fig. 3 tracée pour $\Lambda_w = \Lambda_f$). Ceci induit une réponse anormale du système au voisinage de ces fréquences $\omega_{f_{2k+1}}$ qui se traduit par des bandes de fréquences interdites.

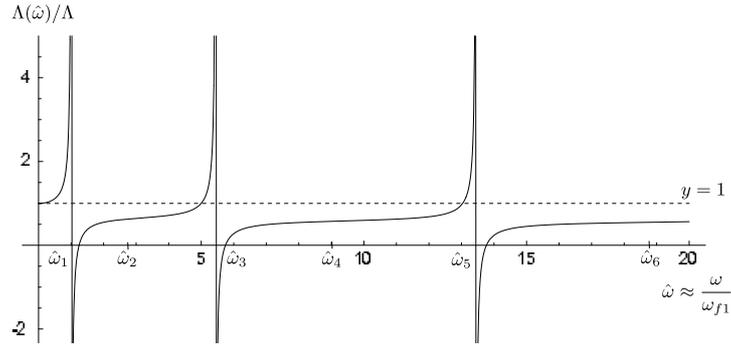


FIGURE 3 – Effet de la résonance interne sur la masse apparente adimensionnelle : $(1 + \psi(\frac{\omega}{\omega_{f1}}))/2$

5 Modélisation d'un bâtiment

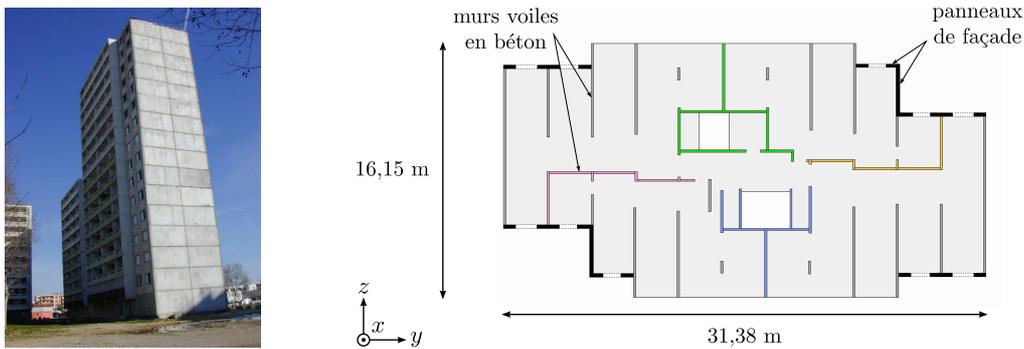


FIGURE 4 – Vue générale (gauche) et plan d'un étage courant (droite) du bâtiment étudié

Les bâtiments ordinaires en béton étant souvent constitués par l'empilement d'un même étage, nous proposons d'utiliser des modèles de poutre homogénéisés pour faciliter l'étude de leurs premiers modes transverses (qui sont les plus sollicités par les séismes). La principale différence avec les portiques considérés plus haut est la présence de murs voiles qui travaillent en flexion et en cisaillement dans leur plan. C'est pourquoi l'étude par homogénéisation a été reprise en utilisant la poutre de Timoshenko pour décrire le comportement des éléments. Cela a permis de construire un nouveau modèle générique qui prend en compte un quatrième mécanisme : le cisaillement dans les murs voiles de rigidité K_m . Ce modèle est encore décrit par une équation différentielle de degré six :

$$\frac{EI_\mu EI_M}{K} U^{(6)} - \left(EI_\mu + EI_M - \Lambda \omega^2 \frac{EI_\mu EI_M}{K_m K} \right) U^{(4)} - \left(\frac{EI_\mu}{K_m} + EI_M \left(\frac{1}{K_m} + \frac{1}{K} \right) \right) \Lambda \omega^2 U'' + \Lambda \omega^2 U = 0 \quad (7)$$

Il a été appliqué sur le bâtiment présenté sur la figure 4 qui a fait l'objet d'une campagne expérimentale [9]. Le tableau 1 compare les fréquences propres des modes transverses selon y obtenues avec ce nouveau modèle avec celles calculées à l'aide d'un modèle éléments finis complet de la structure ainsi qu'avec les fréquences expérimentales [5]. Le modèle (7) fournit de très bonnes estimations des fréquences.

| Mode | Mesures | | Éléments finis | | Poutre homogénéisée | | |
|------|---------------|--------------------|----------------|--------------------|---------------------|---------------|--------------------|
| | f_i (Hz) | ratio f_i/f_1 | f_i (Hz) | ratio f_i/f_1 | f_i (Hz) | erreur (%) | ratio f_i/f_1 |
| 1 | 2,15 | 1 | 2,08 | 1 | 2,13 | + 2,2 | 1 |
| 2 | 7,25 | 3,37 | 7,26 | 3,49 | 7,63 | + 5,1 | 3,59 |
| 3 | 14 | 6,51 | 14,30 | 6,88 | 15,61 | + 9,2 | 7,34 |

TABLE 1 – Fréquences propres dans la direction y

6 Conclusion

Les milieux réticulés possèdent une diversité de comportement beaucoup plus grande que les milieux massifs. En particulier, les modes de giration ou l'apparition d'effet de dynamique interne sont impossibles dans les poutres et matériaux usuels.

Ces résultats présentent de fortes analogies avec les théories des milieux continus généralisés [7] et apportent des éléments nouveaux en dynamique des structures. Des comparaisons avec des calculs numériques confirment la validité de ces développements [8]. Ces descriptions, formulées de manière adimensionnelle, offrent un cadre d'analyse pour explorer la dynamique de milieux réticulés à morphologie plus complexe tels que les mousses, matières végétales, os, . . . , mais aussi la dynamique de structures de grandes tailles telles que les bâtiments, [2]. Enfin, l'exploitation des propriétés atypiques pourrait conduire à la réalisation de milieux à propriétés inhabituelles pour l'acoustique.

Références

- [1] Boutin, C., Hans, S. 2003 Homogenisation of periodic discrete medium : Application to dynamics of framed structures *Computers and Geotechnics* **30(4)** pp. 303-320
- [2] Boutin, C., Hans, S., Ibraim, E., Roussillon, P. 2005 In situ experiments and seismic analysis of existing buildings - Part II *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **34(12)** pp. 1531-1546
- [3] Caillerie, D., Trompette, P., Verna, P. 1989 Homogenisation of periodic trusses *Congrès IASS - Madrid* pp. 7139-7180
- [4] Chesnais, C., Hans, S., Boutin, C. 2007 Wave propagation and diffraction in discrete structures - Effect of anisotropy and internal resonance *ICIAM, Zürich - PAMM* **7(1)** pp. 1090401-1090402
- [5] Chesnais, C. 2010 Dynamique de milieux réticulés non contreventés. Applications aux bâtiments *thèse de doctorat, ENTPE, Lyon*
- [6] Cioranescu, D., Saint Jean Paulin, J. 1999 Homogenization of reticulated structures *Applied Mathematical Sciences 136* Springer.
- [7] Eringen, A.C. 1968 Mechanics of micromorphic continua *IUTAM Symposium on the Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations with Applications* pp.18-35, Springer-Verlag (Berlin).
- [8] Hans, S., Boutin, C. 2008, Dynamics of discrete framed structures : A unified homogenized description *Journal of Mechanics of Materials and Structures* **3(9)** pp.1709-1739.
- [9] Hans, S., Boutin, C., Ibraim, E., Roussillon, P. 2005 In situ experiments and seismic analysis of existing buildings - Part I *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **34(12)** pp. 1513-1529
- [10] Kerr, A.D., Accorsi, M.L. 1985 Generalization of the equations for frame-type structures - a variational approach *Acta Mechanica* **56(1-2)** pp. 55-73.
- [11] Sanchez-Palencia, E. 1980 Non-homogeneous media and vibration theory *Lecture notes in physics - Springer-Verlag (Berlin), 127*
- [12] Skattum, K.S. 1971 Dynamic analysis of coupled shear walls and sandwich beams *Rep. N° EERL71-06. PhD. California Institute of Technology. Pasadena. California*
- [13] Tollenaere, H., Caillerie, D. 1998, Continuous modeling of lattice structures by homogenization *Advances in Engineering Software* **29(7-9)** pp. 699-705.