

Trois points sur la quantification binaire pour l'estimation

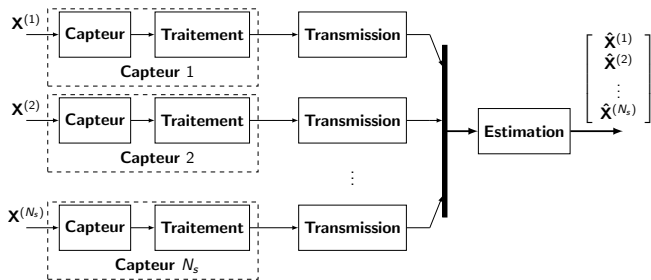
Rodrigo Cabral Farias

Jean-Marc Brossier

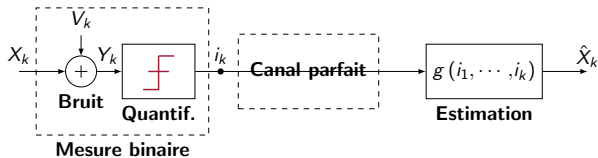
gipsa-lab
Université de Grenoble

GRETSI, Brest
3 septembre 2013

Un réseau de capteurs simple



Problème simplifié – 1 X constant, 1 capteur et 1 bit



Les trois points

- 1 Comment estimer un paramètre de centrage et quelle performance on peut atteindre ?
- 2 Est-ce que la symétrie joue un rôle dans le choix du seuil de quantification ?
- 3 Est-ce que l'asymétrie peut être optimal ?

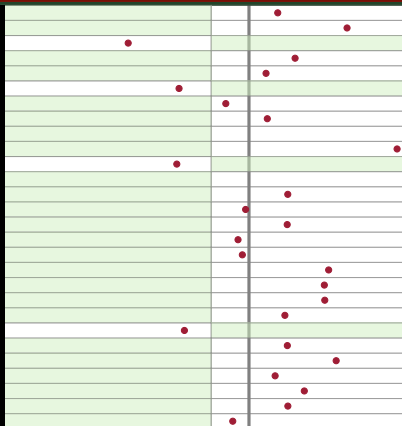
Estimateur

- Problème étudié par Ribeiro 2006 et Papadopoulos 2001
- Soit $F(y)$ la fonction de répartition du bruit :

$$p = \mathbb{P}(i_k = -1) = F(\tau_0 - x)$$

- Si k est grand $\mathbb{P}(i_k = -1) \approx \hat{p}$

$$\hat{X}_k = \tau_0 - F^{-1}(\hat{p})$$



$i_k = -1$ $\tau_0 = 0$ $x = 1$ $i_k = 1$
 $k = 28$



$$\hat{X}_k = \tau_0 - F^{-1}(\hat{p}) = 0,7549$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-y^2]$$

Performance

De façon non rigoureuse (rigoureuse=méthode delta) :

- Distribution de l'histogramme $\sqrt{k}(\hat{p} - p) \underset{k \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, p(1-p))$

- Série de Taylor

$$\hat{X}(\hat{p}) = \hat{X}(p + \xi) = x - \xi \frac{dF^{-1}(p)}{dp} + \dots = x - \xi \frac{1}{f(\tau_0 - x)} + \dots$$

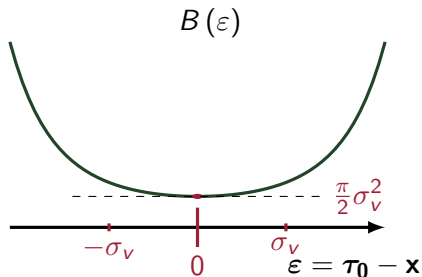
Pour k suffisamment grand :

- Variance $\text{Var}(\hat{X}_k - x) \approx \frac{1}{k} \frac{p(1-p)}{f^2(\tau_0 - x)} = \frac{1}{k} \frac{F(\tau_0 - x)[1 - F(\tau_0 - x)]}{f^2(\tau_0 - x)} = \frac{1}{k} B(\varepsilon)$,
où $\varepsilon = \tau_0 - x$

On peut montrer que :

- \hat{X}_k – maximum de vraisemblance (MV)
- $\frac{1}{k} B(\varepsilon)$ – borne de Cramér–Rao (BCR)

Symétrie – Bruit Gaussien

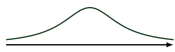


- Seuil optimal $\tau_0 = x$
Quantification optimale symétrique
- Perte relative au cas continu $\frac{\pi}{2}$
(1.96dB)

Symétrie – Bruits de Cauchy et Laplace

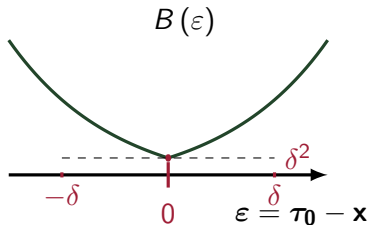
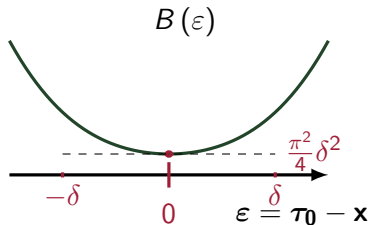
Cauchy

$$f(v) = \frac{1}{\pi\delta} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{v}{\delta}\right)^2\right]}$$



Laplace

$$f(v) = \frac{1}{2\delta} \exp\left(-\left|\frac{v}{\delta}\right|\right)$$



- Seuil optimal $\tau_0 = x$ – Quantification optimale symétrique
- Perte relative d'environ 0.9 dB avec Cauchy et 0 dB avec Laplace

Symétrie – Lois symétriques unimodales

$\tau_0 = x$ optimal pour lois symétriques unimodales ?

- Réponse de la littérature : **oui**

« System Identification with Quantized Observations »

Condition pour l'optimalité locale

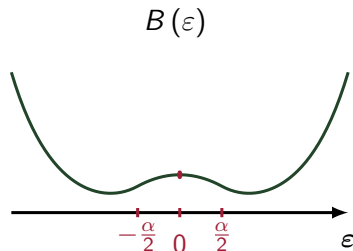
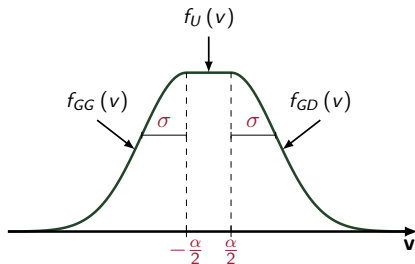
Condition pour que la borne ait un minimum local à $\varepsilon = 0$:

$$-f^{(2)}(0) > 4f^3(0)$$

- Maximum local pour les lois plates à zéro !

Asymétrie – la loi ad hoc

d.d.p. *ad hoc*

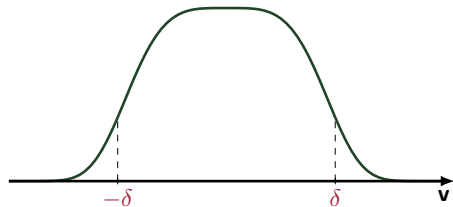


Asymétrie – la loi de Gauss généralisée

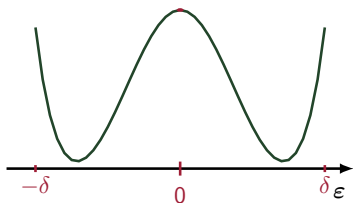
$$f(v) = \frac{\beta}{2\delta\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} \exp\left(-\left|\frac{v}{\delta}\right|^\beta\right)$$

pour $\beta > 2$

$f(v)$ pour $\beta = 4$



$B(\varepsilon)$ pour $\beta = 4$

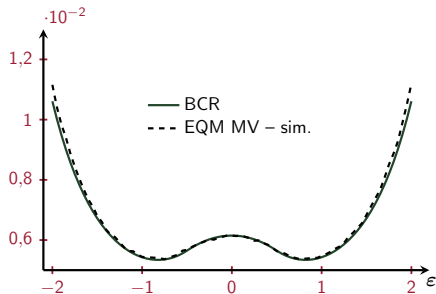


Vérification pratique I

500 mesures

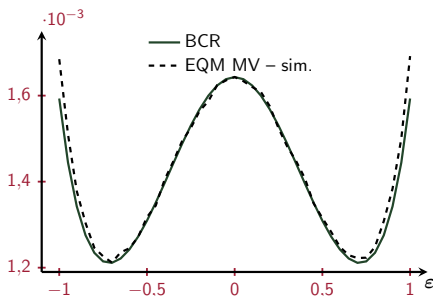
Loi *ad hoc*

$\sigma = 1$ et $\alpha = 1$



Gaussienne généralisée

$\beta = 4$ et $\delta = 1$

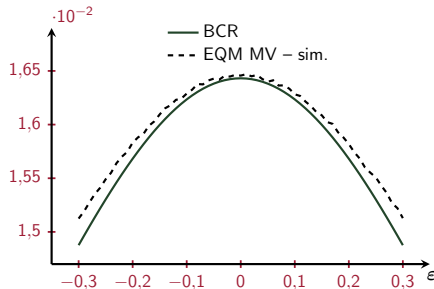


Vérification pratique II

50 mesures

Gaussienne généralisée

$$\beta = 4 \text{ et } \delta = 1$$



Conclusions

- Quantification symétrique optimale pour Gauss, Cauchy et Laplace avec petite perte
- Mais pas optimale pour toute loi symétrique unimodale (lois plates)

Nos questions :

- pourquoi l'asymétrie est optimal ?
- Qu'est-ce qu'on perd avec $\tau_0 = x$?
- Et la robustesse ?

Décalage optimal

Gaussienne généralisée

Ecart type σ fixé

