



**HAL**  
open science

# Comportement asymptotique des solutions d'une équation quasilinear avec une condition de Robin sur le bord.

Michèle Grillot, Philippe Grillot

► **To cite this version:**

Michèle Grillot, Philippe Grillot. Comportement asymptotique des solutions d'une équation quasilinear avec une condition de Robin sur le bord.. Modélisation : Atomes, Molécules, Plasmas et Systèmes dynamiques, May 2013, Bourges, France. hal-00875158

**HAL Id: hal-00875158**

**<https://hal.science/hal-00875158>**

Submitted on 21 Oct 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comportement asymptotique des solutions d'une équation quasilinéaire avec une condition de Robin sur le bord.

Michèle GRILLOT<sup>1</sup>

Philippe GRILLOT<sup>1</sup>

**Résumé :** Dans ce travail nous étudions le comportement asymptotique des solutions d'une équation parabolique quasilinéaire  $\partial u/\partial t - \Delta_p u = a(x)|u|^{q-1}u$  dans  $(0, T) \times \Omega$  avec une condition dite de Robin sur le bord  $\partial u/\partial \nu |\nabla u|^{p-2} = b(x)|u|^{r-1}u$  dans  $(0, T) \times \partial\Omega$  où  $\Omega$  est un ouvert régulier et borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ ,  $q > 1$ ,  $r > 1$  et  $p \geq 2$ . Des conditions suffisantes sur  $a$  et  $b$  nous permettent d'assurer le caractère borné ou bien l'explosion en temps fini des solutions.

**Mots clés :** équations aux dérivées partielles, équations paraboliques quasiliéaires, explosion, comportement asymptotique, condition de Robin au bord.

## 1 Introduction

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ ,  $q > 1$ ,  $r > 1$  et  $p \geq 2$ . Nous considérons une fonction continue  $a$  sur  $\bar{\Omega}$  et une fonction continue  $b$  sur  $\partial\Omega$ , la frontière de  $\Omega$ . Nous étudions les solutions de l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u = a(x)|u|^{q-1}u \quad (1)$$

dans  $(0, T) \times \Omega$  où  $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$  désigne le p-laplacien de  $u$ , avec la contrainte sur le bord dite condition de Robin :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} |\nabla u|^{p-2} = b(x)|u|^{r-1}u \quad (2)$$

in  $(0, T) \times \partial\Omega$  where  $\partial u/\partial \nu$  désigne la dérivée normale de  $u$  sur  $\partial\Omega$ ,  $\nu$  est la normale extérieure de  $\partial\Omega$ .

Nous donnons des conditions suffisantes qui distingueront les solutions de (1)-(2) entre celles qui restent bornées et celles qui exploseront . Ces conditions dépendent de  $a$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $q$  et  $r$ . Enfin dans des cas bien précis nous donnerons le comportement asymptotique des solutions. Une fonction  $u$  de  $(t, x)$  est dite fonction classique dans  $(0, T) \times \Omega$  si  $u$  est uniformément continue sur l'adhérence de l'ensemble  $(0, T) \times \Omega$  et les fonctions  $\partial u/\partial t$ ,  $\partial u/\partial x_i$  et  $\partial^2 u/\partial x_i^2$  sont continues dans  $(0, T) \times \Omega$ .

Les problèmes liés à l'existence des solutions de (1)-(2) apparaissent dans de nombreuses branches des mathématiques pures et appliquées et ont été étudiés par de nombreux auteurs dans des cas particuliers, par exemple dans [3], [6], [8] et [15] pour  $a = \text{constante}$ ,  $b = 0$  et  $p = 2$ ;

---

<sup>1</sup>Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans (MAPMO)

CNRS : UMR6628 Université d'Orléans - Bâtiment de mathématiques - Route de Chartres - B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2 - France - (33)2 38 49 48 92 - fax : (33)2 38 41 72 05 - michele.grillot@univ-orleans.fr - philippe.grillot@univ-orleans.fr

[5] pour  $a \leq -a_0 < 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $p = 2$  et  $u(0, \cdot)$  est assez petit; [11] pour  $b = 0$  et  $p = 2$  et dans d'autres cas particuliers.

Les problèmes concernant les comportements asymptotiques des solutions de (1)-(2) ont été étudiés dans des cas bien spécifiques : voir [1] et [14] pour  $a = \text{constante}$ ,  $b = 0$  et  $p = 2$  et [11] pour  $a \leq 0$ ,  $b = 0$  et  $p = 2$ .

Plus récemment, dans le cas elliptique le problème a été étudié, voir [4].

Le premier résultat exposé ici concerne des conditions portant sur  $a$  et  $b$  qui font que toute solution de (1)-(2) explose en temps fini. Le résultat est le suivant :

**Théorème 1** *On suppose que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(H1)  $q = r$  et  $\int_{\Omega} a(x) dx + \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma > 0$

ou (H2)  $q \neq r$ ,  $\int_{\Omega} a(x) dx > 0$  et  $b \geq 0$

ou (H3)  $q \neq r$ ,  $\int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma > 0$  et  $a \geq 0$ .

Alors il n'existe pas de solution positive de (1)-(2) sur  $(0, \infty) \times \Omega$ .

Si nous ajoutons une hypothèse sur  $u$ , nous pouvons étendre ce résultat :

**Théorème 2** *Supposons  $a$  et  $b$  non identiquement égales à zéro et supposons que l'une des conditions suivante est réalisée*

(H1')  $q = r$  et  $\int_{\Omega} a(x) dx + \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma = 0$

ou (H2')  $q \neq r$ ,  $\int_{\Omega} a(x) dx = 0$  et  $b \geq 0$

ou (H3')  $q \neq r$ ,  $\int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma = 0$  et  $a \geq 0$ .

Alors il n'existe pas de solution positive bornée de (1)-(2) sur  $(0, \infty) \times \Omega$ .

La condition naturelle  $\int_{\Omega} a(x) dx + \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma < 0$  est étudiée. Malheureusement cette condition n'assure pas l'existence de solution globale des solutions de (1)-(2). Nous proposerons alors des conditions particulières portant sur  $a$  et  $b$  de sorte que  $\int_{\Omega} a(x) dx + \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma < 0$  et que la solution de (1)-(2) explose en temps fini. Ce résultat repose essentiellement sur une estimation de type Keller-Osserman qui est une extension du résultat de [10]:

**Proposition 1** *On suppose  $p \geq 2$ ,  $q > p - 1$  (aucune condition sur  $r$ ) et qu'il existe une constante  $a_0 > 0$  telle que pour tout  $x \in \bar{\Omega}$  :  $a(x) \leq -a_0$ , alors il existe une constante  $C = C(p, q, N) > 0$  telle que pour toute solution  $u$  de (1)-(2) définie sur l'ensemble  $(0, T) \times \Omega$  et pour tout  $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$  :*

$$|u(t, x)| \leq C \left[ a_0^{-\frac{1}{q-p+1}} d(x)^{-\frac{p}{q-p+1}} + a_0^{-\frac{1}{q-1}} t^{-\frac{1}{q-1}} \right] . \quad (3)$$

où  $d(x)$  désigne la distance de  $x$  à la frontière de  $\Omega$ .

Il en découle alors le résultat suivant :

**Corollaire 1** *On suppose  $p \geq 2$ ,  $q > \max(p - 1, r)$  et  $q(p - 1) < p(r - 1) + 1$ , alors il existe des fonctions  $a$  and  $b$  telles que  $\int_{\Omega} a(x) dx + \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma < 0$  pour lesquelles il n'existe pas de solution positive de (1)-(2) sur  $(0, \infty) \times \Omega$ .*

Enfin dans une dernière partie nous nous placerons dans le cas  $\int_{\Omega} a(x) dx + \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma < 0$ , avec  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$ . Dans ce cas, nous pouvons comparer les solutions de (1)-(2) avec celles correspondant à l'équation de la chaleur quasilinear. Notons au passage que toute solution de (1)-(2) est alors globale. Nous proposerons alors quelques résultats qui décrivent le comportement asymptotique des solutions. Nous commencerons par montrer que  $u$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini dans le cas  $p > 2$ . (see [13] quand  $p = 2$ ). Pour une démonstration de ces derniers résultats, on peut se reporter à [9].

**Proposition 2** *On suppose  $p \geq 2$ ,  $r > 1$ , (pas de condition sur  $q$ ),  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$  avec  $b$  non identiquement nulle ( $a$  pouvant être identiquement nulle). Soit  $u$  une solution de (1)-(2) dans  $(0, \infty) \times \Omega$ . Alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0 \quad (4)$$

uniformément sur  $\bar{\Omega}$ .

Pour cela nous donnons une estimation *a priori* :

**Proposition 3** *On suppose que  $p \geq 2$ ,  $r > p - 1$  ( pas de condition sur  $q$ ),  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$  et  $b$  non identiquement égale à zéro ( $a$  pouvant être indentiquement égale à zéro ). Soit  $u$  une solution de (1)-(2) dans  $(0, +\infty) \times \Omega$ . Alors il existe un réel  $t_0 > 0$  et une constante  $C > 0$  tels que pour tout  $(t, x) \in (t_0, \infty) \times \Omega$  :*

$$|u(t, x)| \leq Ct^{-\frac{1}{r-1}}.$$

Cependant si  $q \geq r$ , nous obtenons :

$$|u(t, x)| \leq Ct^{-\frac{1}{r-1}} \leq Ct^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Dans ce cas les deux principaux résultats sont les suivants :

**Théorème 3** *On suppose  $p \geq 2$ ,  $q = r > p - 1$ ,  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$  et  $b$  non identiquement égale à zéro ( $a$  pouvant être identiquement nulle). Soit  $u$  une solution positive de (1)-(2) dans  $(0, +\infty) \times \Omega$ . Alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{1}{q-1}} u(t, x) = L(r, a, b)$$

uniformément dans  $\bar{\Omega}$  où

$$L(r, a, b) = \left( \frac{r-1}{|\Omega|} \left( - \int_{\Omega} a(x) dx - \int_{\partial\Omega} b(x) dx \right) \right)^{-\frac{1}{r-1}} \quad (5)$$

et  $|\Omega| = \int_{\Omega} dx$ .

**Théorème 4** *On suppose  $p \geq 2$ ,  $q > r > p - 1$ ,  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$  et  $b$  non identiquement égale à zéro ( $a$  pouvant être identiquement nulle) . Soit  $u$  une solution positive de (1)-(2) dans  $(0, \infty) \times \Omega$ . Alors*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/(r-1)} u(t, x) = L(r, b) \quad (6)$$

uniformément dans  $\bar{\Omega}$  où

$$L(r, b) = \left( \frac{1-r}{|\Omega|} \left( \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma \right) \right)^{-\frac{1}{r-1}}. \quad (7)$$

Enfin dans le cas  $p = 2$  nous pouvons établir le comportement asymptotique pour des solutions dont le signe peut varier.

**Théorème 5** *On suppose que  $p = 2$ ,  $q = r$ ,  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$  et  $b$  non identiquement égale à zéro ( $a$  pouvant être identiquement nulle). Soit  $u$  une solution positive de (1)-(2) dans  $(0, \infty) \times \Omega$ . Alors  $t^{1/(r-1)}u(t, x)$  converge uniformément dans  $\bar{\Omega}$  vers  $l$  lorsque  $t$  tend vers l'infini avec  $l \in \{0, L(r, a, b), -L(r, a, b)\}$ .*

**Théorème 6** *On suppose que  $p = 2$ ,  $q > r > 1$ ,  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$  et  $b$  non identiquement égale à zéro ( $a$  pouvant être identiquement nulle). Soit  $u$  une solution positive de (1)-(2) dans  $(0, \infty) \times \Omega$ . Alors  $t^{1/(r-1)}u(t, x)$  converge uniformément dans  $\bar{\Omega}$  vers  $l$  lorsque  $t$  tend vers l'infini avec  $l \in \{0, L(r, b), -L(r, b)\}$ .*

## 2 Les cas d'explosion des solutions

Commençons par la preuve des théorèmes 1 et 2. Une idée classique développée par [11] est ici adaptée.

**Preuve du théorème 1 :** Soit  $u$  une solution de (1)-(2) dans  $(0, T) \times \Omega$ . Multiplions l'équation (1) par  $u^{-r}$ , puis intégrons sur  $(0, s) \times \Omega$  avec  $s < T$  et enfin utilisons la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{1-r}(s, x) dx &= \int_{\Omega} u^{1-r}(0, x) dx + r(1-r) \int_0^s \int_{\Omega} |\nabla u|^p(t, x) u^{-1-r}(t, x) dx dt \\ &\quad + (1-r)s \left( \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma \right) + (1-r) \int_0^s \int_{\Omega} a(x) u^{q-r} dx dt. \end{aligned}$$

Si nous supposons (H1), alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{1-q}(s, x) dx &= \int_{\Omega} u^{1-q}(0, x) dx + q(1-q) \int_0^s \int_{\Omega} |\nabla u|^p(t, x) u^{-1-q}(t, x) dx dt \\ &\quad + (1-q)s \left( \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma + \int_{\Omega} a(x) dx \right) \\ &\leq \int_{\Omega} u^{1-q}(0, x) dx + (1-q)s \left( \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma + \int_{\Omega} a(x) dx \right). \end{aligned} \quad (8)$$

En faisant tendre  $s$  vers l'infini dans (8) nous obtenons une contradiction. La solution  $u$  explose donc en temps fini. Lorsque l'hypothèse (H2) ou (H3) est satisfaite nous procédons de manière similaire.

**Remarque :** De l'inégalité (8) nous déduisons une estimation du temps d'explosion :

$$T' < \left( \int_{\Omega} u^{1-q}(0, x) dx \right) \left( (q-1) \left( \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma + \int_{\Omega} a(x) dx \right) \right)^{-1}.$$

**Preuve du théorème 2 : Etape 1** On suppose qu'il existe une solution continue positive non identiquement nulle  $v$  de

$$\begin{cases} -\Delta_p v = a(x)v^q & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} |\nabla v|^{p-2} = b(x)v^r & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (9)$$

Le principe du maximum fort assure que la solution  $v$  est positive. D'autre part, en multipliant (9) par  $v^{-q}$  la formule de Green couplée à la condition de Robin (9) entraîne :

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v(x) \nabla(v^{-q})(x) = \int_{\partial\Omega} b(x)v^{r-q} d\sigma + \int_{\Omega} a(x) dx .$$

Si l'on suppose l'hypothèse (H1'), alors

$$-q \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^p v^{-1-q}(x) dx = 0 .$$

Puisque l'équation (9) ne possède que la solution nulle, on conclut qu'il n'existe pas de solution continue positive non nulle de (9). On procède de façon similaire si l'on suppose (H2') or (H3').

**Etape 2** On suppose que  $u$  est une solution positive bornée de (1)-(2) sur  $(0, \infty) \times \Omega$ . Dans ce cas nous montrons qu'il existe une suite  $(t_n)$  qui tend vers l'infini telle que  $u(t_n, \cdot)$  converge vers 0 dans  $C(\bar{\Omega})$ .

Puisque  $0 < u(t, x) \leq M_1$  pour tout  $(x, t) \in (0, \infty) \times \Omega$  pour une contante  $M_1 > 0$ , la théorie standard des équations quasilineaires [12] entraîne  $\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}([T-1, T+1] \times \bar{\Omega})} \leq M_2$  pour tout  $T \geq 2$  où  $M_2 > 0$  et  $\alpha \in (0, 1)$ . Ainsi, l'ensemble  $\omega$ -limite, ensemble des trajectoires de  $u$  in  $C(\bar{\Omega})$ , défini par :

$$\Gamma^+ = \bigcap_{t>0} \left( \overline{\bigcup_{\tau>t} \{u(\tau, \cdot)\}^{C(\bar{\Omega})}} \right),$$

est non vide. En multipliant (1) par  $v = \partial u / \partial t$ , puis en intégrant sur  $(\varepsilon, t) \times \Omega$  pour  $0 < \varepsilon < t$  et en apliquant la formule de Green, on en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (t, x) dx dt + \frac{1}{p} \int_{\varepsilon}^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^p(s, x) dx dt - \int_{\varepsilon}^t \int_{\partial\Omega} b(x)u^r(s, x)v(s, x) d\sigma dt \\ = \int_{\varepsilon}^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a(x)}{q+1} u^{q+1}(s, x) \right) dx dt \end{aligned}$$

cependant  $\int_{\varepsilon}^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (s, x) dx dt =$

$$\left[ \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{p} |\nabla u|^p(s, t) + \frac{a(x)}{q+1} u^{q+1}(s, x) \right) dx \right]_{\varepsilon}^t + \left[ \int_{\partial\Omega} b(x) \frac{u^{r+1}(s, x)}{r+1} d\sigma \right]_{\varepsilon}^t .$$

Comme  $u(t, \cdot)$  est bornée dans  $W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  indépendamment de  $t \geq \varepsilon$ , on en déduit que  $\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (s, x) dx dt$  est fini. Il existe donc une suite  $(t_n)$  tendant vers l'infini et une fonction continue positive  $w$  solution faible de (9) telle que  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, \cdot) = 0$  in  $L^2(\Omega)$  et  $\lim_{t_n \rightarrow \infty} u(t_n, \cdot) = w(\cdot)$  uniformément dans  $\bar{\Omega}$ . L'étape 1 assure alors que  $w = 0$ .

**Etape 3** Comme dans la preuve du théorème 1, en multipliant l'équation (1) par  $u^{-q}$  et en intégrant sur  $(0, t_n) \times \Omega$ , la formule de Green ainsi que les conditions portant sur les fonctions  $a$  et  $b$  entraînent :

$$\frac{1}{q-1} \int_{\Omega} u^{1-q}(0, x) dx \geq \frac{1}{q-1} \int_{\Omega} u^{1-q}(t_n, x) dx + \int_0^{t_n} \int_{\partial\Omega} b(x) u^{r-q}(t, x) d\sigma dt + t_n \int_{\Omega} a(x) dx. \quad (10)$$

Lorsque les hypothèses (H1') où (H2') sont satisfaites, alors le second membre de l'équation (10) tend vers l'infini d'après l'étape 2. Ces contradictions entraînent qu'il n'existe pas de solution globale positive. Le cas (H3') est similaire au précédent.

### 3 La cas où : $\int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma + \int_{\Omega} a(x) dx < 0$

**Preuve de la proposition 1** : Soit  $x_0 \in \Omega$  et  $t_1 > 0$ . Soit  $k = d^2(x_0)/t_1$  et  $r = |x - x_0|$ . On introduit la fonction  $w$  définie dans  $D := \{(x, t) \text{ tel que } |x - x_0|^2 < kt, 0 < t \leq t_1\}$  par :

$$w(t, x) = \frac{C}{(kt - r^2)^{\frac{p}{q-p+1}}}$$

avec  $C > 0$  une constante à déterminer telle que  $w$  soit une sur-solution de (1) dans  $D$ . Par définition  $w = \infty$  sur la frontière parabolique de  $D$ . D'un autre côté, puisque  $a \leq -a_0 < 0$ , un calcul direct nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta_p w - a(x)|w|^{q-1}w &\geq C(kt - r^2)^{-\frac{qp}{q-p+1}} \times \left[ a_0 C^{q-1} - \frac{pk}{q-p+1} (kt - r^2)^{\frac{q(p-1)-1}{q-p+1}} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{2p}{q-p+1} \right)^{p-1} C^{p-2} r^{p-2} \left[ (p-1+N)(kt - r^2) + \frac{2qp}{q-p+1} r^2 \right] \right]. \end{aligned}$$

Puisque  $kt - r^2 \leq kt \leq kt_1 = d^2(x_0)$  et  $r = |x - x_0| \leq d(x_0)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta_p w - a(x)|w|^{q-1}w &\geq C(kt - r^2)^{-\frac{qp}{q-p+1}} \times \\ &\quad \left[ \frac{a_0 C^{q-1}}{3} - \frac{p}{q-p+1} \frac{d(x_0)^{2+2\frac{q(p-1)-1}{q-p+1}}}{t_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_0 C^{q-1}}{3} - \left( \frac{2p}{q-p+1} \right)^{p-1} (p-1+N) C^{p-2} d(x_0)^p \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_0 C^{q-1}}{3} - \left( \frac{2p}{q-p+1} \right)^{p-1} C^{p-2} \left( \frac{2pq}{q-p+1} \right) d(x_0)^p \right]. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant la constante  $C$  de sorte que

$$\begin{cases} C^{q-1} & \geq \frac{3}{a_0} \frac{p}{q-p+1} \frac{d(x_0)^{\frac{2p(q-1)}{q-p+1}}}{t_1} \\ C^{q-p+1} & \geq \frac{3}{a_0} \left( \frac{2p}{q-p+1} \right)^{p-1} (N+p-1) d(x_0)^p \\ C^{q-p+1} & \geq \frac{3}{a_0} \left( \frac{2p}{q-p+1} \right)^p q d(x_0)^p. \end{cases} \quad (11)$$

Finalement il existe une constante  $C > 0$  de la forme :

$$C = K(q, p, N) \left[ a_0^{-\frac{1}{q-1}} d(x_0)^{\frac{2p}{q-p+1}} t_1^{-\frac{1}{q-1}} + a_0^{-\frac{1}{q-p+1}} d(x_0)^{\frac{p}{q-p+1}} \right]$$

telle que  $w$  soit une sur-solution de (1). Le principe du maximum fort entraîne que pour tout  $(t, x) \in D$  :

$$u(t, x) \leq w(t, x)$$

et en particulier :

$$u(t_1, x_0) \leq K(q, p, N) \left[ a_0^{-\frac{1}{q-1}} t_1^{-\frac{1}{q-1}} + a_0^{-\frac{1}{q-p+1}} d(x_0)^{-\frac{p}{q-p+1}} \right].$$

On procède de la même manière pour  $-u$  et nous obtenons (3).

**Preuve du corollaire 1 :** Soit  $u$  une solution positive de (1)-(2) dans  $(0, T) \times \Omega$ . En multipliant l'équation (1) par  $u^{-r}$  et en intégrant sur  $(\eta, s) \times \Omega$  avec  $0 < \eta < s < T$ , nous obtenons comme en section 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r-1} \int_{\Omega} u^{1-r}(s, x) dx &= \frac{1}{r-1} \int_{\Omega} u^{1-r}(\eta, x) dx \\ -r \int_{\eta}^s \int_{\Omega} |\nabla u|^p(t, x) u^{-1-r}(t, x) dx dt &- (s-\eta) \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma - \int_{\eta}^s \int_{\partial\Omega} a(x) u^{q-r}(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Puisque  $q > r$ , si la fonction  $a$  satisfait pour tout  $x \in \bar{\Omega}$  :

$$-a_1 = \min_{\bar{\Omega}} a \leq a(x) \leq -a_0 \quad (13)$$

avec  $a_0 > 1$  alors la proposition 1 implique :

$$-a(x) u(t, x)^{q-r} \leq \tilde{C} a_1 a_0^{-\frac{q-r}{q-1}} \left( d(x)^{-\frac{p}{q-p+1}} + \eta^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-r} \quad (14)$$

avec  $\int_{\Omega} d(x)^{-\frac{p(q-r)}{q-p+1}} dx < \infty$  pour  $p, q$  et  $r$  tels que  $\frac{p(q-r)}{q-p+1} < 1$  i.e  $p(q-r) < q-p+1$  ou  $q(p-1) < p(r-1) + 1$ . On en déduit d'après (12) que

$$\frac{1}{r-1} \int_{\Omega} u^{1-r}(s, x) dx \leq \frac{1}{r-1} \int_{\Omega} u^{1-r}(\eta, x) dx - (s-\eta) \left[ \int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma - \bar{C} a_1 a_0^{-\frac{q-r}{q-1}} \right]. \quad (15)$$

Cela revient à prouver que l'on peut trouver des fonctions  $a$  et  $b$  telles que :

$$\int_{\partial\Omega} b(x) d\sigma + \int_{\Omega} a(x) dx < 0, \quad (16)$$



$$\forall x \in \bar{\Omega} : -a_1 \leq a(x) \leq -a_0 \text{ avec } a_0 > 1 \quad (17)$$

et

$$\int_{\partial\Omega} b(x)d\sigma - \bar{C}a_1a_0^{-\frac{q-r}{q-1}} > 0. \quad (18)$$

Si (18) est vérifiée, alors nous obtenons une contradiction lorsque  $s$  tend vers l'infini dans (15) ce qui prouve le corollaire. Les conditions (16)-(18) sont satisfaites si (17) et la condition suivante est vérifiée :

$$\bar{C}a_1a_0^{-\frac{q-r}{q-1}} < \int_{\partial\Omega} b(x)d\sigma < a_0|\Omega| \leq - \int_{\Omega} a(x)dx \quad (19)$$

on peut donc prendre  $a_1 = 2a_0$  et  $a_0$  suffisamment grand de sorte que  $2\bar{C}a_0^{-(q-r)/(q-1)} < |\Omega|$ . Enfin en choisissant  $a$  et  $b$  afin que (19) soit satisfaite la fin de la preuve du corollaire est complète.

## References

- [1] A. Brada, *Comportement asymptotique de solutions d'équations elliptiques semi-linéaires dans un cylindre*, **Asymptotic Anal.** **10** (4) (1995), 335-366.
- [2] X. Chen, H. Matano, L. Véron, *Anisotropic singularities of solutions of nonlinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^2$* , **J. Funct. Anal.** **83** (1989) 50-97.
- [3] M. Chipot, M. Fila, P. Quitner, *Stationary solutions, blow-up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, **Acta Math. Univ. Comenian LX** (1991) 35-103.
- [4] X. Duchateau, *On some quasilinear equations involving the  $p$ -Laplacian with Robin boundary conditions*, **Applicable Analysis**, to appear.
- [5] Y. V. Egorov, V. A. Kondratiev, *On some global existence theorems for a semilinear parabolic problem*, **Applied Nonlin. Anal.** (1999) 67-78.
- [6] J. Escher, *Global existence and non-existence in the large of solutions of semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, **Math. Anal.** **284** (1989) 285-305.
- [7] A. Gmira, L. Véron, *Asymptotic behaviour of the solution of a semilinear parabolic equation*, **Monatsh. Math.** **94** (1982) 299-311.
- [8] J. L. Gómez, V. Marquez, N. Wolanski, *Blow-up results and localization of blow-up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition*, **J. Diff. Eq.** **92** (1991) 384-401.
- [9] M. Grillot and P. Grillot, *Asymptotic behavior of solutions of quasilinear parabolic equations with Robin boundary condition*, **Adv. Dif. Equ.** **17** (2012) 401-419.
- [10] S. Kamin, L. A. Peletier, J. L. Vazquez, *Classification of singular solutions of a nonlinear heat equation*, **Duke Math. J.** **58** (1988) 601-615.
- [11] V. A. Kondratiev, L. Véron : *Asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations*, **Asymptotic Anal.** **14** (1997) 117-156.

- [12] G. M. Lieberman : *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, **Non-linear Anal.** **12** (1988) 1203-1219.
- [13] L. Véron : *Effets régularisants de semi-groupes non-linéaires dans des espaces de Banach*, **Ann. Fac. Sci. Toulouse I**, 171-200 (1979).
- [14] L. Véron, Equations d'évolution semi-linéaires du second ordre dans  $L^1$ , **Rev. Roumaine Math. Pures Appl.** **XXVII** (1982) 95-123.
- [15] W. Walter, On existence and nonexistence in the large solutions of parabolic differential equations with a nonlinear boundary condition. **SIAM J. Math. Anal.** **6** (1975) 5-90.