HAL open science

Sur la stabilisation des solutions de l' équation de Kuramoto-Sivashinsky

Olivier Vallée, Philippe Grillot, Christophe Letellier

To cite this version:

Olivier Vallée, Philippe Grillot, Christophe Letellier. Sur la stabilisation des solutions de l' équation de Kuramoto-Sivashinsky. Modélisation : Atomes, Molécules, Plasmas et Systèmes dynamiques, May 2013, Bourges, France. hal-00875145

HAL Id: hal-00875145

https://hal.science/hal-00875145v1

Submitted on 22 Oct 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la stabilisation des solutions de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky

O. Vallée[§], P. Grillot[¶] and C. Letellier[‡]
§ GREMI - CNRS (UMR 7344) - Université d'Orléans, rue Gaston Berger BP 4043 - 18028 Bourges cedex.
¶ MAPMO UMR 6628, Faculté des Sciences – Université d'Orléans, rue de Chartres, B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2.
‡ CORIA UMR 6614, BP 12, F-76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex.

Résumé Dans cet article, on examine les solutions de propagation d'une généralisation par Benney de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. On montre que le terme introduit par Benney a une action stabilisatrice sur les solutions.
Mots clés Système dynamique, chaos, explosion en temps fini des solutions d'EDO.

1 Introduction

L'équation de Kuramoto-Sivashinski (KS) a été l'objet de nombreuses recherches tant analytiques que numériques. En particulier, l'équation (KS) fut introduite par Kuramoto [1] en dimension un pour l'étude de la turbulence de phase dans les réactions chimiques. Sivashinsky [2] a obtenu cette équation dans le contexte d'instabilités thermo-diffusives pour des fronts de flammes laminaires. L'équation (KS) a aussi été étudiée pour décrire les problèmes d'instabilité des surfaces solides [3]. De ce point de vue, on peut la considérer comme une généralisation de l'équation KPZ [4]. On remarquera que les solutions stationnaires de l'équation sont liés à un flot hamiltonien [5]. Quand on examine les solutions de propagation des équations d'évolution impliquant à la fois non-linéarité, dissipation, dispersion et instabilité, on doit prendre en compte les termes de dérivées d'ordre trois. C'est précisément le but d'une équation introduite initialement par Benney [6] qui implique les dérivées partielles à tous les ordres jusqu'à l'ordre quatre. Cette équation d'évolution avait été introduite par Benney pour décrire la dynamique non-linéaire d'un fluide s'écoulant sur un plan incliné.

Dans cet article nous nous intéresserons aux solutions de propagation de l'équation générale que l'on désignera sous le nom d'équation de Kuramoto-Sivashinsky-Benney (KSB) qui s'écrit :

$$\partial_t u + u\partial_x u + \alpha\partial_x u + \beta\partial_{xx} u + \gamma\partial_{xxx} u + \partial_{xxxx} u = 0, \tag{1}$$

où une loi d'échelle sur les variables dépendantes et indépendantes impose l'existence d'au moins deux paramètres. C'est la raison pour laquelle nous

imposerons la co-dimension deux (β et γ), car le paramètre α disparaitra dans la recherche de solution de propagation.

On remarquera qu'en posant $u(x,t) = -\partial_x h$, nous pouvons aussi bien considérer l'équation au potentiel associée :

$$\partial_t h - \frac{1}{2}(\partial_x h)^2 + \alpha\partial_x h + \beta\partial_{xx} h + \gamma\partial_{xxx} h + \partial_{xxxx} h = 0. \tag{2}$$

L'article se déroulera de la façon suivante. Dans le paragraphe qui suit on établira le système dynamique associé à l'équation de propagation issue de l'Eq.(1). Le paragraphe trois étudiera le comportement chaotique de ce système dynamique. Dans le dernier paragraphe, nous examinerons la stabilisation des solutions de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (*i.e.* le cas $\gamma = 0$) et l'influence de $\gamma \neq 0$ comme paramètre de stabilisation.

2 Solution de propagation de l'équation KSB - Étude d'un système dynamique

Nous recherchons des solutions impliquant la variable galiléenne $\xi = x - ct$, conduisant à partir de l'Eq.(1) à

$$-c\partial_\xi u + u\partial_\xi u + \alpha\partial_\xi u + \beta\partial_{\xi\xi} u + \gamma\partial_{\xi\xi\xi} u + \partial_{\xi\xi\xi\xi} u = 0,$$

c'est à dire à l'équation différentielle ordinaire :

$$u'''' + \gamma u''' + \beta u'' + (u - c + \alpha)u' = 0,$$

que l'on intègre une première fois en posant $w = u - c + \alpha$:

$$w''' + \gamma w'' + \beta w' + \frac{1}{2}w^2 = K, \tag{3}$$

où K est une constante d'intégration. On notera que dans le cas des conditions aux limites w, w', w'', $w''' \to 0$ quand $\xi \to \pm\infty$, alors $K = 0$.

Sans perte de généralité, nous travaillerons alors avec l'équation :

$$X''' + \gamma X'' + \beta X' + X^2 = 1. \tag{4}$$

Cette équation appartient à la famille des systèmes dynamiques les plus simples, tel que les a décrites Sprott. En effet dans un travail numérique extensif, Sprott [9] a découvert 19 cas d'équations algébriquement simples en dimension trois qui ont des comportement chaotiques. L'Eq.(4) est fonctionnellement équivalente au cas "S" de Sprott, comme il l'a mentionné lui même dans [10], cf aussi dans [11].

Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à des solutions qui ont un comportement chaotique lorsque l'on fait évoluer les paramètres β et γ.

L'Eq.(4) peut s'écrire comme le flot :

$$\phi : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = 1 - \gamma z - \beta y - x^2 \end{cases}$$

où nous avons fait l'usage des notations habituelles pour les systèmes dynamiques. Nous ne considèrerons ici que les valeurs positives des paramètres β et γ.

Comme nous avons $\operatorname{div} \phi = -\gamma$, alors le flot ϕ est contractant : γ possède la signification d'un paramètre de dissipation. En accord avec le théorème de Liouville, quand γ s'annule le flot devient hamiltonien [5]. Il y a deux points fixes $P_\pm$: $x = \pm 1, y = z = 0$. Lorsque les solutions sont linéarisées autour de ces points fixes, on obtient les équations caractéristiques correspondantes aux valeurs propres :

$$\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \beta\lambda \pm 2 = 0. \tag{5}$$

Le point fixe P_- est toujours instable, aussi on considérera maintenant que le cas du point P_+. Nous avons tracé sur la Fig.(1) plusieurs régions décrivant la nature des racines de l'équation caractéristique pour P_+ dans le plan des paramètres. L'hyperbole $\gamma\beta = 2$ sépare le plan des paramètres en deux régions. Sous cette hyperbole, il y a une racine réelle négative et une paire de racines complexes conjuguées avec une partie réelle positive.

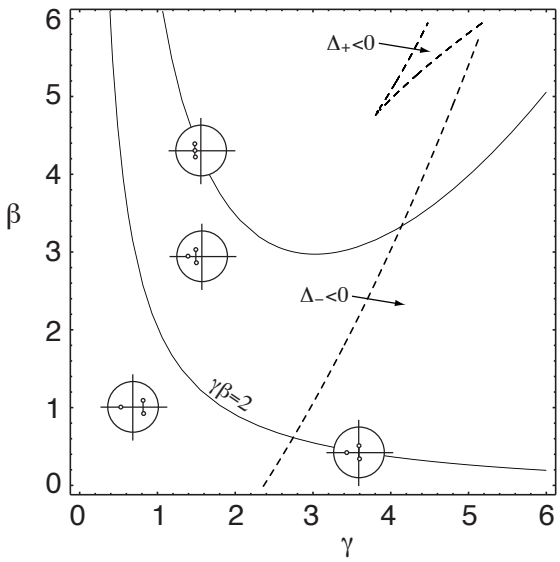

FIGURE 1 – *Nature des racines de l'équation caractéristique dans le plan des paramètres pour le point fixe P_+. Les symboles ont la signification de la position des racines dans le plan complexe. Les lignes pointillées séparent les régions où le discriminant de la cubique (5) conduit à des racines réelles.*

Nous pouvons nous attendre à une bifurcation quand la valeur du paramètre traversera cette courbe. En fait pour un γ donné et une valeur décroissante de β le système passe d'un point fixe qui est un foyer stable à un col. Les courbes en pointillés correspondent à une valeur nulle du discriminant de la cubique Eq.(5).

Considérons la valeur particulière $\gamma = 2^{-2/3}$ qui correspond à un comportement typique de ce système. Une bifurcation de Hopf apparaît pour la valeur $\beta = 2^{5/3}$, puis nous observons un dédoublement de période non loin de la valeur $\beta = 1.862$. Sur la Fig.(2) nous présentons un attracteur étrange

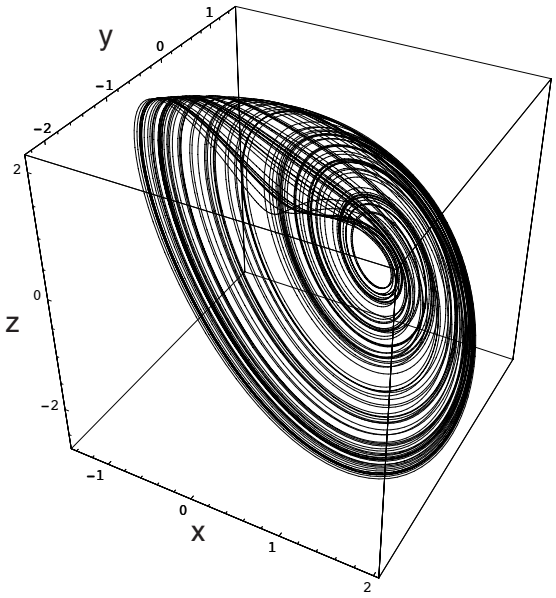

FIGURE 2 – *Attracteur étrange pour les valeurs* $\gamma = 2^{-2/3}$ *et* $\beta = 1.59$.

qui apparaît pour la valeur $\beta = 1.59$. Pour des valeurs de β inférieures à 1.563, le flot devient instable à cause de l'influence du point fixe P_-. De fait la fenètre avec un comportement chaotique du système est plutôt étroite. Pour la valeur particulière de $\gamma = 2^{-2/3}$, nous trouvons $1.563 < \beta < 1.726$. De plus ce comportement chaotique peut également disparaître quand on change la valeur de γ. La Fig.(3) donne un diagramme de bifurcation pour la valeur de $\gamma = 2^{-2/3}$.

Pour conclure ce paragraphe, nous avons analysé le plan β–γ et nous résumons ces résultats sur la Fig.(4). Ce plan peut être séparé en quatre régions distinctes. La première (a) correspond aux trajectoires qui spiralent vers le foyer stable P_+. La deuxième région (b) à un cycle limite. Dans la région étroite (c), on peut observer des cascades de dédoublements, mais également du chaos. Dans la dernière région (d), les trajectoires deviennent instables à cause de l'influence du point fixe P_-.

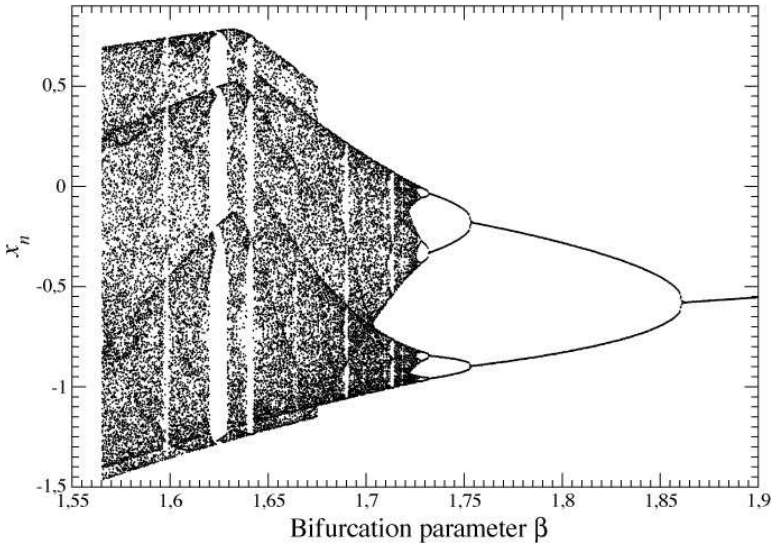

FIGURE 3 – *Diagramme de bifurcation pour la valeur de* $\gamma = 2^{-2/3}$.

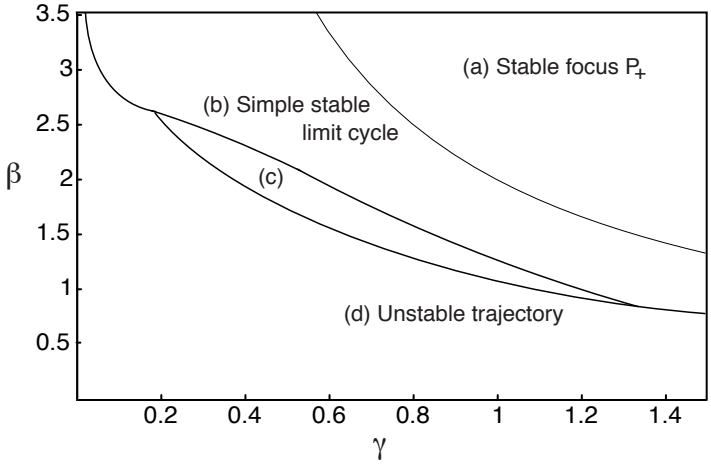

FIGURE 4 – *Le plan* β–γ. *Dans la région (a), la trajectoire dans l'espace des phases tend vers le foyer stable* P_+. *La région (b) correspond à des cycles limites. Dans la region (c), on peut observer des dédoublements de périodes mais également des mouvements chaotiques. Dans la région (d), le mouvement devient instable.*

3 Stabilisation des solutions de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky

L'équation de Kuramoto-Sivashinsky (Eq.(4) avec $\gamma = 0$) est connue pour avoir des solutions instables comme on peut le voir sur la Fig.(5). En

fait, l'Eq. (4) et le flot ϕ associé peut être réécrit

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -\beta y - 2x - x^2 \end{cases}$$

en utilisant la transformation $x \mapsto x + 1$. Mais ce système n'appartient pas aux deux classes de systèmes minimaux ayant des solutions chaotiques comme identifiés par Malasoma [17]. En réalité, pour un jeu de conditions initiales données, la trajectoire dans l'espace des phases visitera le voisinage d'un tore instable T_2. Au final, la trajectoire est éjectée loin de ce tore quand le système s'approche trop près du point fixe instable P_-. Dans l'appendice, nous étudierons le cas particulier $\beta \gg 1$. En réalité, il y a deux fréquences

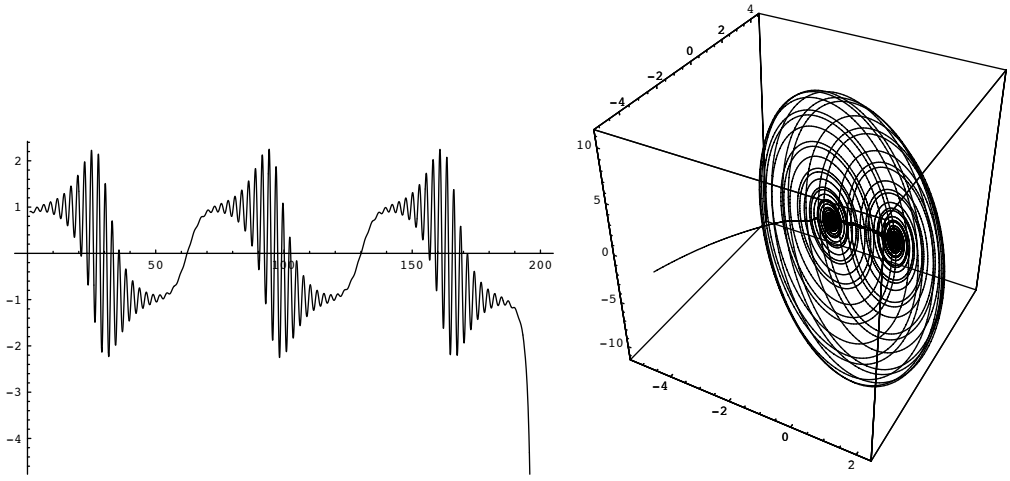

FIGURE 5 – *Explosion en temps fini de la solution et trajectoire typique dans l'espace des phases quand* $\gamma = 0$.

caractéristiques pour cette trajectoire : une composante haute fréquence lorsque la trajectoire visite la face externe du tore et un mouvement basse fréquence lors des passages à l'intérieur du tore entre les deux points fixes $P_\pm$. La trajectoire explose quand l'influence attractive de P_+ est dominée par l'effet répulsif deP_-. Si maintenant nous introduisons un terme dissipatif ($\gamma \neq 0$), on observe que le tore instable T_2 s'écroule sur un cycle limite de période 1, c'est à dire un tore T_1 (cf Fig. (6)), et ce même pour des faibles valeurs de γ.

Ce résultat nous conduit à la conjecture :

Conjecture : Théorème de stabilisation

Pour un ensemble de conditions initiales données et un β_0 donné, pour tout $\beta > \beta_0$, il existe une valeur de $\gamma = \gamma_0$ tel que le tore instable T_2 collapse en un cycle limite stable (tore T_1).

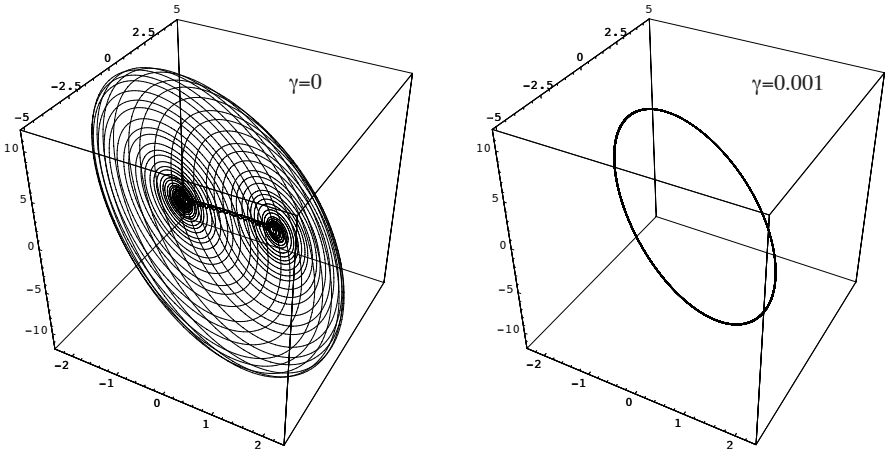

FIGURE 6 – *Stabilisation de la trajectoire dans l'espace des phases quand* $\beta = 6$ *et* $\gamma = 0.001$.

4 Conclusion

Dans cet article, nous nous sommes intéressé aux solutions de propagation de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky-Benney. L'équation différentielle ordinaire appartient à la famille des systèmes dynamiques simples produisant du chaos et ne dépendant que de deux paramètres. Par ailleurs nous avons vu que le terme additionnel introduit par Benney avait un effet de stabilisation sur les solutions de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Si les attracteurs chaotiques de nature toroïdal ont souvent été observé dans des systèmes dynamiques de plus grandes dimensions, c'est toujours une question ouverte qu'un système autonome de dimension 3 produise un tel attracteur sans qu'il y ait une symétrie sous-jacente.

Appendice

Explosion en temps fini des solutions quand $\gamma = 0$ et $\beta \gg 1$
En accord avec Gorielly et Hyde [18], nous définirons l'explosion en temps fini d'une solution d'un système dynamique $x(t)$, pour la condition initiale $x(0) = x_0$, s'il existe un temps t^* tel que

$$\forall M > 0 \ \ \exists \varepsilon > 0, \quad |t - t^*| < \varepsilon, \ t \neq t^* \Longrightarrow \|x(t)\| > M$$

où $\| \, . \, \|$ est une norme de ℓ^p.

Considérons l'équation de Kuramoto-Sivashinsky sous la forme : $x''' + \beta x' + x^2 - 1 = 0$ et une loi d'échelle sur le temps généralisé $t \to \bar{t}/\lambda$. Cette équation devient $\lambda^3 x''' + \beta\lambda x' + x^2 - 1 = 0$, où la dérivée est prise par rapport à $\bar{t}$. Maintenant posons $\lambda = 1/\beta$, conduisant à $x''' + \beta^3(x' + x^2 - 1) = 0$. Ainsi dans la limite des grandes valeurs de β, le terme dominant est décrit par l'équation de Riccati $x' + x^2 - 1 = 0$, à condition que par exemple $\|x'''\|_\ell^2$ soit uniformément fini par rapport à β. Mais la solution de cette équation de Riccati s'écrit

$$x(\bar{t}) = \frac{\alpha \mathrm{e}^{2\bar{t}} - 1}{\alpha \mathrm{e}^{2\bar{t}} + 1},$$

où la constante d'intégration α est liée à la condition initiale $x(0) = x_0 \neq \pm 1$ par :

$$\alpha = \frac{1 + x_0}{1 - x_0}.$$

Alors la solution s'écrit à présent

$$x(\bar{t}) = \frac{\frac{x_0+1}{x_0-1}\mathrm{e}^{2\bar{t}} + 1}{\frac{x_0+1}{x_0-1}\mathrm{e}^{2\bar{t}} - 1},$$

et il existe un temps $\bar{t}^* = \frac{1}{2} \ln \frac{x_0-1}{x_0+1}$ pour lequel $|x(\bar{t})|$ tend vers l'infini avec la condition $x_0 < -1$, et $\bar{t}^* > 0$.

Dans ce cas, si $|\bar{t} - \bar{t}^*| < 1/M = \varepsilon$, alors $|x(\bar{t})| > M$, qui est obtenu par un développement de Taylor des exponentielles dans $x(\bar{t})$ autour de $\bar{t}^*$. En réalité la solution $x(t)$ peut s'écrire quand $\bar{t} \to \bar{t}^*$ comme :

$$x(\bar{t}) = \frac{\mathrm{e}^{2(\bar{t}-\bar{t}^*)} + 1}{\mathrm{e}^{2(\bar{t}-\bar{t}^*)} - 1} \sim \frac{1}{\bar{t} - \bar{t}^*},$$

Et finalement en rétablissant le changement d'échelle, on obtient la proposition :

Proposition *Pour une condition initiale $x_0 < -1$ et $\beta \to \infty$, la solution de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky $x(t)$ explose en un temps fini donné par $t^* = \frac{\beta}{2} \ln \frac{x_0-1}{x_0+1}$.*

Références

[1] Kuramoto Y., (1978) Prog. Theor. Phys. Suppl, **64**, 346.

[2] Sivashinsky G. I., (1977) Acta Astron.**4**, 1177.

[3] Halpin-Healy T. and Zhang Y.C., (1995) Phys. Rep. **245**, 215-414.

[4] Hayot F., Jayaprakash C. and Josserand C., (1993) Phys.Rev. E **47**, 911-915.

[5] Bouquet S., (1995) J. Math. Phys. **36**, 1242-1258.

[6] Benney D. J., (1966) J. Math. Phys. **45**, 150.

[7] Yee T.-l., Conte R., and Musette M., 195–212, From combinatorics to dynamical systems, eds. F. Fauvet and C. Mitschi, IRMA lectures in mathematics and theoretical physics 3 (de Gruyter, Berlin, 2003). arXiv : nlin.PS/0302056.

[8] Eremenko A., Meromorphic traveling wave solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation, arXiv : nlin.SI/0504053 and references therein.

[9] Sprott J. C., (1994) Phys. Rev. E **50**, R647-R650.

[10] Sprott J. C., (1997) Am. J. Phys. **65**, 537-543.

[11] Sprott J. C., (2000) Int. J. Chaos Theo. Appl. **5**, 1-20.

[12] Rössler O.E. (1976) Phys. Lett. A **57**, 397-398.

[13] Crutchfield J. & al., (1980) Phys. Letters **76A** 1-4

[14] Zhang F. & Heidel J., (1997) Nonlinearity **10**, 1289.

[15] Zhang F. & Heidel J., (1999) Nonlinearity **12**, 739, Erratum.

[16] Heidel J. & Zhang F., (1999) Nonlinearity **12**, 617.

[17] Malasoma J.-M., (2002) Physics Letters A, **305**, 52-58.

[18] Goriely A. and Hyde C., (1998) Phys. Lett. A **250**, 311-318.