

XX Командная олимпиада школьников Санкт- Петербурга по информатике и программированию

Разбор задач
4 ноября 2012 года

Санкт-Петербург



Задача А

Рекламное объявление



- 
- Автор задачи – Георгий Корнеев
 - Условие – Николай Ведерников
 - Подготовка тестов – Павел Куньявский
 - Разбор – Павел Куньявский

Постановка задачи

- Дан набор размеров слов и размер объявления.
- Надо подобрать максимальный масштаб, при котором слова можно уместить на объявление.

Как решать?

- Научимся проверять, можно ли уместить слова с данным масштабом.
- Для этого будем жадно ставить слово в ту же строчку, если можно.
- Когда поставлены все слова, надо проверить, что высота объявления не слишком большая.

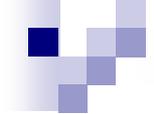
Как решать? (продолжение)

- Заметим, что если для данного масштаба текст уместается, то для любого меньшего тоже уместается.
- Найдем максимальный «хороший» масштаб с помощью бинарного поиска.

Задача В

Реклама



- 
- Автор задачи – Жюри
 - Условие – Андрей Комаров
 - Подготовка тестов – Демид Кучеренко
 - Разбор – Анна Малова

Постановка задачи

- Дано n отрезков на прямой $-l_i \dots r_i$.
- Нужно проверить покрытие отрезка $1..m$ заданными.

Как решать?

- Сначала заведём массив размера m , в котором на i позиции будем хранить, покрыта ли i -ая координата
- Далее перебираем все отрезки, делая соответствующие пометки в массиве
- В конце проверяем, что каждая позиция покрыта

Как решать? (второе решение)

- Следует отсортировать отрезки по левому краю
- Далее пройдем сканирующей прямой по отрезкам, проверяя, что каждая пара соседних отрезков пересекается хотя бы в одной точке:
 $l[i + 1] \leq r[i]$.
- Надо не забыть проверить, что левая координата первого отрезка равна 1, а максимальная правая – m .

Задача С

Укрепление мостов



- 
- Автор задачи – Нияз Нигматуллин
 - Условие – Нияз Нигматуллин
 - Подготовка тестов – Нияз Нигматуллин
 - Разбор – Нияз Нигматуллин

Постановка задачи

- Задан неориентированный граф.
- Степень каждой вершины в графе не превышает двух.
- Требуется найти количество различных остовных лесов в заданном графе.

Как решать?

- Решаем для каждой компоненты связности отдельно.
- Ответ — произведение способов для каждой компоненты связности.
- Степень любой вершины не больше двух, поэтому каждая компонента связности в графе — либо цепочка, либо цикл.
- Цепочка длины L состоит из $(L - 1)$ ребер, следовательно есть одно остовное дерево.
- Цикл длины L состоит из L ребер, нужно удалить одно ребро, чтобы осталось $(L - 1)$, это можно сделать L способами.
- Считаем в каждой компоненте связности количество ребер и вершин. Определяем тип компоненты связности.

Задача D

Лягушонок Билли



- 
- Автор задачи – Анна Малова
 - Условие – Демид Кучеренко
 - Подготовка тестов – Демид Кучеренко
 - Разбор – Анна Малова

Постановка задачи

- Дано n точек на прямой.
- На каждом шаге одна из точек удаляется, оставшиеся точки смещаются на один от нее, совпадающие с ней не двигаются.
- Необходимо выбрать порядок удаления, при котором сумма координат удаляемых точек минимальна.

Идея решения

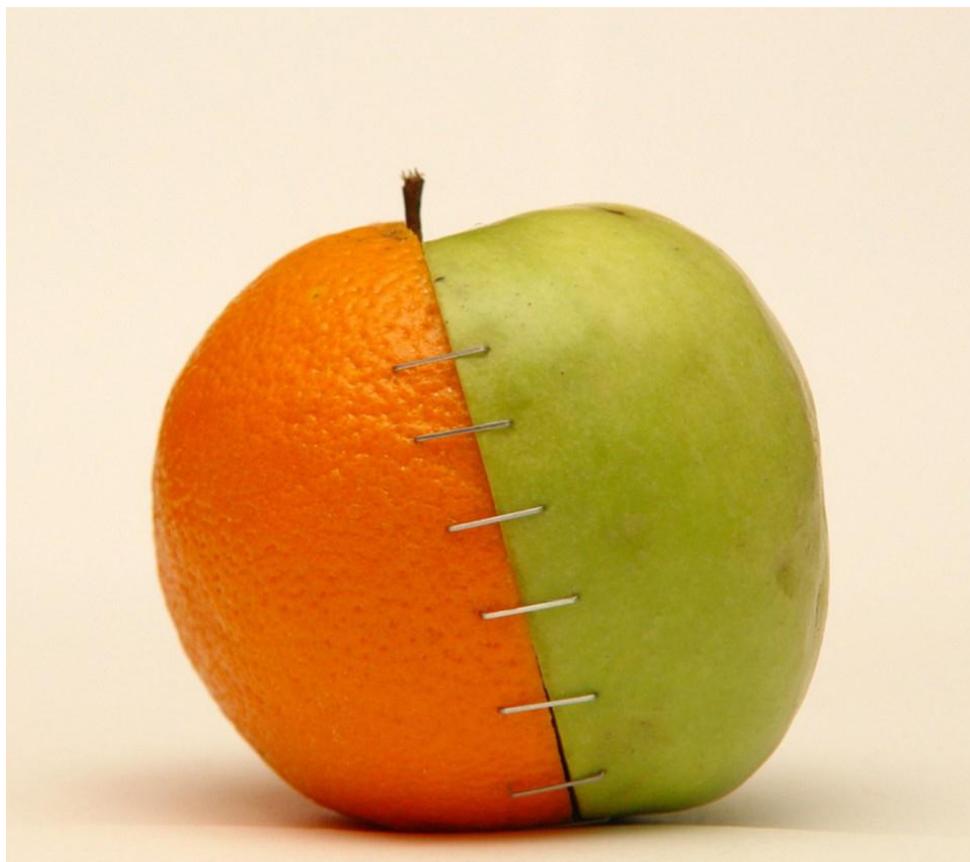
- На каждом шаге нам выгодно убирать самую дальнюю точку.
- Почему?
 - Каждая точка максимально сдвинется влево.
 - Ни при каком другом порядке она не сможет сдвинуться больше.

Решение

- На каждом шаге будем удалять группу самых правых точек.
- А также поддерживать величину, на которую сместились остальные точки. После удаления группы смещение увеличивается на размер группы.
- Продолжаем до тех пор, пока не кончатся точки.
- Надо не забыть про 64-битный тип данных.

Задача E

Половина



- 
- Автор задачи – Борис Минаев
 - Условие – Андрей Комаров
 - Подготовка тестов – Андрей Комаров
 - Разбор – Борис Минаев

Постановка задачи

- Дано N яблок. K раз Петя либо отдает половину от всех своих яблок, либо половину одного яблока.
- Петя не может делить яблоко более чем на две части.
- Найти, сколько яблок могло остаться у Пети.

Как решать?

- Воспользуемся методом динамического программирования.
- Будем хранить ответы на вопросы «Может ли у Пети быть X яблок, после того, как он встретил Y друзей».
- Заметим, что X лучше хранить в «половинках» яблок, т. к. их количество всегда целое число.

Как решать? (продолжение)

- Пусть у Пети может быть X «половинок» яблок после встречи Y друзей. В какие состояния можно перейти?

Если у Пети есть хотя бы одна «половинка», он может ее отдать.

Если у Пети четное число «половинок», то он может отдать половину от всех яблок.

Как решать? (продолжение)

- Значит, из состояния динамики $(X; Y)$, где X – количество яблок, Y – количество уже встреченных друзей, будут следующие переходы:
 - Если $X > 0$, тогда $(X - 1; Y + 1)$
 - Если X делится на 2, тогда $(\frac{X}{2}; Y + 1)$
- Сложность решение $O(N \cdot K)$

Задача F

Инициализация массива



- 
- Автор задачи – Виталий Демьянюк
 - Условие – Павел Кротков
 - Подготовка тестов – Виталий Демьянюк
 - Разбор – Павел Кротков

Постановка задачи

- В задаче требовалось найти количество способов покрыть отрезок от 1 до n с помощью t каких-нибудь отрезков.
- Различными считаются те способы, в которых наборы отрезков различались по составу набора или по порядку следования отрезков в нем.

Как решать?

- У задачи существует несколько различных решений.
- Все известные на данный момент решения используют идею динамического программирования.
- Разберём два различных решения.

Первое решение

- $F_{n,k}$ – ответ на задачу в случае массива длины n и k отрезков.
- $T_{n,k}$ – количество способов выбрать k отрезков внутри отрезка длины n .
- $T_{n,k} = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^k$.
- Вычислим разницу между $T_{n,k}$ и $F_{n,k}$.

Первое решение (продолжение)

- Переберем клетку, которая окажется самой левой непокрытой.
- Очевидно, что все выбранные отрезки строго левее или строго правее, чем самая левая непокрытая клетка.
- Также можно заметить, что отрезок, находящийся левее самой левой непокрытой клетки, покрыт полностью.

Первое решение (продолжение)

- Значит, количество способов выбрать k отрезков так, чтобы самой левой непокрытой клеткой была клетка номер $i - \sum_{j=1}^k (C_k^j \times F_{i-1,j} \times T_{n-i,k-j})$.
- В приведенной выше формуле j – количество отрезков, которые окажутся левее самой левой непокрытой клетки.

Первое решение (продолжение)

- Итак, итоговая формула:

$$F_{n,k} = T_{n,k} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k C_k^j \times F_{i-1,j} \times T_{n-i,k-j}.$$

- Время работы алгоритма — $O(n^4)$, так как каждое значение $F_{i,j}$ считается за $O(n^2)$.

Второе решение

- Опять же динамическое программирование.
- Рассмотрим первые i клеток.
- $F_{i,j,k}$ - количество способов покрыть первые i клеток так, что в них начинаются j отрезков, а клетку номер i покрывают ровно k отрезков.

Второе решение (продолжение)

- Что мы можем сделать, находясь в состоянии $\langle i, j, k \rangle$?
- Можем начать t новых отрезков.
- Переход:

$$F_{i,j+t,k+t} = F_{i,j+t,k+t} + F_{i,j,k} \times C_{m-j}^t.$$

Второе решение (продолжение)

- Можем закончить t отрезков и перейти в следующую клетку.
- Переход:

$$F_{i+1,j,k-t} = F_{i+1,j,k-t} + F_{i,j,k} \times C_k^t.$$

Второе решение (продолжение)

Несколько важных фактов:

- Чтобы учесть отрезки длины один, выполним сначала все переходы, связанные с добавлением, потом все переходы, связанные с удалением.
- Выполняем переходы аккуратно, чтобы не было непокрытых клеток.

Второе решение (продолжение)

- Множитель S появляется из-за того, что нам важна нумерация отрезков.
- При внимательной реализации можно обойтись двумерным массивом.

Второе решение (продолжение)

- Время работы алгоритма — $O(n^4)$, так как необходимо перебирать количество начинающихся и заканчивающихся отрезков.

- 
- Автор задачи – Павел Кротков
 - Условие – Павел Кротков
 - Подготовка тестов – Павел Кротков
 - Разбор – Демьянюк Виталий

Постановка задачи

- Определим операцию $chg(s)$, где s — строка, так:
 - Если $|s| = 1$, то $chg(s) = s$
 - Иначе разобьем строку s на две одинаковые по длине строки s_1 и s_2 . Тогда
$$chg(s) = chg(s_1) \cdot chg(s_2) \text{ или}$$
$$chg(s) = chg(s_2) \cdot chg(s_1)$$
- Нам даны две строки a и b . Требуется найти такую последовательность конкатенаций в операции chg , что $chg(a) = b$.

Свойства операции *chg*

- Если для строки a и b существует последовательность конкатенаций операции *chg* таких, что $chg(a) = b$, то обозначим это так: $a \rightsquigarrow b$
- Лемма 1 : Из $a \rightsquigarrow b$ следует $b \rightsquigarrow a$
- Лемма 2 : Из $a \rightsquigarrow b$ и $b \rightsquigarrow c$ следует $a \rightsquigarrow c$
- Лемма 3 : Пусть $\min(x)$ такая лексикографически минимальная строка, что: $x \rightsquigarrow \min(x)$. Тогда $a \rightsquigarrow b$ эквивалентно тому, что $\min(a) = \min(b)$

Решение

- Для строк a и b найдем $\min(a)$ и $\min(b)$.
- Поиск $\min(s)$ осуществляется рекурсивно. Сначала найдем $\min(s_1)$ и $\min(s_2)$. Затем сконкатенируем их так, чтобы ответ получился минимальным.
- Время работы $T(n) = 2 \times T\left(\frac{n}{2}\right) + n = O(n \times \log(n))$.
- Если $\min(a) = \min(b)$, то ответ - «Yes», иначе - «No».

Восстановление последовательности конкатенаций

- Во время поиска $\min(a)$ и $\min(b)$ найдем последовательности конкатенаций p_a и p_b , необходимые для получения этих минимумов.
- Используя p_a и p_b , рекурсивно найдем последовательность конкатенаций, необходимую для получения строки b из строки a .

Восстановление последовательности конкатенаций

- $gen(a, b)$ – последовательность конкатенаций необходимых для того, чтобы из a получить b .

- Если $last(p_a) == last(p_b)$, то :

$$gen(a, b) = gen(a_1, b_1) + gen(a_2, b_2) + [0]$$

- Иначе :

$$gen(a, b) = gen(a_1, b_2) + gen(a_2, b_1) + [1]$$

Задача Н

Ребус



- 
- Автор задачи – Антон Банных
 - Условие – Борис Минаев
 - Подготовка тестов – Борис Минаев
 - Разбор – Анна Малова

Постановка задачи

- Дана строка — ребус.
- Необходимо разгадать ребус, то есть удалить ненужные буквы.
- Количество ненужных букв задается апострофами.

Как решать?

- Разобьём исходную строку на слова по пробелам.
- Обрабатываем каждое слово по отдельности.
- Склеим результаты по каждому слову в итоговую строку.

Как решать?

(обработка одного слова)

- Посчитаем количество апострофов в начале (x) и конце слова (y).
- Возьмем подстроку слова, отбросив первые $2x$ и последние $2y$ символов.

Задача I

Племя тив



- 
- Автор задачи – Михаил Дворкин
 - Условие – Демид Кучеренко
 - Подготовка тестов – Николай Ведерников
 - Разбор – Демид Кучеренко

Постановка задачи

- Дан список слов в порядке возрастания.
- Известно, что одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.
- Определить порядок букв.

Как решать?

- Построим ориентированный граф, вершинами которого будут являться буквы.
- Определим, для каких пар букв точно известно, что одна меньше другой.
- Для этого для каждых двух соседних в списке слов одинаковой длины найдем первую слева позицию, в которой они различаются.

Как решать?

- Добавим в наш граф ребро из буквы, стоящей на найденной позиции меньшего слова в букву, стоящую на этой же позиции большего слова.
- Ребро будет обозначать, что буква, из которой выходит ребро меньше буквы, в которую входит это ребро.

Как решать?

- Если в нашем графе появится цикл, то решения нет. Это можно проверить с помощью обхода в глубину.
- Топологически отсортируем полученный граф. Тогда полученное расположение букв будет искомым.
- Потому что все ребра будут идти слева направо, а это значит, что буква, стоящая левее, будет меньше.

Задача J

День Рождения викинга



- 
- Автор задачи – Демид Кучеренко
 - Условие – Антон Ковшаров
 - Подготовка тестов – Антон Ковшаров
 - Разбор – Антон Ковшаров

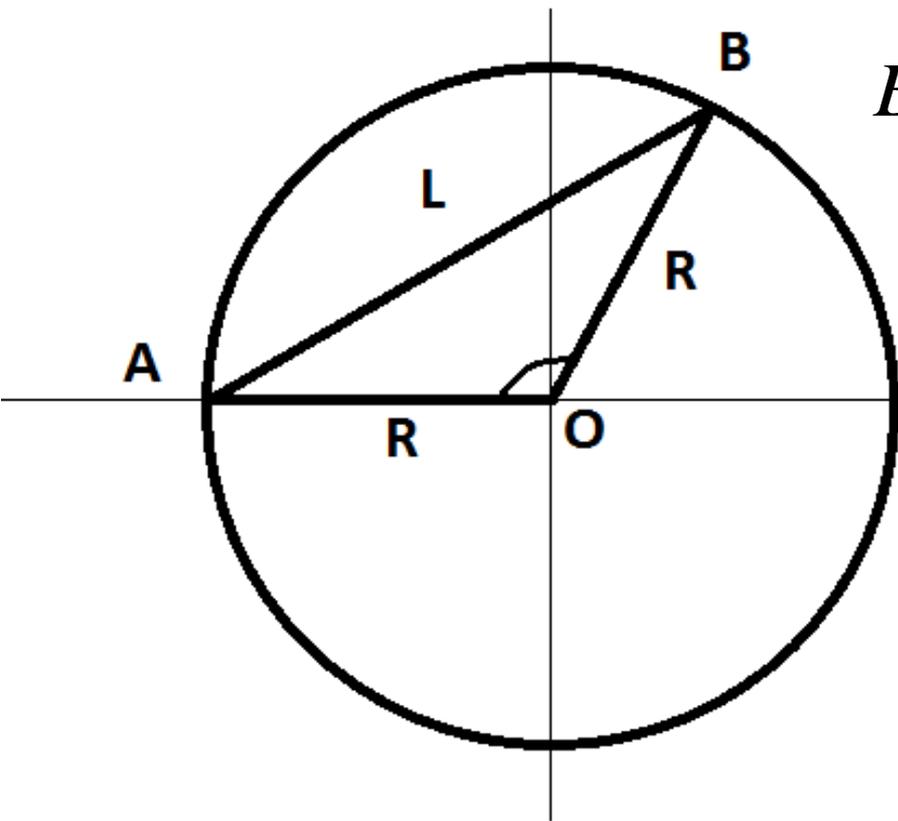
Постановка задачи

- Дан круг радиусом R и отрезок длины L .
- Найти наибольшую хорду, длина которой не превосходит L , и указать координаты пересечения ее с окружностью.

Как решать?

- Так как диаметр – это хорда наибольшей длины, то, если $L \geq 2R$, выведем, например, точки $(-R, 0)$ и $(R, 0)$.
- Иначе будем искать точки пересечения другим образом.

Поиск точек пересечения (первый способ)



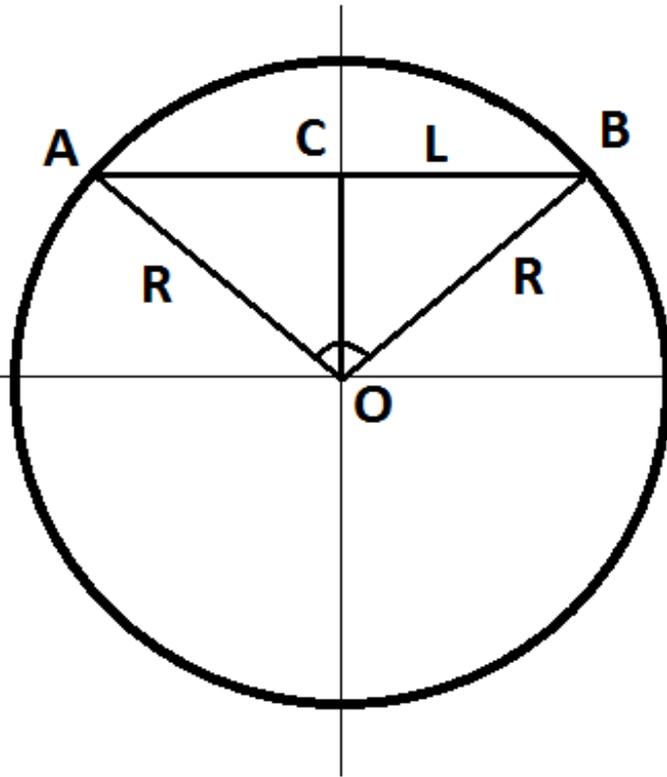
$$B = (-R \cos \angle AOB; R \sin \angle AOB)$$

По теореме косинусов:

$$\cos \angle AOB = \frac{2R^2 - L^2}{2R^2}$$

$$\sin \angle AOB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOB}$$

Поиск точек пересечения (второй способ)

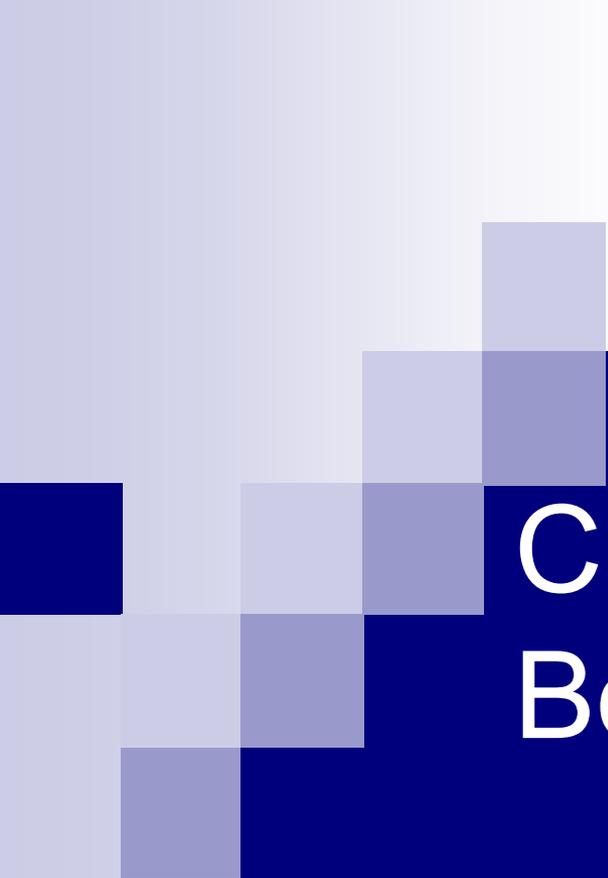


- Из треугольника OBC находим координату y обеих точек:

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

- Абсциссы точек находятся из условия:

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Спасибо за внимание!
Вопросы?

<http://neerc.ifmo.ru/school>