



**HAL**  
open science

## Flots chaînés

Isabelle Abou, Pierre Liardet

► **To cite this version:**

Isabelle Abou, Pierre Liardet. Flots chaînés. Proceedings of the Sixth Congress of Romanian Mathematicians, 2009, Vol. 1, pp.401-432. hal-00871066

**HAL Id: hal-00871066**

**<https://hal.science/hal-00871066>**

Submitted on 31 Oct 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# FLOTS CHAÎNÉS

Isabelle ABOU et Pierre LIARDET \*

## Abstract

We investigate the dynamical structures of flows arising from arithmetic sequences, called chain sequences, computed from digital expansion of integers in a given base. A classical example in base 2 is the sequence  $n \mapsto \alpha s_w(n) \pmod 1$  where  $\alpha$  is irrational and  $s_w(n)$  is the number of occurrences of the binary word  $w$  (not written with the only digit 0) in the binary expansion of  $n$ . We distinguish contractive and non contractive chained sequences. In the above example, the sequence is contractive if  $w$  is of length  $\geq 2$  and non contractive but completely 2-additive mod 1 if  $w = 1$ . The flows associated to such sequences are minimal and uniquely ergodic. In the contractive case the flow is metrically conjugated to a skew product. The non contractive case is more intricated but analogous. In both cases the spectral type of the underlying dynamical system is classified and applications to uniform distribution are given.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Applications chaînées en base <math>q</math></b>	<b>4</b>
2.1	Notations et définitions . . . . .	4
2.2	Propriétés élémentaires des applications chaînées. . . . .	4
2.3	Suites chaînées . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Matrice de transition</b>	<b>7</b>
3.1	Définitions . . . . .	7
3.2	Structure d'une matrice de transition . . . . .	8
3.3	Formules sommatoires . . . . .	11
3.4	Structure des matrices de Hadamard dans le cas abélien . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Dynamique associée à une application chaînée</b>	<b>14</b>
4.1	Système dynamique et mesures spectrales . . . . .	14
4.2	Flot associé à une suite . . . . .	14
4.3	$G$ -extension standard . . . . .	15
4.4	Flots chaînés . . . . .	18
4.4.1	Minimalité de $\mathcal{K}(u)$ . . . . .	18
4.4.2	Flot chaîné d'une suite contractante . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Flots de Cantor</b>	<b>22</b>
5.1	Suites de Toeplitz unilatérales régulières . . . . .	22
5.2	Structure d'un flot de Cantor . . . . .	25

---

\*Recherche effectuée suivant le programme de l'anr nuget

<b>6</b>	<b>Produits croisés</b>	<b>28</b>
6.1	Construction d'un produit croisé et quasi-continuité uniforme . . . . .	28
6.2	Flot d'une suite chaînée périodique . . . . .	29
6.3	Flot d'une suite chaînée contractante . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Opérateurs à poids</b>	<b>34</b>
7.1	Décomposition spectrale . . . . .	34
7.2	Pureté du spectre . . . . .	35
7.3	$D$ -invariance et $D$ -ergodicité . . . . .	36
7.4	Type spectral des opérateurs $V_{u,\chi}$ . . . . .	37
7.5	Rigidité . . . . .	38
<b>8</b>	<b>Dynamique d'une suite chaînée <math>u</math> dans <math>\mathbf{U}</math></b>	<b>40</b>
8.1	Cas d'une suite chaînée $u$ non contractante . . . . .	40
8.1.1	Lemmes préparatoires . . . . .	40
8.1.2	Dynamique d'une suite complètement $q$ -multiplicative . . . . .	42
8.1.3	Cas général d'une suite chaînée non contractante . . . . .	44
8.2	Dynamique d'une suite de Hadamard . . . . .	44
8.3	Dynamique d'une suite chaînée non périodique . . . . .	45

## 1 Introduction

Il existe de nombreuses méthodes de construction de suites  $(u_n)_{n \geq 0}$ , à valeurs dans un groupe donné  $G$ , basées sur les développements digitaux suivant une base entière donnée  $q$  ( $q \geq 2$ ) et qui peuvent se représenter naturellement comme des orbites de systèmes dynamiques mettant en évidence des structures nouvelles. Les suites  $n\alpha \pmod{1}$  et  $n^2\alpha \pmod{1}$  en sont des exemples classiques. La dernière, par exemple, provient de l'orbite de  $(\alpha, 0)$  par la transformation  $T$  du 2-tore  $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$ , définie par  $T(x, y) := (x + 2\alpha, x + y)$  (voir [8]). Citons également les suites automatiques encore dites substitutives du fait de leur mode de construction, les suites  $q$ -multiplicatives (avec  $G = \mathbf{U}$ ) ou  $q$ -additives (ici  $G = \mathbf{R}$ ) ou encore les suites de type "comptage de blocs". Par exemple, une suite  $u$  telle que  $u_n$  égale à 0 ou 1 suivant que le nombre d'occurrences d'un motif donné dans l'écriture de  $n$  en base  $q$  est pair ou impair. Les deux plus connues de ces suites sont, sans doute, la suite dite de Thue-Morse qui donne la parité du nombre de "1" dans l'écriture binaire et celle de Shapiro-Rudin qui donne cette fois-ci la parité du nombre d'occurrences du bloc de chiffres "11". Toutes ces suites ont des propriétés combinatoires et statistiques qui ont conduit à la découverte de propriétés harmoniques et asymptotiques remarquables, et ont donné naissance à des systèmes dynamiques ayant des caractéristiques spectrales surprenantes, liées à la numération sous-jacente. Ces systèmes se présentent comme des produits croisés au-dessus d'un odomètre qui est, dans ce travail, la translation de 1 dans le groupe des entiers  $q$ -adiques. La littérature sur ce sujet est abondante et pour les liens entre la numération et la dynamique, nous renvoyons le lecteur intéressé au survol [2] où il trouvera également une copieuse bibliographie.

Le prototype de suite qui nous intéresse appartient à l'espace, introduit par Wiener [32], des suites de nombres complexes  $a = (a_n)_{n \geq 0}$  telles que les limites  $\gamma_a(m)$  des suites de moyennes  $N^{-1} \sum_{0 \leq n < N} a_{n+m} \overline{a_n}$  existent pour tout entier  $m \geq 0$ . Posons  $\gamma_a(-m) = \overline{\gamma_a(m)}$ . La suite  $m \mapsto \gamma_a(m)$  (définie sur  $\mathbf{Z}$ ), est appelée suite des corrélations de  $a$ . Elle est définie positive. D'après le théorème de Bochner-Herglotz, elle est la transformée de Fourier d'une

mesure borélienne  $\nu_a$  sur  $\mathbf{U}$ , dite mesure spectrale de  $a$ . Classiquement,  $\nu_a$  est la limite faible de la suite des mesures ayant une densité, par rapport à la mesure de Lebesgue, égale à  $z \mapsto \frac{1}{N} \left| \sum_{0 \leq n < N} a_n z^n \right|^2$ .

Dans tout l'article,  $G$  désigne un groupe compact métrisable auquel nous associons un système complet  $\Lambda(G)$  de représentations irréductibles unitaires  $\rho$  non constantes. Celles-ci sont de dimensions finies, notées  $s_\rho$ , et sans nuire à la généralité, nous supposons que l'espace de Hilbert associé à  $\rho$  est l'espace hermitien usuel  $\mathbf{C}^{s_\rho}$  (de norme notée simplement  $\|\cdot\|$ ) dont le groupe des matrices unitaires sera noté  $\mathbf{U}_{s_\rho}$ . Le groupe  $G$  sera équipé de sa mesure de Haar, notée  $h_G$ .

Le sujet de cet article est l'étude, d'un point de vue ergodique, d'applications dites chaînées, introduites dans [1], dont certaines correspondent à des suites automatiques ou à des suites de comptage par blocs. La section 2 fixe notations et conventions concernant les mots, donne la définition d'une application chaînée et de la suite chaînée associée. Plusieurs exemples illustrent la définition. Dans la section 3, la relation de factorisation vérifiée par une application chaînée est utilisée pour mettre en évidence une matrice dite de transition, à coefficients dans  $G$ , qui joue un rôle prépondérant et permet de définir, lorsque  $G$  est compact, les notions d'applications chaînées contractantes et parmi elles les applications chaînées de Hadamard. Lorsque l'application chaînée  $f$  est contractante, les propriétés des valeurs moyennes de  $f$  portant sur l'ensemble des mots de longueur fixée, établies dans [1], sont rappelées et accompagnées de quelques compléments.

À toute suite  $u$  dans un espace métrisable compact est associée son orbite fermée  $K_u$  suivant l'opérateur de décalage (ou shift). Celui-ci laisse  $K_u$  invariant, définissant ainsi le flot  $\mathcal{K}(u)$  associé à  $u$ . Le cas où la suite est à valeurs dans un groupe compact est étudié en particulier dans la section 4. Les suites chaînées permettent d'introduire la définition de flots chaînés dont on montre qu'ils sont minimaux. L'unique ergodicité de ces flots est tout d'abord démontrée dans le cas des suites chaînées contractantes. Cette étude se poursuit tout au long des sections suivantes où l'on recherche sous quelles conditions le flot chaîné est métriquement isomorphe à un système dynamique défini comme un produit croisé au dessus de l'odomètre  $q$ -adique (translation  $\tau : x \rightarrow x + 1$  dans le groupe  $\mathbf{Z}_q$  des entiers  $q$ -adiques). Dans ce but, étant donnée une suite chaînée  $u$  à valeurs dans un groupe compact, la dynamique associée à la suite des accroissements  $\Delta u : n \mapsto u_n^{-1} u_{n+1}$  est étudiée, ce qui conduit à développer, dans la section 5, la notion générale de flots de Cantor associés aux suites constantes sur les éléments d'une partition de  $\mathbf{N}_0$  qui sont des progressions arithmétiques (suites de Toeplitz).

Dans la section 6, la notion générale de produit croisé dans le cadre de cette étude est introduite. Après avoir caractérisé les cas où la suite chaînée est périodique, le flot d'une suite chaînée contractante est identifié au produit croisé signalé plus haut. Les premières propriétés spectrales de ce flot sont données (théorème 6.3) avec des applications mettant en jeu plusieurs bases de numération premières entre elles. La section 7 est consacrée à une étude plus fine sur la nature du spectre des produits croisés provenant des suites chaînées. Cela fait intervenir certains opérateurs à poids dont le type spectral est pur. Il est soit discret, soit singulier continu, soit Lebesgue. À cette occasion, des propriétés de  $\zeta$ -rigidité (section 7.3) le long de temps rigides pour l'odomètre sous-jacent sont établies pour ces opérateurs; elles permettent de conclure, dans certains cas, à la disjonction spectrale de ces opérateurs.

La dernière section rassemble les résultats établis dans les sections précédentes pour décrire complètement la dynamique d'une suite chaînée à valeurs dans le groupe des nombres com-

plexes de module 1. Le cas des suites non contractantes est traité en premier et plus particulièrement lorsque la suite est complètement multiplicative en base  $q$ . On retrouve et approfondit ce qui a été fait dans [10]. Le cas où la suite chaînée est de Hadamard méritait une attention particulière, son type spectral étant la somme du type spectral de l'odomètre  $q$ -adique et de la mesure de Lebesgue. L'étude de la situation générale du cas non périodique avec une hypothèse naturelle, accompagnée d'un exemple typique, termine ce travail.

## 2 Applications chaînées en base $q$

### 2.1 Notations et définitions

Introduisons l'ensemble des chiffres  $\mathcal{A} := \{0, 1, \dots, q-1\}$ , lequel sera muni de son ordre naturel. Les éléments de  $\mathcal{A}$  seront aussi considérés comme des lettres et  $\mathcal{A}$  comme un alphabet. Le monoïde des mots sur l'alphabet  $\mathcal{A}$  sera noté  $\mathcal{A}^*$  et le mot vide sera noté  $\wedge$ . La longueur d'un mot  $w$ , ou encore le nombre de lettres constituant un mot  $w$ , sera notée  $|w|$ ; en particulier  $|\wedge| = 0$ . La concaténation de  $m$  copies de  $w$  sera notée  $w^{(m)}$ . Par définition,  $w^{(0)} = \wedge$ . L'application d'effacement  $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$  est définie par  $\sigma(\wedge) = \wedge$  et  $\sigma(aw) = w$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et  $w \in \mathcal{A}^*$ .

Introduisons quelques conventions supplémentaires. L'ensemble des entiers naturels (zéro exclu) sera noté  $\mathbf{N}$  tandis que  $\mathbf{N}_0$  désignera l'ensemble des entiers rationnels positifs ou nuls et  $\mathbf{Z}$  représentera l'anneau des entiers rationnels. Dans la suite, sauf mention du contraire, la loi d'un groupe  $G$  sera notée multiplicativement et  $1_G$  désignera l'élément neutre. Si  $G$  est explicitement un groupe abélien, la loi sera alors préférentiellement notée additivement, sauf dans le cas du groupe  $\mathbf{U}$  des nombres complexes de module 1 ou de ses sous-groupes.

**Définition 2.1.** *Une application  $f : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  est dite chaînée sur  $\mathcal{A}$  ou en base  $q$ , si  $f(\wedge) = 1_G$  et si pour toute lettres  $a$  et  $b$  dans  $\mathcal{A}$  et tout mot  $w$  dans  $\mathcal{A}^*$  on a l'égalité*

$$f(abw) = f(ab)f(b)^{-1}f(bw). \quad (1)$$

Lorsque  $G$  est abélien, la relation (1) s'écrit additivement  $f(abw) = f(ab) - f(b) + f(bw)$ . Si l'alphabet  $\mathcal{A}$  est fixé, la référence à l'alphabet pour une application chaînée sera souvent omise.

### 2.2 Propriétés élémentaires des applications chaînées.

La formule (1) donne facilement

$$f(a_1 a_2 \cdots a_s w) = f(a_1 a_2) f(a_2)^{-1} \cdots f(a_{s-1} a_s) f(a_s)^{-1} f(a_s w) \quad (2)$$

pour toutes lettres  $a_1, \dots, a_s$  et tout mot  $w$  dans  $\mathcal{A}^*$ , ainsi que la formule générale

$$f(\alpha\beta\gamma) = f(\alpha\beta)f(\beta)^{-1}f(\beta\gamma), \quad (3)$$

vérifiée pour tous mots  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathcal{A}^*$ , mais avec  $\beta \neq \wedge$ . En complément, l'application chaînée est dite régulière à gauche (resp. à droite) si  $f(0w) = f(w)$  (resp.  $f(w0) = f(w)$ ) pour tout mot  $w$  dans  $\mathcal{A}^*$ , et  $f$  est dite régulière si elle est à la fois régulière à gauche et à droite.

Notons que la régularité (à gauche ou à droite) entraîne les égalités  $f(u0v) = f(u0^{(m)}v)$  pour tout  $m \in \mathbf{N}$  et tous les mots  $u, v$ .

Soit  $r$  un entier strictement positif et  $\mathcal{D} := \mathcal{A}^r$  l'ensemble des mots de longueur  $r$ . Cet ensemble peut être utilisé comme alphabet. Chaque mot dans  $\mathcal{D}^*$  s'identifie alors canoniquement à un mot de  $\mathcal{A}^*$ . Soit  $w = w_{s-1}w_{s-2}\cdots w_0$  un mot de longueur  $s$  sur l'alphabet  $\mathcal{A}$  et  $s = ru + v$  la division euclidienne de  $s$  par  $r$ . Si  $v = 0$ , la factorisation de  $w$  en un produit de mots de l'alphabet  $\mathcal{D}$  donne le mot  $\bar{w} = (w_{s-1}w_{s-2}\cdots w_{s-r})\cdots(w_{r-1}\cdots w_0)$  sur  $\mathcal{D}$ . Si  $v \neq 0$ , prolongeons  $w$  vers la gauche en le mot  $0^{(r-v)}w$  et posons par définition  $\bar{w} := 0^{(r-v)}w$ . Les mots dans  $\mathcal{A}^*$  seront ordonnés généalogiquement (c'est-à-dire ordonnés par leur longueur puis, pour les mots de même longueur, ordonné alphabétiquement); de même,  $\mathcal{D}$  sera ordonné généalogiquement (donc ici lexicographiquement) ainsi que  $\mathcal{D}^*$ . L'application  $w \mapsto \bar{w}$  identifie  $\mathcal{A}^*$  dans  $\mathcal{D}^*$  et préserve l'ordre généalogique. Une application chaînée sur  $\mathcal{D}$  se définit comme ci-dessus. La relation (3) montre que toute application chaînée sur  $\mathcal{A}$  peut aussi être considérée comme une application chaînée sur  $\mathcal{D}$ .

**Exemple 1.** *Applications complètement multiplicatives.* Un morphisme de monoïde  $f : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  est encore appelé application complètement multiplicative si  $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$  pour tous mots  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathcal{A}^*$  et si  $f(0) = 1_G$ . Une telle application est de manière évidente chaînée; elle est régulière (à gauche et à droite). L'adjectif "multiplicatif" est remplacé par "additif" lorsque la loi du groupe est notée additivement. C'est le cas de la fonction somme-des-chiffres  $s_q : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{Z}$  définie par  $s_q(a_1 \cdots a_s) = \sum_{j=1}^s a_j$ .

**Exemple 2.** Soient les applications préfixe  $p : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A} \cup \{\wedge\}$  et suffixe  $s : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A} \cup \{\wedge\}$  définies respectivement par  $p(\wedge) = s(\wedge) = \wedge$  et  $p(a_1 \cdots a_n) = a_1$ ,  $s(a_1 \cdots a_n) = a_n$ . Alors, pour toute application  $g : \mathcal{A} \cup \{\wedge\} \rightarrow G$  telle que  $g(\wedge) = 1_G$ , les applications  $g \circ p$  et  $g \circ s$  sont chaînées sur  $\mathcal{A}$ .

**Exemple 3.** Soit  $L$  un entier au moins égal à 1 et  $F : \mathcal{A}^{L+1} \rightarrow \mathbf{R}$  une application telle que  $F(0^{(L+1)}) = 0$ . Introduisons l'application  $k$ -préfixe  $p_k : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^k \cup \{\wedge\}$  qui à tout mot de longueur supérieure ou égale à  $k$  associe son préfixe de longueur  $k$  et associe le mot vide aux autres mots. La fonction  $s_F : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{R}$  associée à  $F$  et définie par

$$s_F(a_1 \cdots a_s) := s_F(0^L a_1 \cdots a_s 0^L) = \sum_{0 \leq j < s+L} F \circ p_{L+1} \circ \sigma^j(0^L a_1 \cdots a_s 0^L) \quad (4)$$

est appelée bloc-fonction ou encore fonction de comptage par bloc et sont à la base de la définition de suites digitales au sens de [5]. Le groupe additif  $\mathbf{R}$  dans cette définition peut être remplacé par un quelconque groupe abélien  $G$ . L'application  $s_F$  vérifie l'égalité  $s_F(w) = s_F(0^m w 0^n)$  pour tout couple d'entiers  $(m, n)$  et tout mot  $w \in \mathcal{A}^*$ .

**Proposition 2.1.** *Soit  $t$  un entier positif. La fonction de comptage par bloc  $s_F$  définie en (4) et restreinte à l'ensemble  $(\mathcal{A}^t)^*$  des mots sur  $\mathcal{A}$ , provenant des mots sur l'alphabet  $\mathcal{A}^t$ , est chaînée régulière sur  $\mathcal{A}^t$  si  $t \geq L$ .*

*Démonstration.* Par examen direct  $f(0^t \alpha \beta w 0^t) = f(0^t \alpha \beta 0^t) - f(0^t \beta 0^t) + f(0^t \beta w)$  ce qui montre que  $f$  est chaînée sur l'alphabet  $\mathcal{A}^t$ . ■

**Applications chaînées et automates.** À une application chaînée  $f$  associons l'ensemble

$$E := \{(a, f(aw)) \in \mathcal{A} \times G; w \in \mathcal{A}^*\} \cup \{(\wedge, 1_G)\} \quad (5)$$

et les applications  $\phi_a : E \rightarrow E$  ( $a \in \mathcal{A}$ ) définies par  $\phi_a(b, \gamma) = (a, f(ab)f(b)^{-1}\gamma)$ . Cette définition est légitime puisque  $\phi_a(E) \subset E$  d'après (3). En utilisant (2), on obtient pour tout mot  $a_1 \dots a_n$  dans  $\mathcal{A}^*$  la formule de composition

$$\phi_{a_1} \circ \dots \circ \phi_{a_n}(\wedge, 1_G) = (a_1, f(a_1 \dots a_n)). \quad (6)$$

Les applications chaînées à valeurs dans un groupe fini  $G$  sont particulièrement intéressantes. Elles correspondent à des applications *automatiques* comme le précise le théorème suivant :

**Théorème 2.1.** *Soit  $G$  un groupe fini et soit  $f : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  une application chaînée sur  $\mathcal{A}$ . Alors il existe un  $q$ -automate qui reconnaît les langages  $f^{-1}(\{g\})$  ( $g \in G$ ).*

*Démonstration.* L'ensemble  $E$  défini en (5) est fini. Considérons alors l'automate déterministe suivant :  $E$  est l'ensemble de ses états,  $(\wedge, 1_G)$  est son état initial ; la fonction de sortie, de  $E$  vers  $G$ , est l'application  $(a, g) \mapsto g$  et les instructions associées aux lettres  $a$  de l'alphabet  $\mathcal{A}$  sont les applications  $\phi_a : E \rightarrow E$  définies ci-dessus. Il est clair par (6) que cet automate reconnaît les langages  $f^{-1}(\{g\})$  pour tout  $g$  de  $G$ . ■

### 2.3 Suites chaînées

L'alphabet  $\mathcal{A} := \{0, 1, \dots, q-1\}$  est fixé avec  $q \geq 2$ . Rappelons que tout entier positif ou nul  $n$  s'écrit de manière unique sous la forme  $n = \sum_{k \geq 0} e_k(n)q^k$  où chaque  $e_k(n)$ , appelé chiffre au rang  $k$ , appartient à  $\mathcal{A}$ . La somme qui donne  $n$  ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls ce qui permet de définir la taille de  $n \neq 0$  (en base  $q$ ) par  $t(n) := \max\{k \geq 0; e_k(n) \neq 0\}$  et  $t(0) = 0$  par définition. À chaque  $n$ , nous associons le mot  $\tilde{n} = e_t(n) \dots e_0(n)$  et réciproquement, à chaque mot  $w = w_{s-1} \dots w_0$  dans  $\mathcal{A}^*$ , de longueur  $s > 0$ , nous associons l'entier  $\dot{w} = q^{s-1}w_{s-1} + \dots + qw_1 + w_0$ ; pour le mot vide, convenons de poser  $\dot{\wedge} = 0$ . De manière évidente l'application  $n \mapsto \tilde{n}$ , définie sur  $\mathbf{N}_0$ , est injective.

**Définition 2.2.** *Une suite  $u : n \mapsto u_n$  ( $n \in \mathbf{N}_0$ ) à valeurs dans  $G$  est dite chaînée (sous-entendu en base  $q$ ) s'il existe une application chaînée  $f_u : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  sur  $\mathcal{A}$  (régulière à gauche par défaut) telle que  $u_n = f_u(\tilde{n})$  pour tout entier  $n \geq 1$ .*

**Exemple 4.** Une suite  $u : n \mapsto u_n$  est dite complètement  $q$ -multiplicative si pour tout  $a \in \{0, 1, \dots, q-1\}$  et tout  $m \in \mathbf{N}_0$ , on a  $u_{a+qm} = u_a u_m$ . Elle est donc déterminée par une application chaînée complètement multiplicative.

**Exemple 5.** Soit  $ab \in \mathcal{A}^2$  tel que  $ab \neq 00$  et  $L \geq 1$  et  $F_{ab}^{(L)} : \mathcal{A}^{L+1} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $F_{ab}^{(L)}(a_0 \dots a_L) = 1$  si  $a_0 a_L = ab$  et 0 sinon. L'application  $s_{F_{ab}^{(L)}}$  est chaînée sur l'alphabet  $\mathcal{A}^L$ ; elle est régulière à droite et à gauche. Pour  $L = 1$  et  $q = 2$ , posons  $s_{11}(\cdot) := s_{F_{11}^{(1)}}(\cdot)$ ; la suite chaînée  $n \mapsto (-1)^{s_{11}(\tilde{n})}$  correspond à la suite classique de Rudin-Shapiro.

**Exemple 6.** Soit  $v = v_L \dots v_0$  un mot sur l'alphabet  $\mathcal{A}$  de longueur  $L+1$  distinct de  $0^{(L+1)}$ . L'application  $Z_v$  qui à tout mot  $w$  sur l'alphabet  $\mathcal{A}$  compte le nombre d'occurrences de  $v$  dans le mot  $0^{(L)}w$ , introduite dans [1], diffère de  $s_{\mathbf{1}_{\{v\}}}$  par un effet de bord à droite. Plus précisément, pour tout mot  $w$  sur  $\mathcal{A}$ , on a  $s_{\mathbf{1}_{\{v\}}}(w) - Z_v(w) = \varphi_v(w)$  où  $\varphi_v(w)$  est égale au nombre d'occurrence de  $v$  dans le suffixe de longueur  $2L$  du mot  $0^L w 0^L$ . Les suites  $n \mapsto s_{\mathbf{1}_{\{v\}}}(\tilde{n})$  et  $n \mapsto Z_v(\tilde{n})$  diffèrent donc de la suite  $n \mapsto \varphi_v(\tilde{n})$  qui est périodique de période  $q^L$ .

### 3 Matrice de transition

La notion suivante introduite dans [1] est fondamentale. Elle se retrouve également dans [3] où les auteurs considèrent des “block-functions”.

#### 3.1 Définitions

Soit une application chaînée  $f : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  (sur  $\mathcal{A}$ ) quelconque. La formule du produit (2) montre que  $f$  est déterminée par les valeurs initiales  $f(a)$  ( $a \in \mathcal{A}$ ) et les produits  $f(ab)$  ou les  $f(ab)f(b)^{-1}$ , d’où la définition suivante :

**Définition 3.1.** *La matrice carrée  $T$  à coefficients dans  $G$  définie par  ${}^aT_b = f(ab)f(b)^{-1}$  ( $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ) est appelée matrice de transition de  $f$ .*

Complétons les définitions et notations relatives aux matrices à coefficients dans un groupe  $\Gamma$ . Soit  $M = ({}^iM_j)_{0 \leq i < m, 0 \leq j < n}$  une telle matrice ( $i$  étant l’indice de ligne et  $j$  l’indice de colonne). Introduisons la matrice *conjuguée*  $({}^j\bar{M}_i)_{0 \leq j < n, 0 \leq i < m}$  de  $M$  par  ${}^j\bar{M}_i = ({}^iM_j)^{-1}$ . Pour tout  $\gamma$  de  $\Gamma$  notons  $\gamma \otimes M$  (resp.  $M \otimes \gamma$ ) la matrice de coefficients  $\gamma^i M_j$  (resp.  ${}^i M_j \gamma$ ). Plus généralement, si  $N = ({}^kN_l)_{0 \leq k < r, 0 \leq l < s}$  est une autre matrice à coefficients dans  $\Gamma$ , la matrice  $M \otimes N$  désignera la matrice de taille  $ms \times nr$ , dite produit tensoriel de Kronecker, de coefficients  ${}^{ik}(M \otimes N)_{jl} = {}^iM_j {}^kN_l$ . Les indexations à doubles indices (ou mots de longueur 2) telles que  $ik$ , avec ici  $0 \leq i < m$  et  $0 \leq k < r$  sont ordonnées lexicographiquement, ce qui revient à identifier  $ik$  avec l’entier  $i + km$  de  $\{0, 1, \dots, mr - 1\}$ . La loi  $\otimes$  est associative et  $\bar{M} \otimes \bar{N} = \overline{M \otimes N}$ . Signalons que pour la norme quadratique d’opérateur,  $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$ . La puissance  $L$ -ième de  $A$  pour le produit de Kronecker sera notée  $A^{(L)}$ .

**Proposition 3.1.** *Soient  $f : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  chaînée, de matrice de transition  $T$ ,  $g : \mathcal{A} \cup \{\wedge\} \rightarrow G$  une application telle que  $g(\wedge) = 1_G$ ,  $p(\cdot)$ ,  $s(\cdot)$  les applications préfixe et suffixe de l’exemple (2). Alors,*

- (i)  $f \cdot (g \circ s) : w \mapsto f(w)g(s(w))$  est chaînée de matrice de transition  $T_{f \cdot g \circ s} = T$  ;
- (ii)  $(g \circ p) \cdot f : w \mapsto g(p(w))f(w)$  est chaînée, de matrice de transition

$${}^i(T_{g \circ p \cdot f})_j = g(i) {}^i T_j g(j)^{-1} \quad (0 \leq i, j \leq q - 1);$$

- (iii)  $f_c : w \mapsto f(wc)$  est chaînée de matrice de transition  $T_{f_c} = T$  ;
- (iv)  ${}^c f : w \mapsto f(cw)$  est chaînée de matrice de transition  $T_{{}^c f}$  de coefficients

$${}^a(T_{{}^c f})_b = ({}^c T_a) {}^a T_b ({}^c T_b)^{-1}.$$

*Démonstration.* Les propriétés (i) et (ii) s’obtiennent facilement. La relation (3) donne, pour tous mots  $\alpha, \beta \neq \wedge$  et  $\gamma$ , l’égalité  $f(\alpha\beta)f(\beta)^{-1} = f(\alpha\beta c)f(\beta c)^{-1}$  d’où  $f(c\alpha\beta\gamma) = f_c(\alpha\beta\gamma) = f_c(\alpha\beta)f_c(\beta)^{-1}f_c(\beta\gamma)$ , ce qui démontre (iii). De même

$$f(\beta)^{-1}f(\beta\gamma) = f(c\beta)^{-1}f(c\beta\gamma)$$

de sorte que  $f(c\alpha\beta\gamma) = {}^c f(\alpha\beta\gamma) = {}^c f(\alpha\beta) {}^c f(\beta) {}^c f(\beta\gamma)$  d’où (iv) après la vérification que  ${}^c f(ab) {}^c f(b)^{-1} = ({}^c T_a) {}^a T_b ({}^c T_b)^{-1}$ . ■

Nous allons maintenant modifier la fonction chaînée  $f$  de manière à lui associer une fonction chaînée régulière. Dans ce but, introduisons la définition suivante (cf. [1]).

**Définition 3.2.** La matrice carrée  $T^*$  de coefficients

$${}^a T_b^* := {}^0 T_0 ({}^a T_0)^{-1} ({}^a T_b) ({}^0 T_b)^{-1}$$

(égale à  $f(00)f(a0)^{-1}f(ab)f(0b)^{-1}$ ) est appelée matrice de transition normalisée de  $f$ . En particulier  ${}^0 T_b^* = 1_G$  et  ${}^a T_0^* = 1_G$ .

Le résultat suivant justifie l'introduction de  $T^*$ .

**Théorème 3.1.** Soit  $f : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  une fonction chaînée de matrice de transition  $T$ . La fonction chaînée  $f^* : \mathcal{A}^* \rightarrow G$ , définie par  $f^*(ij) = f(00)f(i0)^{-1}f(ij)f(00)^{-1}$  et  $f^*(j) = f(0j)f(00)^{-1}$ , est régulière (à gauche et à droite). Sa matrice de transition est égale à  $T^*$ .

*Démonstration.* L'application  $f^*$  se construit à partir de la formule du produit. Précisément  $f^*(a_1 a_2 \cdots a_s) = (f^*(a_1 a_2) f^*(a_2)^{-1}) (f^*(a_2 a_3) f^*(a_3)^{-1}) \cdots (f^*(a_{s-1} a_s) f^*(a_s)^{-1}) f^*(a_s)$ . Il est alors immédiat que  $f^*$  est régulière à gauche et à droite. Un simple calcul donne bien

$$f^*(ij) f^*(j)^{-1} = {}^i T_j^*.$$

■

### 3.2 Structure d'une matrice de transition

Rappelons que  $\Lambda(G)$  est au plus dénombrable (fini si  $G$  est fini). Pour toute représentation (finie)  $\rho$  de  $G$  et toute application chaînée  $f : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  de matrice de transition  $T$ , l'application composée  $\rho \circ f$  est aussi une application chaînée dont la matrice de transition, notée  $\rho T$ , est donnée par  ${}^a (\rho T)_b = \rho({}^a T_b)$ . La matrice  $\rho T$  peut être vue comme une matrice carrée  $q \times q$ , à coefficients dans le groupe des isométries de  $\mathbf{U}_{s_\rho}$  ou comme matrice carrée  $q s_\rho \times q s_\rho$ .

Pour tout endomorphisme  $L$  de  $\mathbf{C}^s$  (i.e. une matrice carrée  $s \times s$ ), son adjoint sera noté  $\bar{A}$  et  $\|L\|$  désignera sa norme quadratique (d'opérateur), c'est-à-dire  $\|L\| := \max\{\|LX\|; X \in \mathbf{C}^s \ \& \ \|X\| = 1\}$ . Le nombre  $\|L\|$  est aussi la racine carrée de la plus grande des valeurs propres de la matrice  $\bar{L}L$ . Les matrices qui nous intéressent ici sont de la forme  $L = \rho T$ , que l'on peut représenter par la matrice de blocs

$$L = \begin{pmatrix} {}^0 L_0 & \cdots & {}^0 L_{q-1} \\ \vdots & & \vdots \\ {}^{q-1} L_0 & \cdots & {}^{q-1} L_{q-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

où les matrices  ${}^i L_j$  sont unitaires de rang  $s_\rho$ . Soit  $\mathcal{E} = (\text{End}(\mathbf{C}^{s_\rho}))^q$  l'espace des vecteurs colonnes  $X$  de composantes  ${}^i X$  (dans  $\text{End}(\mathbf{C}^{s_\rho})$ ). Ainsi,  $X$  est vu comme un opérateur matriciel de  $\mathbf{C}^s$  dans  $(\mathbf{C}^s)^q$  tel que pour tout vecteur colonne  $x$  de  $\mathbf{C}^s$ , la  $j$ -ième coordonnée de  $Xx$  est donnée par  $({}^j X)x$ . L'espace  $\mathcal{E}$  sera équipé de la norme quadratique des opérateurs donnée par

$$\|X\| = \max\{(\|{}^1 Xx\|^2 + \cdots + \|{}^q Xx\|^2)^{1/2}; x \in \mathbf{C}^{s_\rho} \ \& \ \|x\| = 1\}.$$

La matrice de blocs  $L$  sera identifiée à un endomorphisme de  $\mathcal{E} = (\text{End} \mathbf{C}^{s_\rho})^q$  (lui-même identifié à un endomorphisme de  $(\mathbf{C}^{s_\rho})^q$ ), les normes d'opérateur et quadratique suivant les cas d'interprétation coïncident puisque

$$\|L\| = \max\{\|LX\|; X \in \mathcal{E} \ \& \ \|X\| = 1\} = \max\{\|L\xi\|; \xi \in (\mathbf{C}^s)^q \ \& \ \|\xi\| = 1\} \quad (8)$$

avec  $\|X\| = \max\{(\|{}^1Xx\|^2 + \dots + \|{}^qXx\|^2)^{1/2}; x \in \mathbf{C}^{s\rho} \text{ \& } \|x\| = 1\}$ . Elles vérifient alors les inégalités fondamentales

$$\sqrt{q} \leq \|L\| \leq q, \quad (9)$$

du fait que les matrices  ${}^iL_j$  sont unitaires. Il est utile de classifier ces matrices dans les situations extrêmes  $\|L\| = \sqrt{q}$  et  $\|L\| = q$ , ce qui a été fait dans [1] (Lemma 2.1). Rappelons les résultats.

**Lemme 3.1.** *Soit  $L$  un endomorphisme de  $\mathcal{E} = (\text{End } \mathbf{C}^s)^q$  représenté par la matrice (7) où les coefficients sont des matrices unitaires de rang  $s$ . Alors,*

- (a)  $\|L\| = \sqrt{q}$  si, et seulement si,  $\bar{L}L = qI$  ( $I$  désignant la matrice unité de rang  $qs$ );
- (b)  $\|L\| = q$  si, et seulement si, il existe des matrices unitaires  ${}^1S, \dots, {}^qS, {}^1U, \dots, {}^qU$  opérant sur  $\mathbf{C}^s$  et des matrices unitaires  ${}^iB_j$  ( $1 \leq i, j \leq q$ ) de rang  $s - 1$ , telles que pour tous les couples d'indices  $(i, j)$ , on ait

$$\bar{i}S {}^iL_j {}^jU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Ce lemme est la source des définitions suivantes et des théorèmes de majorations qui suivent :

**Définition 3.3.** *Une matrice carrée  $T$ , de taille  $q \times q$ , à coefficients dans le groupe  $G$  est dite contractante (resp. de Hadamard) si pour toute représentation  $\rho$  dans  $\Lambda(G)$ , on a  $\|\rho T\| < q$  (resp.  $\|\rho T\| = \sqrt{q}$ ).*

Pour toute représentation de dimension finie  $\rho$  de  $G$ , on a  $\rho(\bar{T}) = \overline{\rho T}$ , et dans le cas où  $T$  est la matrice de transition d'une application chaînée  $f : \mathcal{A}^* \rightarrow G$ , on déduit de (8) les égalités successives

$$\|\rho T\| = \|(\rho(f(ij)))_{ij \in \mathcal{A}^2}\| = \|\rho T^*\| = \|(\rho(f^*(ij)))_{ij \in \mathcal{A}^2}\|.$$

Le passage de  $f$  à  $f^*$  ne change donc pas le caractère contractant ou de Hadamard de la matrice de transition.

**Définition 3.4.** *Soit  $T$  la matrice de transition d'une application chaînée  $f$ . Si  $T$  est contractante (resp. de Hadamard), l'application  $f$  et la suite chaînée associée seront dites contractantes (resp. de Hadamard).*

**Exemple 7.** Revenons sur l'exemple de la suite  $n \mapsto s_{F_{ab}^{(L)}}(\tilde{n})$  chaînée en base  $2^L$  avec  $ab = 11$ .

La suite  $R_{11,\alpha}^{(L)} : n \mapsto \exp(2i\pi\alpha F_{11}^{(L)}(n))$  est chaînée en base  $q^L$ . Pour  $L = 1$ , la matrice de transition est

$$T_{11,\alpha} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix},$$

avec  $\eta = e^{2i\pi\alpha}$ , sa norme quadratique étant  $\|T_{11,\alpha}\| = 2^{1/2}(1 + |\cos(\pi\alpha)|)^{1/2}$ . Pour  $L > 1$ , la matrice de transition  $T_{11,\alpha}^{(L)}$  est la puissance  $L$ -ième de Kronecker de  $T_{11,\alpha}$ , de sorte que  $\|T_{11,\alpha}^{(L)}\| = \|T_{11,\alpha}\|^L$ . Lorsque  $\alpha = 1/2$ , on retrouve les matrices classiques de Hadamard sur  $\{-1, 1\}$  (pour plus de détails, voir [1]).

**Exemple 8.** Plus généralement, supposons  $\mathcal{A}$  muni d'une structure de groupe abélien (d'élément neutre 0),  $a \mapsto \chi_a$  un isomorphisme entre  $\mathcal{A}$  et son groupe dual  $\widehat{\mathcal{A}}$  et soit  $u$  une suite chaînée de matrice de transition

$$T_{\mathcal{A}} := (\chi_a(b))_{ab \in \mathcal{A}^2}. \quad (10)$$

Par construction  $\overline{T_{\mathcal{A}}} T_{\mathcal{A}} = qI$ . Ici  $G = \mathbf{U}_N$ , le groupe des racines  $N$ -ièmes de l'unité, où  $N$  est le plus petit commun multiple des ordres des éléments de  $\mathcal{A}$  (et cet ordre est celui d'un élément de  $\mathcal{A}$ , donc  $N$  divise  $q$ ). Si  $\mathcal{A}' = \{0, \dots, q' - 1\}$  est un autre alphabet muni, comme pour  $\mathcal{A}$ , d'une structure de groupe abélien, la matrice de transition correspondante à l'alphabet  $\mathcal{B} := \mathcal{A} \times \mathcal{A}'$  (muni de la structure de groupe produit) est donnée par le produit de Kronecker  $T_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{A}} \otimes T_{\mathcal{A}'}$ . On construit ainsi, par itération, des matrices de transitions

$$T_{\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_r} = T_{\mathcal{A}_1} \otimes \dots \otimes T_{\mathcal{A}_r}. \quad (11)$$

Pour le groupe produit  $\mathcal{A}^L$ , la matrice  $T_{\mathcal{A}^L}$  correspond à la  $L$ -ième puissance de Kronecker  $(T_{\mathcal{A}})^{(L)}$ . Elle est donc de Hadamard si et seulement si  $T_{\mathcal{A}}$  est de Hadamard. Examinons de près cette situation. Soit  $\psi_n : z \mapsto z^n$  un caractère non trivial de  $U_N$  ( $1 \leq n < N$ ). Puisque  $T_{\mathcal{A}}$  est de Hadamard,  $(\overline{\psi_n T_{\mathcal{A}}})(\psi_n T_{\mathcal{A}}) = qI$ , ce qui équivaut à tous les caractères  $\psi_n \circ \chi_a$ ,  $0 \leq a < q$ , distincts. Il en résulte que tout caractère non trivial de  $\mathcal{A}$  est d'ordre  $N$ . Maintenant, Si  $\mathcal{A}$  est cyclique, le résultat obtenu implique que  $q$  est un nombre premier et  $q = N$ , et il est immédiat de voir que la matrice de transition correspondante  $T_{\mathcal{A}}$  est de Hadamard. Puisque tout groupe abélien est produit direct de groupes de la forme  $\mathbf{Z}/p^s \mathbf{Z}$  avec  $p$  premier et  $s \geq 1$ , il suffit d'étudier  $T_{\mathcal{A}}$  lorsque  $\mathcal{A}$  est égal à un tel groupe. Le cas général se déduit de la formule produit (11).

**Théorème 3.2.** Soit  $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/p^s \mathbf{Z}$ ,  $p$  premier et  $T$  la matrice de transition définie par (10) (associée à une suite chaînée à valeurs dans  $G = \mathbf{U}_{p^s}$ ). Alors :

- (i)  $T$  est de Hadamard si, et seulement si,  $s = 1$  ;
- (ii) Pour  $s \geq 2$  et tout caractère non trivial  $\psi_n : z \mapsto z^n$  de  $\mathcal{A}$  ( $1 \leq n < p^s$ ) si  $p^t = \text{pgcd}(n, p^s)$  alors  $\|\psi_n T\| = p^{\frac{s+t}{2}}$ .

*Démonstration.* La proposition (i) a déjà été démontrée en supposant simplement le groupe  $\mathcal{A}$  cyclique. Pour montrer (ii), il n'y a pas d'inconvénient à supposer  $n = p^t$  ( $1 \leq t < s$ ). Explicitons la matrice  $T_{\mathcal{A}}$  en choisissant une racine primitive  $p^s$ -ième de l'unité  $\zeta$  et l'isomorphisme  $a \mapsto \chi_a$  en définissant le caractère  $\chi_a$  par  $\chi_a(b) = \zeta^{ab}$ . Avec ces choix, et en posant  $q = p^s$  pour simplifier :

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \zeta^{q-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \dots & \zeta^{2(q-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \zeta^{q-1} & \zeta^{2(q-1)} & \dots & \zeta^{(q-1)(q-1)} \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\psi_{p^t} T_{\mathcal{A}}$  a pour coefficients  $\zeta^{p^t ab} = \zeta^{p^t a' b'}$  avec  $a' \equiv a \pmod{p^{s-t}}$  et  $b' \equiv b \pmod{p^{s-t}}$  de sorte qu'en introduisant les alphabets  $A' := \{0, 1, \dots, p^{s-t} - 1\}$  et  $A'' := \{0, 1, \dots, p^t - 1\}$  on obtient l'indexation  $\zeta^{p^t ab} = \zeta^{a' a'' b' b''}$  avec  $a'$  et  $b'$  dans  $A'$ ,  $a''$  et  $b''$  dans  $A''$  et  $a = a' + p^{s-t} a''$ ,  $b = b' + p^{s-t} b''$ . D'où

$$T_{\mathcal{A}} = T_{\mathcal{A}'} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et par suite  $\|T_{\mathcal{A}}\| = \|T_{\mathcal{A}'}\|p^t$ , mais  $\|T_{\mathcal{A}'}\| = p^{\frac{s-t}{2}}$ , d'où la norme de  $\|\psi_n T\|$ . ■

**Corollaire 3.1.** *Si  $\mathcal{A}$  est un groupe abélien. La matrice de transition  $T_{\mathcal{A}}$  définie par (10) est contractante. Elle est de Hadamard si, et seulement si, il existe un nombre premier  $p$  et un entier  $m \geq 1$  tels que  $\mathcal{A}$  soit isomorphe à  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^m$  et dans ces conditions,  $G$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ .*

La démonstration de ce corollaire est laissée au lecteur. Notons simplement que si  $\mathcal{A}$  est produit de groupes cycliques  $\mathcal{A}_j$ , alors la matrice de transition  $T_{\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_r}$  est de Hadamard si, et seulement si, ces groupes sont tous isomorphes, d'ordre un nombre premier. Ici se termine l'exemple 8.

### 3.3 Formules sommatoires

Pour étudier la distribution d'une suite chaînée dans  $G$ , à cause du fait que  $G$  n'est pas supposé commutatif, les classiques sommes de Weyl doivent être remplacées par les moyennes mettant en jeu les représentations du groupe. Dans le cas des suites chaînées, les sommations par groupement suivant des puissances de la base jouent le rôle essentiel.

Soit  $F : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{U}_s$  une application chaînée à valeurs dans le groupe des matrices unitaires de  $\mathbf{C}^s$  ( $s \in \mathbf{N}$ ) de matrice de transition  $T$ . Pour toute lettre  $j$  de  $\mathcal{A}$  et tout entier  $m$ , posons

$${}^i\mu^{(m)}(F) := \sum_{w \in \mathcal{A}^m} F(iw) \quad (\in \text{End}(\mathbf{C}^s)) \quad (12)$$

et soit  $\mu^{(m)}(F)$  le vecteur colonne, appartenant à  $\text{End}(\mathbf{C}^s)^q$ , de coordonnées  ${}^i\mu^{(m)}(F)$ ,  $i = 0, 1, \dots, q-1$ . Par construction,  ${}^i\mu^{(0)}(F) = F(i)$ . D'après ces définitions, pour  $m \geq 1$ ,

$$\mu^{(m)} = T\mu^{(m-1)} = T^m\mu^{(0)} \quad (13)$$

et, en prenant la norme quadratique,

$$\|\mu^{(m+1)}(F)\| \leq q^{1/2}\|T\|^m. \quad (14)$$

Notons que si  $T$  est de Hadamard,  $\|T^m\| = q^{m/2}$  puisque  $\overline{T}T = q$ .

On s'intéressera, dans la suite, à la mesure spectrale d'une suite chaînée. Pour cette raison, les applications chaînées seront pondérées par des facteurs  $q$ -multiplicatifs tels que  $\zeta^n$ . Rappelons, à ce propos, qu'une application  $\varphi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{U}$  est dite  $q$ -multiplicative (unimodulaire) s'il existe une suite d'applications  $\varphi_k : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{U}$  ( $k \in \mathbf{N}_0$ ) telles que  $\varphi_k(0) = 1$  pour tout  $k$ ,  $\varphi(\wedge) = 1$  et  $\varphi(w) = \prod_{k=0}^n \varphi_k(w_k)$  pour tout mot  $w = w_n \cdots w_0$  sur  $\mathcal{A}$ . Étant donnée une application  $F : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{U}_s$  associons lui l'application  $\varphi.F : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{U}_s$  définie par  $\varphi.F(w) = \varphi(w)F(w)$ . Les sommes (12) sont alors remplacées par

$${}^i\mu^{(m)}(\varphi.F) := \sum_{w \in \mathcal{A}^m} \varphi(iw)F(iw). \quad (15)$$

Soit l'opérateur  $\theta$  défini sur le groupe des applications  $q$ -multiplicatives par  $\theta(\varphi)(w) = \varphi(w0)$  et pour toute application  $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{U}$ , introduisons les matrices

$$[\psi]_s = \begin{pmatrix} \psi(0)\mathbf{1}_s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \psi(q-1)\mathbf{1}_s \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{1}_s$  désigne la matrice unité de rang  $s$ . Alors,

$$\mu^{(m+1)}(\varphi.F) = [\theta^{m+1}\varphi]_s T \mu^{(m)}(\varphi.F).$$

Le passage de  $T$  à  $[\varphi]_s T$  ne change pas la norme quadratique, d'où

$$\|\mu^{(m)}(\varphi.F)\| \leq q^{1/2} \|T\|^m \quad (16)$$

et si  $T$  est de Hadamard

$$\|\mu^{(m)}(\varphi.F)\| = q^{m/2} \|\mu^{(0)}(\varphi.F)\|. \quad (17)$$

**Théorème 3.3.** *Soit  $F : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{U}_s$  une application chaînée de matrice de transition  $T$  contractante et soit  $\varphi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{U}$  une application  $q$ -multiplicative. Alors*

$$\left\| \sum_{0 \leq n < N} \varphi(\tilde{n}) F(\tilde{n}) \right\| \leq C(F) q^{1/2} N^{\alpha(F)} \quad (18)$$

où  $\alpha(F) = \frac{\log \|T\|}{\log q}$  et  $C(F) = 2^{1/2} (q^{1/2} + 1)(q - 1) / (q^{\alpha(F)} - 1)$ .

La preuve du théorème est basée sur le fait que si

$$\Sigma(t) = \sum_{0 \leq n < q^t} \sum_{0 \leq n < N} \varphi(\tilde{n}) F(\tilde{n})$$

pour  $t \in \mathbf{N}_0$ , alors  $\Sigma(t+1) = \Sigma(t) + \sum_{0 < j < q} j \mu^{(t)}(\varphi.F)$  et donc

$$\|\Sigma(t+1)\| \leq \|\Sigma(t)\| + (q-1)q^{1/2} \|T\|^t.$$

Nous renvoyons à [1] pour les aspects techniques permettant de conclure à la majoration de  $\|\sum_{0 \leq n < N} \varphi(\tilde{n}) F(\tilde{n})\|$  donnée dans le théorème 3.3.

**Corollaire 3.2.** *Toute suite chaînée contractante  $u$  à valeurs dans un groupe compact  $G$  est de spectre total vide c'est-à-dire pour toute représentation irréductible non triviale  $\rho$  de  $G$  et tout nombre complexe  $\zeta$  de module 1, on a  $\lim_N N^{-1} \sum_{0 \leq n < N} \zeta^n \rho(u_n) = \mathbf{0}$ . En particulier, elle est équirépartie dans  $G$  selon la mesure de Haar.*

Il sera utile, pour étudier les propriétés ergodiques des suites chaînées, de disposer du lemme suivant, démontré dans [1] (Lemma 2.4) :

**Lemme 3.2.** *Soit  $f : \mathcal{A}^* \rightarrow G$  une application chaînée régulière à gauche de matrice de transition  $T$  contractante et soit  $\varphi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbf{U}$  une application  $q$ -multiplicative. Pour tout entier  $k \geq 0$  et tout entier  $N > 0$  :*

$$\left\| \sum_{n < N} \varphi(\widetilde{n+k}) \rho(\widetilde{f(n+k)}) \right\| \leq 1 + c(\rho f) 2^{\frac{3}{2} - \alpha(\rho.T)} q^{1/2} (1 + q^{1/2}) N^{\alpha(\rho.f)}$$

où  $\alpha(\rho.f) = \frac{\log \|\rho.T\|}{\log q}$  et  $c(\rho.f) = \frac{q-1}{q^{\alpha(\rho.f)} - 1}$ .

Le résultat suivant caractérise les cas où la matrice de transition est contractante.

**Théorème 3.4.** ([1], Theorem 2.2 (a)) *Soit  $T$  une matrice à coefficients dans un groupe  $G$  compact métrisable. Alors  $T$  est contractante si, et seulement si, les coefficients de  $T^*$  engendrent un sous-groupe dense de  $G$ .*

### 3.4 Structure des matrices de Hadamard dans le cas abélien

Le théorème suivant est démontré dans [1] lorsque  $G$  est supposé abélien métrisable compact. Il permet de caractériser les matrices de Hadamard dans le cas commutatif. Dans [23], Mauclaire donne une autre démonstration, assez élaborée, en ne supposant  $G$  que localement compact (et toujours abélien). Nous complétons ici la preuve initiale en [1], de sorte qu'elle s'appliquera aussi au cas où  $G$  est simplement supposé localement compact.

**Théorème 3.5.** ([1], Theorem 2.2 (b) et [23]) *Soit  $T$  une matrice carrée  $q \times q$  à coefficients dans un groupe  $G$  supposé abélien et localement compact. Si la matrice  $T$  est de Hadamard alors  $G$  est fini et les coefficients de  $T$  forment un système de générateurs de  $G$ .*

*Démonstration.* Le groupe  $G$  étant abélien,  $\Lambda(G)$  est formé des caractères non constants de  $G$ . Soit  $\chi$  l'un d'eux. Par hypothèse et le lemme 3.1(a),  $q^{-1/2}\chi T$  est une matrice unitaire, de même pour  $q^{-1/2}\chi^n T$  si  $\chi^n : g \mapsto (\chi(g))^n$  n'est pas le caractère trivial. La suite  $n \mapsto \chi^n T$ , vue dans le groupe multiplicatif  $\mathbf{U}^{q^2}$ , admet par le théorème de Kronecker une sous-suite qui converge vers l'élément neutre, ce qui n'est possible que s'il existe un entier non nul  $n_0$  tel que  $\chi^{n_0}$  est trivial, vue la propriété de Hadamard. Tous les caractères de  $G$  sont donc d'ordre fini. En particulier, les coefficients de  $\chi T$  sont des racines de l'unité. Nous pouvons, sans changer la propriété de Hadamard, remplacer  $T$  par la matrice  $T^*$  (de coefficients  ${}^i T_j^* = {}^0 T_0 ({}^i T_0)^{-1} {}^i T_j ({}^0 T_j)^{-1}$ ). Les matrices  $\chi T^*$  ont donc leur première ligne et première colonne formées que de 1 et vérifient

$$1 + \chi^m ({}^i T_1^*) + \cdots + \chi^m ({}^i T_{q-1}^*) = 0$$

pour tout indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq q-1$ , dès que  $\chi^m$  n'est pas trivial. Si  $\chi$  est d'ordre  $d$ , en sommant toute ces égalités, il vient

$$\begin{aligned} q^2 &= \sum_{m=0}^{d-1} \sum_{i=0}^{q-1} (1 + \chi^m ({}^i T_1^*) + \cdots + \chi^m ({}^i T_{q-1}^*)) \\ &= \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=0}^{q-1} \left[ \sum_{m=0}^{d-1} \chi^m ({}^i T_j^*) \right] \end{aligned}$$

et comme  $[\sum_{m=0}^{d-1} \chi^m ({}^i T_j^*)]$  vaut 0 ou  $d$ , on en déduit que  $d$  divise  $q^2$ . Les caractères de  $G$  sont donc tous d'ordre un diviseur de  $q^2$ , il en résulte que tous les éléments de  $G$  sont aussi d'ordre un diviseur de  $q^2$ . Le sous-groupe  $G_0$  engendré par les coefficients de  $T$  (ou de  $T^*$ ) est alors fini, donc compact. Supposons  $G_0$  distinct de  $G$ . Il existe, par la dualité de Pontrjagin, un caractère  $\chi$  de  $G$  non trivial, mais trivial sur  $G_0$ . Par suite,  $\chi T$  est une matrice orthogonale à coefficients tous égaux à 1, ce qui est incompatible avec  $q \geq 2$ . Ainsi  $G_0 = G$ . ■

Le résultat suivant dû à J.-L. Mauclaire [23] complète le précédent.

**Proposition 3.2.** ([23]) *Soit  $G$  un groupe abélien fini de  $N$  éléments et  $T$  une matrice carrée de taille  $q \times q$  à coefficients dans  $G$ . Pour que  $T$  soit de Hadamard, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

- (i)  $N$  divise  $q$
- (ii) Pour tous  $i, j$  dans  $\{0, \dots, q-1\}$  tels que  $i \neq j$  et pour tout élément  $g$  de  $G$ , on a  $\text{card}(\{r ; r \in \{0, \dots, q-1\} \ \& \ {}^i T_r ({}^j T_r)^{-1} = g\}) = q/N$ .

Donnons une simple conséquence :

**Corollaire 3.3.** *Sous les hypothèses et notations de la proposition 3.2, si  $N = q$ , alors  $N$  est une puissance  $p^s$  d'un nombre premier  $p$  et  $G$  est isomorphe au produit direct  $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^s$ .*

En effet, l'hypothèse  $T$  de Hadamard et la condition (ii) impliquent que pour tout entier  $n$ , la matrice obtenue en remplaçant les coefficients  ${}^i T_j$  par  $({}^i T_j)^n$  est soit de Hadamard, soit réduite à la matrice où tous ses coefficients sont égaux à l'élément neutre. La question se pose de savoir si le théorème 3.5 reste vrai dans le cas non commutatif.

## 4 Dynamique associée à une application chaînée

### 4.1 Système dynamique et mesures spectrales

Nous ne considérons ici que des systèmes dynamiques standard, c'est-à-dire des triplets  $\mathcal{X} := (T, X, \lambda)$  où  $X$  est un espace compact métrisable,  $T : X \rightarrow X$  une transformation borélienne de  $X$  et  $\lambda$  une mesure de probabilité borélienne invariante par  $T$ , i.e.  $\lambda \circ T^{-1} = \lambda$ . Rappelons que le système dynamique  $\mathcal{X}$  est dit ergodique si les seules parties boréliennes  $B$  de  $X$  telles que  $T^{-1}(B) = B$  sont, à un ensemble  $\lambda$ -négligeable près,  $X$  ou la partie vide. Dans la suite, les seules mesures (de probabilité) concernées sont tacitement supposées boréliennes. Lorsqu'il n'existe qu'une seule mesure de probabilité invariante par  $T$ , le système dynamique est dit uniquement ergodique. La transformation  $T$  induit sur  $L^2(X, \lambda)$  l'isométrie  $f \mapsto f \circ T$ . À toute  $f \in L^2(X, \lambda)$  est associée la suite  $\gamma_f$  des corrélations de  $f$  définie sur  $\mathbf{Z}$  par

$$\gamma_f(m - n) = \int_X f(T^m x) \overline{f(T^n x)} \lambda(dx).$$

La fonction  $\gamma_f$  est la transformée de Fourier d'une mesure borélienne  $\nu_f$  sur le cercle unité  $\mathbf{U}$  :

$$\gamma_f(n) = \int_{\mathbf{U}} z^n \nu_f(dz).$$

Elle est appelée mesure spectrale du système dynamique  $\mathcal{X}$  associée à  $f$ . Notons que  $\nu_f(\mathbf{U}) = \|f\|_{\lambda}^2$ . Rappelons enfin que le type spectral de  $\mathcal{X}$  est une mesure  $\nu(T, \lambda)$ , définie à une équivalence près, telle que toute mesure spectrale  $\nu_f$  est absolument continue par rapport à  $\nu(T, \lambda)$  et si une mesure  $\nu$ , absolument continue par rapport à  $\nu(T, \lambda)$ , possède cette propriété alors elle est équivalente à  $\nu(T, \lambda)$ . Si  $T$  est inversible, il existe  $f \in L^2(X, \lambda)$  telle que  $\nu_f$  soit équivalente à  $\nu(T, \lambda)$ . Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [16].

### 4.2 Flot associé à une suite

Par définition, un flot est un couple  $(F, X)$  où  $X$  est un espace métrisable compact et  $F$  une application continue définie sur  $X$  à valeurs dans  $X$ . L'application  $F$  n'est pas ici supposée surjective mais par compacité, il existe une plus grande partie compacte  $X_0$  de  $X$ , qui soit non vide et telle que  $F(X_0) = X_0$ . Rappelons que le flot est dit minimal si les seules parties compactes  $X'$  de  $X$  telles que  $F(X') \subset X'$  sont  $X$  ou la partie vide. En particulier, pour tout flot minimal  $(F, X)$ , l'application  $F$  est surjective. Un flot mesuré est un système dynamique  $(F, X, \lambda)$  où  $(F, X)$  est un flot et  $\lambda$  une mesure borélienne de probabilité sur  $X$ , invariante par  $F$ . En particulier, avec la notation ci-dessus,  $\lambda(X_0) = 1$ . Un flot minimal, uniquement ergodique est dit strictement ergodique.

Soit  $\Omega(X)$  l'espace des suites  $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$  dans  $X$  muni de la topologie faible, c'est-à-dire  $\Omega(X)$  est identifié à l'espace topologique produit  $X^{\mathbf{N}_0}$ . Notons  $S : \Omega(X) \rightarrow \Omega(X)$  l'application décalage (ou shift) définie par  $S((\omega_n)_n) = (\omega_{n+1})_n$ . Le couple  $(S, \Omega(X))$  est un flot. Soit  $u$  une suite dans  $X$  et  $\mathcal{O}_u := \{S^n u; n \in \mathbf{N}_0\}$  son orbite suivant  $S$ . Le décalage laisse invariant la fermeture topologique  $K_u$  de  $\mathcal{O}_u$  déterminant ainsi le flot  $\mathcal{K}(u) = (S, K_u)$  où  $S$  désigne maintenant la restriction du décalage sur  $K_u$ .

Dans le cas d'un système dynamique standard  $(T, X, \lambda)$ , l'application  $T$  n'est plus supposée continue mais seulement borélienne. Le théorème individuel ergodique de Birkhoff entraîne que la limite

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} f(T^n(x)) \quad (19)$$

existe pour  $\lambda$ -presque tout  $x$  et converge vers  $\int_X f d\lambda$  si la mesure  $\lambda$  est ergodique. Un point  $\xi \in X$  tel que

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} f(T^n(\xi)) = \int_X f d\lambda$$

pour toute application continue  $f : X \rightarrow \mathbf{C}$  est dit  $\lambda$ -générique. Pour de tels  $\xi$ , si la transformation  $F$  est  $\lambda$ -continue (c'est-à-dire si l'ensemble de ses points de discontinuité est  $\lambda$ -négligeable) alors pour toute application  $g : X \rightarrow \mathbf{C}$  bornée et  $\lambda$ -continue, on a également  $\lim_N \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} g(T^n(\xi)) = \int_X g d\lambda$ . En outre, la suite  $n \mapsto f(T^n x)$  admet une corrélation  $\gamma_g$  du fait que  $x$  est générique et  $\gamma_f(m) = \int_X g(T^m(x)) \overline{g(x)} \lambda(dx)$ . La mesure spectrale associée à la suite  $n \mapsto f(T^n x)$  est donc identique à la mesure spectrale associée à  $f$  dans le système dynamique  $(T, X, \lambda)$ . Lorsque  $(T, X, \lambda)$  est uniquement ergodique, si  $T$  n'est pas continue, il n'est pas exact que tous les points sont  $\lambda$ -génériques. Pour obtenir la généralité de tous les points, il faut ajouter une hypothèse de régularité de  $F$  plus forte que la  $\lambda$ -continuité.

**Définition 4.1.** *L'application  $T : X \rightarrow X$  est dite uniformément  $T$ -quasicontinue si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une application continue  $\psi : X \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\psi(x) = 1$  pour tout point  $x$  de discontinuité de  $T$  et  $\limsup_N \|\frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} \psi \circ T^n\|_\infty \leq \varepsilon$ .*

Cette définition se justifie par le résultat suivant établi en annexe dans [19] :

**Théorème 4.1.** *Soit  $T : X \rightarrow X$  une application uniformément  $T$ -quasicontinue. Elle est uniquement ergodique si, et seulement si, pour toute application  $f : X \rightarrow \mathbf{C}$  continue, la limite (19) existe indépendamment de  $x$  et la convergence est uniforme en  $x$ .*

### 4.3 $G$ -extension standard

Supposons maintenant que  $X$  soit un groupe métrisable compact noté  $G$  par la suite. Soit  $K$  un compact de  $\Omega(G)$  tel que  $S(K) \subset K$  définissant ainsi un sous-flot  $\mathcal{F} = (S, K)$  de  $(S, \Omega(X))$  (où  $S$  désigne aussi sa restriction à  $K$ ). Par définition, la  $G$ -extension standard de  $\mathcal{F}$  est le flot  $\mathcal{F} \square G := (S_0, \Omega(G) \times G)$  défini par  $S_0(\omega, g) = (S\omega, g\omega_0)$ . Nous introduisons maintenant l'application *dérivée discrète*  $\Delta : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)$ , définie par

$$\Delta\omega(n) = \omega_n^{-1} \omega_{n+1} \quad (20)$$

et l'application *produit*  $\sigma : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G)$  définie par  $\sigma(\omega)_0 = 1_G$  et  $\sigma(\omega)_n = \omega_0 \cdots \omega_{n-1}$  pour  $n \geq 1$ . Le groupe  $G$  opérera sur  $\Omega(G)$  à gauche par  $(\gamma, \omega) \mapsto \gamma \cdot \omega$ ,  $(\gamma \cdot \omega)_n = \gamma \omega_n$  et aussi

à gauche sur  $\Omega(G) \times G$  par  $\gamma * (\gamma, (\omega, g)) = (\omega, \gamma g)$ . On vérifie facilement que l'application  $J : \Omega(G) \rightarrow \Omega(G) \times G$  définie par

$$J(w) := (\Delta\omega, \omega_0) \quad (21)$$

est un homéomorphisme de flots entre  $\mathcal{S} := (S, \Omega(G))$  et  $\mathcal{S} \square G$  qui commute avec les actions respectives de  $G$  sur  $\Omega(G)$  et sur  $\Omega(G) \times G$ , c'est-à-dire  $\gamma * J(\omega) = J(\gamma \cdot \omega)$ . L'homéomorphisme réciproque de  $J$  est donnée par  $J^{-1}(\omega, g) = g \cdot \sigma(\omega)$ .

**Proposition 4.1.** *Soit  $u \in \Omega(G)$ . Alors  $\mathcal{K}(u)$  est isomorphe à  $\mathcal{K}(\Delta u) \square G$  (par restriction de  $J$  à  $K_u$ ) si, et seulement si, pour tout  $\gamma \in G$ , on a  $\gamma \cdot K_u = K_u$ .*

*Démonstration.* Dans tous les cas,  $J(K_u) \subset K_{\Delta u} \times G$ . S'il y a égalité, alors pour tout  $\omega \in K_u$  et pour tout  $g \in G$ , on a  $J^{-1}(\Delta\omega, g\omega_0) = g \cdot \omega$ , donc  $g \cdot K_u \subset K_u$  et de même avec  $g^{-1}$ , d'où l'égalité. Réciproquement, supposons  $g \cdot K_u = K_u$  pour tout  $g$  de  $G$ . Alors  $J(K_u) = \Delta(K_u) \times G$  car  $J(g \cdot \omega) = (\Delta u, g\omega_0)$  et  $\Delta(K_u) = K_{\Delta u}$ . ■

Pour mettre en évidence la structure de  $\mathcal{K}(u)$  à partir de son image par  $J$  lorsque celle-ci n'est pas le produit  $K_u \times G$  mais avec  $\mathcal{K}(u)$  minimal, nous aurons besoin des lemmes qui suivent.

**Lemme 4.1.** *Soit  $u \in \Omega(G)$ . L'ensemble  $\Gamma_u := \{\gamma \in G; \gamma \cdot K_u \subset K_u\}$  est un sous-groupe de  $G$  et pour tout  $g \in G$ , on a  $\Gamma_{u.g} = \Gamma_u$  où  $u.g$  est la suite chaînée  $n \mapsto u_n g$ .*

*Démonstration.* Il est clair que  $\Gamma_u$  forme un sous semi-groupe fermé de  $G$ . C'est donc aussi un sous-groupe de  $G$  puisque  $G$  est compact. L'égalité  $\Gamma_{u.g} = \Gamma_u$  est la conséquence logique de l'égalité entre  $K_{u.g} (= \{\omega.g; \omega \in K_u\})$  et  $K_{u.g}$ . ■

**Lemme 4.2.** *Soit  $u \in \Omega(G)$  tel que  $\mathcal{K}(u)$  soit minimal. Pour tout  $\omega \in K_u$ , l'ensemble  $H_\omega := \{\gamma \in G; \gamma \cdot \omega \in K_u\}$  est égal au groupe  $\Gamma_u$  du lemme 4.1.*

*Démonstration.* Si  $\gamma$  appartient à  $H_\omega$ , alors  $\gamma \cdot S^k \omega \in K_u$  pour tout entier  $k \geq 0$  et comme  $\mathcal{K}(u)$  est minimal, par passage à la limite on obtient  $\gamma \cdot \omega' \in K_u$  pour tout  $\omega'$ . D'où l'inclusion  $H_\omega \subset H_{\omega'}$ . En échangeant  $\omega$  et  $\omega'$  on obtient  $H_\omega = H_{\omega'}$  ce qui permet de conclure aussi à l'inclusion  $H_\omega \subset \Gamma_u$ . Mais la définition de  $\Gamma_u$  implique l'inclusion  $\Gamma_u \subset H_\omega$ , d'où l'égalité annoncée. ■

Continuons à supposer  $\mathcal{K}(u)$  minimal et dans toute la suite posons  $\Gamma := \Gamma_u$  pour simplifier. Introduisons l'espace quotient  $G/\Gamma$  des classes à gauche muni de la topologie quotient. Il est métrisable compact et l'application canonique  $\pi_\Gamma : g \mapsto \Gamma g$  est continue, ouverte (cf. [11]). Soit l'application continue et surjective  $\Pi_\Gamma : K(\Delta u) \times G \rightarrow K(\Delta u) \times (G/\Gamma)$  définie par  $\Pi_\Gamma(x, g) = (x, \pi_\Gamma(g))$ . Finalement, définissons l'application  $S_\Gamma : K(\Delta u) \times (G/\Gamma) \rightarrow K(\Delta u) \times (G/\Gamma)$  par

$$S_\Gamma(x, \Gamma g) \mapsto (Sx, \Gamma g x_0). \quad (22)$$

**Proposition 4.2.** *Si  $\mathcal{K}(u)$  est minimal, l'image  $X_u := \Pi_\Gamma \circ J(K_u)$  détermine une relation de graphe compact dans  $K_{\Delta u} \times G/\Gamma$  invariante par  $S_\Gamma$  (donnée par (22)). Le flot  $(S_\Gamma, X_u)$  est minimal. La projection première coordonnée  $p_0 : X_u \rightarrow K_{\Delta u}$  détermine une conjugaison topologique entre  $(S_\Gamma, X_u)$  et  $\mathcal{K}(\Delta u)$ .*

*Démonstration.* L'ensemble  $X_u$  est compact puisque  $J$  et  $\Pi_\Gamma$  sont des applications continues. Montrons que  $X_u$  est le graphe d'une application de  $K_{\Delta u}$  dans  $G/\Gamma$ . Soit  $x \in K_{\Delta u}$ ; il existe

$\omega \in K_u$  tel que  $x = \Delta(\omega)$  et donc  $\Pi_\Gamma \circ J(\omega) = (x, \Gamma\omega_0)$  appartient à  $X_u$ . Supposons maintenant qu'il existe  $g \in G$  tel que  $(x, \Gamma g) \in X_u$ . Alors il existe  $\omega' \in K_u$  tel que  $J(\omega') = (x, \omega'_0)$  et  $\Gamma g = \Gamma\omega'_0$ . Il existe donc  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\omega' = (\gamma g \omega_0^{-1}) \cdot \omega$ , ce qui implique  $\gamma g \omega_0^{-1} \in \Gamma$  (lemme 4.2) et donc  $g \in \Gamma\omega_0$ , d'où  $\Gamma g = \Gamma\omega_0$ . La seconde coordonnée du point  $(x, \Gamma\omega_0) \in X_u$  ne dépend donc que de  $x$ , ce qui détermine une application  $\xi_u : K_{\Delta u} \rightarrow G/\Gamma$  par l'équivalence

$$(\forall (x, \Gamma g) \in K_{\Delta u} \times G/\Gamma) (\xi_u(x) = \Gamma g \iff (x, \Gamma g) \in X_u). \quad (23)$$

La continuité de  $\xi_u$  est une conséquence de la compacité de  $X_u$ . Par suite, l'application  $x \mapsto (x, \xi_u(x))$  de  $K_{\Delta u}$  vers  $X_u$  est une bijection bicontinue, d'inverse  $p_0$ . Si  $x \in K_{\Delta u}$ , le point de  $X_u$  de première coordonnée  $x$  est donné par  $(x, \Gamma\omega_0)$  pour un élément  $\omega \in K_u$  tel que  $\Delta(\omega) = x$ ; le point de  $X_u$  de première coordonnée  $Sx$  a donc pour seconde coordonnée  $\Gamma\omega_1 = \Gamma\omega_0 x_0$ , d'où  $\xi_u(Sx) = \xi_u(x) x_0$ . En d'autres termes  $S_\Gamma(x, \xi_u(x)) = (Sx, \xi_u(Sx)) \in X_u$  et la conjugaison entre  $(S_\Gamma, X_u)$  et  $\mathcal{K}(\Delta u)$  via  $p_0$  en résulte. ■

La proposition 4.2 montre que

$$J(K_u) = \bigcup_{x \in K_{\Delta u}} \{x\} \times \xi_u(x).$$

Pour visualiser l'action du décalage dans  $J(K_u)$ , il est nécessaire de fixer une section dans  $G/\Gamma$  représentant  $G/\Gamma$ , c'est-à-dire une application  $\eta : G/\Gamma \rightarrow G$  telle que l'application  $\pi_\Gamma \circ \eta$  soit l'identité sur  $G/\Gamma$ . Les espaces étant métrisables compacts et  $\pi_\Gamma$  continue, on peut choisir la section  $\eta$  borélienne (sans plus).

**Théorème 4.2.** *Supposons  $\mathcal{K}(u)$  minimal et soit  $\eta : G/\Gamma \rightarrow G$  une section borélienne et  $c : K_u \rightarrow G$  l'application composée  $c = \eta \circ \xi_u \circ \Delta$  où  $\xi_u$  est l'application définie en (23). Pour tout  $\omega \in K_u$  et tout  $x \in K_{\Delta u}$ , on a  $\omega_0(c(\omega))^{-1} \in \Gamma$  et  $(\eta \circ \xi_u(x))x_0(\eta \circ \xi_u(Sx))^{-1} \in \Gamma$ . Soit alors  $\varphi : K_{\Delta u} \rightarrow \Gamma$  l'application borélienne définie par  $\varphi(x) = (\eta \circ \xi_u(x))x_0(\eta \circ \xi_u(Sx))^{-1}$ . Le flot  $\mathcal{K}(u)$  est conjugué par l'application borélienne  $\omega \mapsto (\Delta(\omega), \omega_0 c(\omega)^{-1})$  au produit croisé  $\mathcal{K}(\Delta u) \square_{\varphi} \Gamma := (S_\varphi, K_{\Delta u} \times \Gamma)$  défini par*

$$S_\varphi(x, \gamma) = (Sx, \gamma \varphi(x)).$$

*Démonstration.* D'après la proposition 4.2, la définition de  $X_u$  et la construction de  $\xi_u$  (23) qui en résulte, on a  $\omega_0 \in \xi_u(\Delta(\omega))$ . Il existe donc un unique  $\gamma_\omega$  dans  $\Gamma$  tel que  $\omega_0 = \gamma_\omega c(\omega)$ . Par ailleurs, choisissons  $\omega \in K_u$  tel que  $\Delta(\omega) = x$ . En particulier  $x_0 = \omega_0^{-1} \omega_1$  et  $(\eta \circ \xi_u(x))x_0(\eta \circ \xi_u(Sx))^{-1} = c(\omega)\omega_0^{-1}\omega_1(c(S\omega))^{-1}$ , d'où  $\varphi(x) = \gamma_x^{-1} \gamma_{S\omega}$ . La conjugaison entre  $\mathcal{K}(x)$  et  $\mathcal{K}(\Delta u) \square_{\varphi} \Gamma$  par  $\omega \mapsto (\Delta(\omega), \omega_0 c(\omega)^{-1}) (= (\Delta\omega, \gamma_x))$  résulte du calcul suivant :  $\omega_0 c(\omega)^{-1} \varphi(\Delta\omega) = \omega_0 c(\omega)^{-1} (c(\omega)\omega_0^{-1}\omega_1 c(S\omega)^{-1}) = \omega_1 c(S\omega)^{-1}$ . ■

**Remarque 4.1.** a) Si l'on change la section  $\eta$  dans le théorème 4.2 par une autre section  $\eta'$ , l'application  $\varphi$  est remplacé par l'application  $\varphi'$  correspondante et les produits croisés  $\mathcal{K}(\Delta u) \square_{\varphi} \Gamma$  et  $\mathcal{K}(\Delta u) \square_{\varphi'} \Gamma$  sont conjugués, le premier sur le second, par l'application

$$(x, \gamma) \mapsto (x, \gamma(\eta \circ \xi_u(x))(\eta' \circ \xi_u(x))^{-1}).$$

b) Si  $\Gamma = G$ , on retrouve la situation décrite dans la proposition 4.1. En effet, l'espace quotient  $G/\Gamma$  se réduit maintenant au groupe trivial  $\{\Gamma.1_G\}$ . La section  $\eta$  qui remonte  $\Gamma.1_G$  sur  $1_G$  s'impose naturellement,  $X_u = K_{\Delta u} \times \{\Gamma.1_G\}$ ,  $\xi_u$  est l'application constante  $\xi_u(x) = \Gamma.1_G$ , de sorte que  $\eta \circ \xi_u(x) = 1_G$  pour tout  $x \in K_{\Delta u}$  et ainsi  $\varphi(x) = x_0$ .

## 4.4 Flots chaînés

Lorsque  $u$  est une suite chaînée dans  $G$ , le flot associé  $\mathcal{K}(u)$  sera dit chaîné.

### 4.4.1 Minimalité de $\mathcal{K}(u)$

Le premier résultat fondamental recherché est de nature topologique ; il constitue la première étape obligée pour comprendre la structure dynamique métrique de  $\mathcal{K}(u)$ .

**Théorème 4.3.** *Pour toute suite chaînée en base  $q$  dans  $G$ , groupe métrisable compact, le flot  $\mathcal{K}(u)$  est minimal.*

*Démonstration.* Soit  $d$  une distance pour le groupe  $G$  qui soit invariante pour les translations à droite et à gauche. Soit  $\varepsilon > 0$  et pour tout entier  $a \geq 0$  posons

$$I(a; \varepsilon) := \{n \in \mathbf{N}_0 ; \max_{0 \leq \ell < q^a} d(u_\ell, u_{\ell+n}) < \varepsilon\}.$$

Il faut démontrer que  $I(a; \varepsilon)$  est à lacunes bornées c'est-à-dire qu'il existe un entier  $m$  tel que pour tout entier  $i$  dans  $I(a; \varepsilon)$  il existe  $j$  dans  $I(a; \varepsilon)$  vérifiant les inégalités  $i < j \leq i + m$ . Si  $u_0 \neq 1_G$ , nous remplaçons la suite  $u$  par la suite  $u.u_0^{-1} : n \mapsto u_n u_0^{-1}$ . Elle reste chaînée et de manière évidente  $\mathcal{K}(u)$  est minimal si, et seulement si,  $\mathcal{K}(u.u_0^{-1})$  est minimal. Nous pouvons donc supposer  $u_0 = 1_G$ . Pour tout entier  $b > a + 1$ , tout entier  $\ell$  tel que  $0 \leq \ell < q^a$  et tout entier  $m > 0$ , la propriété de chaînage donne la relation  $u_{q^b m + \ell} = u_{qm} u_\ell$ . Les valeurs  $u_{qm}$  jouent donc un rôle particulier important que précise le lemme suivant :

**Lemme 4.3.** *Soit  $u$  une suite chaînée telle que  $u_0 = 1_G$ . L'ensemble*

$$V(u) := \overline{\{u_{qm} ; m \in \mathbf{N}_0\}}$$

*forme un sous-groupe de  $G$ .*

En effet, puisque  $u_0 = 1_G$ , la relation  $u_{q^k m + q^n} = u_{qm} u_{qn}$  est vérifiée dès que  $q^2 n < q^k$ , ce qui montre que l'image par  $u$  de  $q\mathbf{N}_0$  forme un semigroupe pour la loi de  $G$ . Le passage à la clôture donne un sous-semigroupe compact de  $G$  qui est donc un groupe Q.E.D.

Choisissons  $K \geq 1$  tel que l'ensemble  $\{u_{qm} ; 0 \leq m < q^K\}$  soit  $\varepsilon$ -dense dans  $V$ . Alors, pour tout entier  $t$ , il existe un entier  $r(t)$ ,  $0 \leq r(t) < q^K$ , tel que  $d(u_{qt} u_{qr(t)}, 1_G) \leq \varepsilon$ , d'où  $d(u_{tq^{a+K+2} + r(t)q^{a+1} + \ell}, u_\ell) \leq \varepsilon$ . Par suite  $tq^{a+K+2} + r(t)q^{a+1} \in I(a; \varepsilon)$  ; il suffit donc de choisir  $m = 2q^{a+K+2}$ . ■

Il peut arriver que  $V(u)$  soit distinct du sous-groupe fermé  $G_u$  engendré par les valeurs de  $u$ . Ce n'est pas le cas si la suite est régulière à droite.

**Théorème 4.4.** *Soit  $u$  une suite chaînée régulière à droite,  $\Gamma_u$  le groupe défini dans le lemme 4.1 et  $V(u)$  celui du lemme 4.3. Alors  $\Gamma_u = V(u) = G_u$  et  $\mathcal{K}(u)$  est topologiquement conjugué (par  $J$ ) à  $\mathcal{K}(\Delta u) \square G_u$ .*

*Démonstration.* La propriété de chaînage avec la régularité à droite (outre celle de gauche) conduit immédiatement à  $G_u = V(u)$  et  $V(u) = \overline{\{u_{q^k m} ; m \in \mathbf{N}_0\}}$  pour tout entier  $k$ . Soit  $\gamma \in G_u$  ; il est possible de construire une suite strictement croissante d'entiers  $m_k$  telle que

la suite  $k \mapsto u_{q^k m_k}$  converge vers  $\gamma$ . D'après le lemme 4.1, on peut supposer  $u_0 = 1_G$  ce qui donne, pour tout entier  $\ell \geq 0$ , les égalités  $u_{\ell+q^k m_k} = u_{q m_k} u_\ell = u_{m_k} u_\ell$  dès que  $q^{k-1} > \ell$ . Le passage à la limite donne  $\gamma \cdot u \in K_u$  et le lemme 4.2 joint au théorème 4.3 entraîne  $\gamma \in \Gamma_u$ . Donc  $\Gamma_u = G_u$  et la proposition 4.1 termine la démonstration. ■

On va voir que dans le cas où la suite est chaînée contractante, la régularité à droite n'est pas requise pour conclure à l'isomorphisme du flot avec le produit croisé standard.

#### 4.4.2 Flot chaîné d'une suite contractante

L'objectif est maintenant de démontrer le résultat principal suivant :

**Théorème 4.5.** *Soit  $F$  une application chaînée régulière à gauche en base  $q$ , à valeurs dans un groupe métrisable compact  $G$  et soit  $u$  la suite chaînée en base  $q$  associée à  $F$ . Supposons la matrice de transition  $T$  de  $F$  contractante, alors le flot chaîné  $\mathcal{K}(u)$  est strictement ergodique, d'unique mesure invariante notée  $m_u$ . De plus,  $\mathcal{K}(u)$  est conjugué par l'application  $J$  (définie par (21)) à  $\mathcal{K}(\Delta u) \square G$  dont l'unique mesure invariante est  $m_u \circ \Delta^{-1} \otimes h_G$ .*

*Démonstration.* La démonstration est développée en trois étapes.

*Étape 1 :*  $\mathcal{K}(u)$  est topologiquement conjugué à  $\mathcal{K}(\Delta u) \square G$ . Soit  $g \in G$  et  $x \in K_u$ . Il faut montrer, d'après la proposition 4.1 que  $g \cdot u$  appartient à  $K_u$ . Soit  $(n_k)_k$  une suite croissante d'entiers telle que  $\lim_k S^{n_k} u = x$ . L'hypothèse sur  $u$  entraîne que la suite chaînée  $n \mapsto u_{qn}$  est aussi contractante de sorte que le théorème 3.4 permet de construire une suite d'entiers  $(a_k)_k$  telle que  $\lim_k u(qa_k) = gu_0$  et une suite d'entiers  $(t_k)_k$  telle que  $n_k + k < q^{t_k}$ . Pour tout entier  $\ell$  tel que  $0 \leq \ell < k$ , la propriété de chaînage donne

$$u_{m_k q^{t_k+1} + n_k + \ell} = u(qm_k) u_0^{-1} u(n_k + \ell);$$

par suite

$$\lim_k S^{m_k q^{t_k+1} + n_k} u = g \cdot u.$$

*Étape 2 :*  $\mathcal{K}(\Delta u)$  est uniquement ergodique. Il suffit de montrer que pour toute application  $f : \Omega(G) \rightarrow \mathbf{C}$  continue, la suite des moyennes

$$M_1(f, N, k) := \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} f(S^{n+k} \Delta u)$$

converge uniformément en  $k$ . Pour voir cela, la propriété suivante est fondamentale :

**Lemme 4.4.** *Soit  $u : \mathbf{N}_0 \rightarrow G$  chaînée en base  $q$ . Il existe une partition de  $\mathbf{N}_0$  en progression arithmétiques  $P_m$  ( $m \in \mathbf{N}_0$ ) de raison  $q^{s_m}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) telle que*

- (i)  $\Delta u$  est constante sur  $P_m$  ;
- (ii)  $\sum_{m=0}^{\infty} q^{-s_m} = 1$ .

*Démonstration.* Ce résultat est une conséquence de la formule produit  $f_u(\alpha x w)^{-1} f_u(\alpha x w') = f_u(x w)^{-1} f_u(x w')$  qui montre que  $\Delta u$  est constante sur les progressions arithmétiques

$$P(n, a, b) := \left( \sum_{0 \leq \ell < n} (q-1)q^\ell \right) + aq^n + bq^{n+1} + q^{n+2} \mathbf{N}_0, \quad 0 \leq a < q-1, \quad 0 \leq b < q \quad (24)$$

pour tout  $m \in \mathbf{N}_0$ . ■

Il est utile de noter que les propriétés (i) et (ii) du lemme 4.4 signifient que la suite  $\Delta u$  est du type Toeplitz régulière, bien que cette notion soit introduite dans la littérature pour les suites définies sur  $\mathbf{Z}$  (voir [14, 31]).

Revenons à l'unique ergodicité de  $\mathcal{K}(\Delta u)$  et notons  $v_m$  la valeur de  $\Delta u$  sur les progressions arithmétiques  $P_m$  du lemme 4.4. Soit  $f : G^s \rightarrow \mathbf{C}$  une application continue. La suite  $\varphi : n \mapsto f(\Delta u(n), \dots, \Delta u(n+s-1))$  est constante sur des progressions arithmétiques obtenues comme intersections non vides de la forme  $P_{m_0} \cap \dots \cap (P_{m_{s-1}} - s + 1)$  (et de valeurs  $f(v_{m_0}, \dots, v_{m_{s-1}})$ ). Il existe donc une partition de  $\mathbf{N}_0$  en progressions arithmétiques  $Q_m$  ( $m \geq 0$ ) disons de raisons  $q^{t_m}$ , telles que  $\min Q_m < q^{t_m}$  et  $\sum_{m=0}^{\infty} q^{-t_m} = 1$  et sur lesquelles la suite  $\varphi$  est constante, de valeur constante, notée  $\nu_m$ . Ainsi

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \nu_m \mathbf{1}_{Q_m}$$

d'où résulte assez simplement l'existence de la limite

$$\lambda := \lim_N \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} f(S^n \Delta u)$$

de valeur  $\sum_{m=0}^{\infty} \nu_m q^{-t_m}$ .

Étudions les sommes

$$NM_1(f, N, k) = \sum_{0 \leq n < N} f(S^{n+k} \Delta u).$$

Avec les notations précédentes,

$$NM_1(f, N, k) = \sum_{0 \leq m \geq 0} \nu_m \sum_{0 \leq n < N} \mathbf{1}_{Q_m}(n+k).$$

Puisque

$$\left| \sum_{0 \leq 0 \leq n < N} \mathbf{1}_{Q_m}(n+k) - \sum_{0 \leq n < N} \mathbf{1}_{Q_m}(n) \right| \leq 1,$$

il vient pour tout  $L \geq 1$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{0 \leq n < N} f(S^{n+k} \Delta u) - \sum_{0 \leq n < N} f(S^n \Delta u) \right| \\ & \leq \sum_{m < L} |n u_m| + \|f\|_{\infty} \sum_{m \geq L} \left( \sum_{0 \leq n < N} \mathbf{1}_{Q_m}(n) + \sum_{0 \leq n < N} \mathbf{1}_{Q_m}(n+k) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, quel que soit  $k$ ,

$$\sum_{0 \leq n < N} \sum_{m \geq L} \mathbf{1}_{Q_m}(n+k) = N - \sum_{0 \leq n < N} \sum_{0 \leq m < L} \mathbf{1}_{Q_m}(n+k)$$

et

$$\sum_{0 \leq n < N} \mathbf{1}_{Q_m}(n+k) \geq (Nq^{-t_m} - 1),$$

d'où finalement

$$\begin{aligned} |M_1(f, N, 0) - M_1(f, N, k)| &\leq \|f\|_\infty \left( \frac{L}{N} + \frac{2}{N} \left( N - \sum_{0 \leq m < L} (Nq^{-tm} - 1) \right) \right) \\ &\leq \|f\|_\infty \left( \frac{3L}{N} + 2 \left( 1 - \sum_{0 \leq m < L} q^{-tm} \right) \right). \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ ; choisissons  $L$  tel que  $1 - \sum_{0 \leq m < L} q^{-tm} \leq \varepsilon/4$ . Alors pour  $k$ , entier, et  $N \geq (6\varepsilon L)^{-1}$ , on obtient  $|M_1(f, N, 0) - M_1(f, N, k)| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$ . Par conséquent, la suite  $(M_1(f, N, k))_N$  converge vers  $\lambda$  uniformément en  $k$ .

*Étape 3 :  $\mathcal{K}(\Delta u) \square G$  est uniquement ergodique.* Soit  $\rho$  une représentation irréductible de  $G$  et  $f : G^s \rightarrow \mathbf{C}$ , une application continue. Envisageons dans  $\text{End}(\mathbf{C}^{s\rho})$  les moyennes

$$M(f \otimes \rho, N, k) := \frac{1}{N} \sum_{n < N} f(S^{n+k} \Delta u) \cdot \rho(u_{n+k})$$

et reprenons les notations de l'étape 2, de sorte que  $f(S^n \Delta u) = \sum_{m \geq 0} \nu_m \mathbf{1}_{Q_m}(n)$  où  $Q_m$  est une progression arithmétique de raison  $q^m$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et choisissons, comme précédemment,  $L \geq 1$  tel que  $1 - \sum_{0 \leq m < L} q^{-tm} \leq \varepsilon/4$ . D'après le lemme 3.2, la fonction indicatrice  $\mathbf{1}_{Q_m}$  étant combinaison linéaire des exponentielles  $n \mapsto e^{2i\pi r n q^m}$ , on en déduit l'existence de  $N_0$  tel que

$$\left\| \sum_{n < N} \mathbf{1}_{Q_m}(n+k) \rho(u(n+k)) \right\| \leq \frac{N\varepsilon}{4L}$$

pour tout  $N \geq N_0$  et tout  $m < L$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n < N} \left( \sum_{m \geq L} \nu_m \mathbf{1}_{Q_m}(n+k) \rho(u(n+k)) \right) \right\| &\leq \|f\|_\infty \sum_{n < N} \sum_{m \geq L} \mathbf{1}_{Q_m}(n+k) \\ &\leq \|f\|_\infty \left( N - \sum_{m < L} \mathbf{1}_{Q_m}(n+k) \right) \\ &\leq \|f\|_\infty \left( \frac{N\varepsilon}{4} + L \right). \end{aligned}$$

Choisissons  $L_1 = \max\{N_0, (2L\varepsilon)^{-1}\}$ , alors les majorations précédentes donnent, pour  $N \geq L_1$ ,

$$\|M(f \otimes \rho, N, k)\| \leq \|f\|_\infty \varepsilon.$$

Avec le théorème de Peter-Weyl et un argument classique de densité, on déduit tout d'abord que la suite des moyennes

$$\frac{1}{N} \sum_{n < N} f(S^{n+k} \Delta u) g(u(n+k)) \tag{25}$$

converge vers 0 uniformément en  $k$  lorsque  $g : G \rightarrow \mathbf{C}$  est une application continue, d'intégrale de Haar nulle. Lorsque  $g$  est constante, de valeur  $\gamma \neq 0$ , les moyennes (25) convergent uniformément vers  $\gamma \int_{\Omega} f(\omega) m_{\Delta u}(d\omega)$ , d'après l'étape 2,  $m_{\Delta u}$  désignant l'unique mesure invariante du flot  $\mathcal{K}(\Delta u)$ . Le même type d'argument de densité donne maintenant pour toute application  $\Phi : \Omega \times G \rightarrow \mathbf{C}$  continue :

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n < N} \Phi(S_1^{n+k}(\Delta u, u)) = \int_{\Omega \times G} \Phi(\omega, t) m_{\Delta u}(d\omega) h_G(dt),$$

la convergence étant uniforme en  $k$ . En revenant à l'étape 2 et compte tenu du théorème 4.3, on obtient  $\mathcal{K}(u)$  strictement ergodique, topologiquement conjugué à  $\mathcal{K}(\Delta u) \square G$ , d'unique mesure invariante  $m_u$  égale à  $m_{\Delta u} \otimes h_G$ ; en particulier  $m_{\Delta u} = m_u \circ \Delta^{-1}$ . ■

## 5 Flots de Cantor

L'objectif de cette section est d'identifier le flot  $\mathcal{K}(\Delta u)$  à un odomètre lorsque  $u$  est une suite chaînée. La suite  $n \mapsto \Delta u_n$  se classe parmi les suites constantes par progressions arithmétiques, lesquelles forment une partition de  $\mathbf{N}_0$ . Cela nous conduit à revenir sur la notion de suite de Toeplitz.

### 5.1 Suites de Toeplitz unilatérales régulières

La définition suivante joue un rôle essentiel.

**Définition 5.1.** *Une partition de  $\mathbf{N}_0$  en progressions arithmétiques  $P_m$  ( $m \in \mathbf{N}_0$ ) de raison  $r_m$  sera dite régulière si elle vérifie les conditions suivantes :*

- (i)  $r_m | r_{m+1}$  pour tout  $m$  ;
- (ii)  $\sum_{m=0}^{\infty} r_m^{-1} = 1$  ;
- (iii)  $\min P_m \in \{0, 1, \dots, r_m - 1\}$ .

Notons  $(r_{m_k})_{k \geq 1}$  la suite extraite de  $(r_m)_m$  strictement croissante telle que  $r_{m_k} = r_m$  si  $m_k \leq m < m_{k+1}$ . Posons  $r_{m_0} = 1$ ,  $q_0 = 1$ , puis par induction,  $q_k = r_{m_k}(r_{m_{k-1}})^{-1}$  et  $p_k = q_0 \cdots q_k (= r_{m_k})$ . La suite  $\mathbf{q} = (1, q_1, q_2, \dots)$  détermine le groupe compact  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ , limite projective de la famille des groupes  $\{\mathbf{Z}/p_k \mathbf{Z}; k \geq 1\}$  associée aux morphismes canoniques  $\mathbf{Z}/p_\ell \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/p_k \mathbf{Z}$  pour  $\ell \geq k$ . Les éléments de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  seront représentés sous la forme d'une suite  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$  avec les  $\alpha_k$  dans  $\{0, \dots, q_{k+1} - 1\}$ . La mesure de Haar de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  sera simplement notée  $h_{\mathbf{q}}$ . La décomposition des entiers  $n$  suivant la base variable  $\mathbf{q}$ , à savoir  $n = n_0 + n_1 p_1 + \cdots + n_k p_k$ ,  $0 \leq n_i < q_{i+1}$ ,  $n_k \neq 0$ , permet d'identifier  $\mathbf{N}_0$  dans  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ , ce que nous ferons. Pour tout  $\alpha$  de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ , posons  $\alpha^{(k)} := \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_{k-1} p_{k-1}$  ( $k \geq 1$ ). Lorsque  $\mathbf{q} := (1, q, q, q, \dots)$ , le groupe  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  sera noté  $\mathbf{Z}_q$  et sa mesure de Haar  $h_q$ . Dans ce groupe, l'opérateur de décalage consistant à transformer  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$  en  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$  sera noté  $S$ . Soit maintenant  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}} := (\tau, \mathbf{Z}_{\mathbf{q}})$ , l'odomètre défini par la translation  $\tau : g \mapsto g + 1$  sur  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ . Ce flot est dit associé à la partition  $(P_m)_m$  donnée plus haut; on sait qu'il est strictement ergodique, l'unique mesure de probabilité borélienne invariante étant la mesure de Haar. Le lemme suivant correspond à une version effective et en termes métriques du fait qu'une suite de Toeplitz régulière  $x$  (sur  $\mathbf{N}_0$  au lieu de  $\mathbf{Z}$ ) de période  $(r_m)_m$  donne un flot strictement ergodique  $\mathcal{K}(x)$  facteur d'un odomètre approprié (voir [13]). Un tel flot sera dit de Cantor pour mettre en évidence le caractère unilatéral de la suite et la mise en évidence de l'odomètre associé à la numération selon l'échelle de Cantor  $(r_m)_m$  (avec  $r_0 = 1 < r_1$  et  $r_m | r_{m+1}$ ). Un exemple de partition de  $\mathbf{N}_0$  vérifiant la définition 5.1 est donné pour chaque suite  $\mathbf{q} = (1, q_1, q_2, \dots)$  par les progressions arithmétiques

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}, s, k) := \sum_{0 \leq n < s} (q_{n+1} - 1)p_n + k p_s + p_{s+1} \mathbf{N}_0$$

pour  $s \geq 0$  et  $0 \leq k < q_{s+1} - 1$ , avec  $\mathcal{P}(\mathbf{q}, 0, k) = k + p_1 \mathbf{N}_0$ . Alors, la construction ci-dessus donne  $r_m = p_m$  et l'odomètre associé à cette cette partition est précisément  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}$ .

**Lemme 5.1.** Soit  $(P_m)_{m \geq 0}$  une partition régulière de  $\mathbf{N}_0$  en progressions arithmétiques et soit  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}}$  l'odomètre associé. Soit  $x : \mathbf{N}_0 \rightarrow X$  une suite non périodique, à valeurs dans un espace métrisable  $X$ , de valeur constante  $\xi_m$  sur  $P_m$ . Alors  $\mathcal{K}(x)$  est strictement ergodique et il existe un morphisme métrique de flots  $\psi : \mathcal{Z}_{\mathbf{q}} \rightarrow \mathcal{K}(x)$  et une partie  $\mathcal{U}$  de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ , ensemble de type  $G_\delta$  contenant  $\mathbf{N}_0$ , de mesure 1, tels que

- (j)  $\tau(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ ;
- (jj)  $\psi$  est continu en tout point de  $\mathcal{U}$ ;
- (jjj)  $\psi(\mathcal{U})$  est de mesure 1.

*Démonstration.* L'unique ergodicité de  $\mathcal{K}(x)$  se montre comme celle de  $\mathcal{K}(\Delta u)$  dans la démonstration du théorème 4.5, étape 3. La minimalité résulte directement de la propriété (ii) de la partition  $(P_m)_m$  qui montre que  $x$  est uniformément récurrente; les détails sont laissés aux soins du lecteur.

Soit  $a \geq 1$ ,  $k \geq 1$  et  $Q_k := \bigcup_{m < m_{k+1}} P_m$ , puis

$$\mathcal{O}_k^{(a)} = \{\alpha \in \mathbf{Z}_{\mathbf{q}}; \forall \ell \in \{0, \dots, a-1\}, \alpha^{(k)} + \ell \in Q_k\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{O}_k^{(a)}$  est un ouvert de  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ , de mesure  $h_{\mathbf{q}}(\mathcal{O}_k^{(a)}) \geq 1 - a\varepsilon_k$  avec  $\varepsilon_k = 1 - \sum_{m < m_{k+1}} r_m^{-1}$ . De plus, par construction, si  $\alpha \in \mathcal{O}_k^{(a)}$  et  $0 \leq \ell < a$ , on a  $\alpha + \ell \in \mathcal{O}_k^{(a-\ell)}$ . Remarquons les inclusions  $\mathcal{O}_k^{(a+1)} \subset \mathcal{O}_k^{(a)} \subset \mathcal{O}_{k+1}^{(a)}$  et posons

$$\mathcal{O}^{(a)} = \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{O}_k^{(a)}.$$

Cet ensemble est un ouvert, contenant  $\mathbf{N}_0$  (donc partout dense dans  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ ), de mesure 1 et  $\mathcal{O}^{(a+1)} \subset \mathcal{O}^{(a)}$ . L'ensemble  $G_\delta$ , défini par l'intersection

$$\mathcal{U} := \bigcap_{a \geq 1} \mathcal{O}^{(a)},$$

est aussi de mesure 1 et contient  $\mathbf{N}_0$ . Enfin, l'inclusion  $\mathcal{O}_k^{(a)} + 1 \subset \mathcal{O}_k^{(a-1)}$  ( $a \geq 1$ ) assure  $\tau(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ .

*Construction du morphisme  $\psi(\cdot)$ .* Du point de vue métrique, il suffit de construire  $\psi$  sur  $\mathcal{U}$ . Mais dans la pratique,  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}} \setminus \mathcal{U}$  ne rencontre qu'un nombre fini ou au plus dénombrable de classes modulo  $\mathbf{Z}$ . Nous donnerons donc, après la définition de  $\psi$  sur  $\mathcal{U}$ , une extension  $\psi'$  de  $\psi$  sur  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  ayant les propriétés demandées, à savoir  $\psi' \circ \tau = S \circ \psi'$  sur  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  et  $\psi'$  continu en les points de  $\mathcal{U}$  (au lieu de  $\psi'|_{\mathcal{U}}$  continu).

Soient  $\alpha \in \mathcal{U}$  et  $a \in \mathbf{N}$ . Il existe un entier  $k \geq 1$  tel que  $\alpha \in \mathcal{O}_k^{(a)}$ . Par construction, chaque entier  $\alpha^{(k)} + \ell$ , pour  $0 \leq \ell < a$ , appartient à une progression  $P_{\nu_k(\ell)}$  avec  $\nu_k(\ell) < m_{k+1}$ , de sorte que pour tout  $\beta \in \mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  tel que  $\alpha - \beta \in p_k \mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  on a, quel que soit  $h \geq k$ ,  $x_{\beta^{(h)} + \ell} = \xi_{\nu_k(\ell)}$  pour  $0 \leq \ell < a$ . Ainsi la suite  $k \mapsto S^{\alpha^{(k)}} x$  converge dans  $\mathcal{K}(x)$ . Notons  $\psi(\alpha)$  cette limite; elle vérifie par construction  $S(\psi(\alpha)) = \psi(\tau(\alpha))$ . Par ailleurs, soit  $(\beta_h)_h$  une suite dans  $\mathcal{U}$  qui converge vers  $\alpha$  dans  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ . Alors  $\lim_h \psi(\beta_h) = \psi(\alpha)$ . En effet, reprenons les entiers  $a$  et  $k$  précédents tels que  $\alpha$  soit dans  $\mathcal{O}_k^{(a)}$ . Il existe  $h_0$  tel que pour tout  $h \geq h_0$ , on ait simultanément

$\beta_h \in \mathcal{O}_k^{(a)}$  et  $\beta_h - \alpha \in p_k \mathbf{Z}_q$ . Mais alors, les  $\ell$ -ièmes coordonnées, pour  $0 \leq \ell < a$ , sont  $(\psi(\beta_h))_\ell = (\psi(\alpha))_\ell = \xi_{\nu_k(\ell)}$ , d'où la convergence de  $\psi(\beta_h)$  vers  $\psi(\alpha)$ .

Soit maintenant  $\beta$  dans  $\mathbf{Z}_q \setminus \mathbf{Z}$ . Par compacité, il existe une suite d'entiers  $(b_n)_n$  strictement croissante, telle que les suites  $n \mapsto x_{(\beta+k)(b_n)}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) convergent vers  $\ell_{\beta+k}$ . Comme  $\beta \notin \mathbf{Z}$ , pour tout  $\nu \in \mathbf{Z}$ , il existe  $n_0$  tel que  $(\beta + \nu)^{(b_n)} = \beta^{(b_n)} + \nu$  si  $n \geq n_0$ . Ceci montre que si  $\beta' = \beta + \nu$ ,  $\nu \in \mathbf{Z}$ , alors

$$\lim_n S^{\beta'^{(b_n)}}(x) = (\ell_{\beta+\nu}, \ell_{\beta+\nu+1}, \ell_{\beta+\nu+2}, \dots)$$

dans  $K_x$ . Choisissons enfin une suite strictement croissante d'entiers  $(k_n)_n$  telle que pour tout  $\nu \in \mathbf{Z}$ , les suites  $n \mapsto x_{p_{k_n} + \nu}$  convergent, de limites respectives  $\ell_\nu$ ; alors pour tout  $z \in \mathbf{Z}$ ,

$$\lim_n S^{p_{k_n} + z}(x) = (\ell_z, \ell_{z+1}, \ell_{z+2}, \dots)$$

dans  $K_x$ .

Dans chacun des cas précédents, si  $\beta' \in \mathcal{U}$  ou si  $z \in \mathbf{N}_0$  ( $\subset \mathcal{U}$ ), par construction  $\psi(\beta') = \lim_n S^{\beta'^{(b_n)}}(x)$  ainsi que  $\psi(z) = \lim_n S^{p_{k_n} + z}(x) = S^z(x)$ . Choisissons un système complet  $(\beta_i)_{i \in I}$  de représentant des classes de congruences dans  $\mathbf{Z}_q$  modulo  $\mathbf{Z}$  (ce choix peut se faire de manière à ce que l'ensemble  $\{b_i \in \mathbf{Z}_q; i \in I\}$  soit borélien). Pour chaque  $\beta_i$  envisageons la suite  $(b_{i,n})_n$  construite ci-dessus pour  $\beta_i = \beta \notin \mathbf{Z}$ . La classe de 0 sera représentée par 0. Pour tout  $\alpha \in \mathbf{Z}_q$  tel que  $\alpha \equiv \beta_i \pmod{\mathbf{Z}}$  posons

$$\psi'(\alpha) = \lim_n S^{\beta_i^{(b_{i,n})}}(x)$$

si  $\alpha \notin \mathbf{Z}$  et

$$\psi'(\alpha) = \lim_n S^{p_{k_n} + \alpha}(x)$$

si  $\alpha \in \mathbf{Z}$ . L'étude précédente montre que  $\psi'_{\mathcal{U}} = \psi$  et  $\psi' \circ \tau = S \circ \psi'$ . Enfin, si  $\alpha$  appartient à  $\mathcal{U}$  et  $(\beta_h)_h$  converge dans  $\mathbf{Z}_q$  vers  $\alpha$  alors, dès que  $\beta_h$  appartient à l'intersection  $\mathcal{O}_k^{(a)} \cap (\alpha + p_{k+1} \mathbf{Z}_q)$ , on obtient  $(\psi'(\beta_h))_\ell = (\psi(\alpha))_\ell = \xi_{\nu_k(\ell)}$  pour  $0 \leq \ell < a$ , ce qui assure la continuité de  $\psi'$  en  $\alpha$ . Il reste à démontrer que  $m_u(\psi(\mathcal{U})) = 1$ . L'unique ergodicité donne  $\mathbf{h}_q \circ \psi'^{-1} = m_u$ , de sorte que  $m_u(\psi(\mathcal{U})) = \mathbf{h}_q(\psi'^{-1} \circ \psi(\mathcal{U})) \geq \mathbf{h}_q(\mathcal{U}) = 1$ . ■

**Remarque 5.1.** Dans le cas d'une suite chaînée  $u$ , on a vu que  $\Delta u$  satisfait aux conditions du lemme 5.1. Plus précisément, la suite  $\Delta u$  est constante sur chacune des progressions  $P(m, a, b)$  données en (24) où elle prend la valeur  $(u_{\alpha_m(a,b)})^{-1} u_{(a+1)q^m + bq^{m+1}}$  avec

$$\alpha_m(a, b) := \left( \sum_{0 \leq \ell < m} (q-1)q^\ell \right) + aq^m + bq^{m+1}.$$

Pour la partition de  $\mathbf{N}_0$  qui en résulte, dont les éléments seront indexés de manière croissante par les  $\alpha_m(a, b)$ , on a immédiatement  $\mathbf{q} = (1, q^2, q, \dots)$ ; ici le groupe  $\mathbf{Z}_q$  est canoniquement isomorphe au groupe  $\mathbf{Z}_q$  des entiers  $q$ -adiques (correspondant à la suite  $(1, q, q, q, \dots)$ ) et  $\mathcal{O}^{(1)} = \mathbf{Z}_q \setminus \{-1\}$  puisque  $(-1)^{(k)} = (q-1) + \dots + (q-1)q^k$ . Enfin,  $\mathcal{U} = \mathbf{Z}_q \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$  et pour  $\alpha \in P(m, a, b) + q^{m+2} \mathbf{Z}_q$  la construction de  $\psi$  donne  $\psi(\alpha)_0 = \Delta u(\alpha_m(a, b))$ .

## 5.2 Structure d'un flot de Cantor

Poursuivons l'étude du flot de Cantor  $\mathcal{K}(x)$ , la suite  $x$  satisfaisant toujours aux conditions du lemme 5.1. Celles-ci impliquent la propriété suivante : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $m \geq 1$  et une suite périodique  $x^{(m)}$  de période  $r_m$  telle que  $\sum_{k=m+1}^{\infty} r_m^{-1} \leq \varepsilon$  et  $x^{(m)}$  coïncide avec  $x$  sur  $R_m := P_0 \cup \dots \cup P_m$ . En conséquence, toute suite  $y$  de l'orbite fermée  $K_x$  vérifie la même propriété et plus précisément il existe  $k := k(y, \varepsilon)$ ,  $0 \leq k < r_m$  tel que  $y$  coïncide avec  $S^k x^{(m)}$  sur  $(R_m - k) \cap \mathbf{N}_0$  et donc coïncide aussi avec  $S^k x$  sur  $(R_m - k) \cap \mathbf{N}_0$ . Si les valeurs  $\xi_m$  sont toutes distinctes, alors le choix de  $k$  est unique, ce qui donne un procédé pour identifier  $\mathcal{K}(x)$  à  $\mathbf{Z}_q$ . Dans le cas général,  $\mathcal{K}(x)$  étant un facteur de  $\mathbf{Z}_q$ , il est de spectre ponctuel pur contenu dans celui de l'odomètre  $\mathbf{Z}_q$ , il est donc isomorphe à un odomètre  $\mathbf{Z}_{q'}$  avec  $q'_n$  diviseur de  $q$ . Nous allons examiner de plus près cet isomorphisme en le construisant effectivement. Dans ce but, introduisons une distance  $d$  pour la topologie de  $X$ , et sur  $K_x$  définissons la pseudo-distance

$$D(y, y') := \limsup_N \frac{1}{N} \sum_{n < N} d(y_n, y'_n).$$

En fait, le caractère presque périodique mis en évidence précédemment montre d'une part, que cette limite supérieure est de fait une limite et d'autre part, que l'application  $(y, y') \mapsto D(y, y')$  est continue. Formons l'espace quotient  $\tilde{K}_x$  en identifiant les points  $y$  et  $y'$  de  $K_x$  lorsque  $D(y, y') = 0$  et soit  $c : K_x \rightarrow \tilde{K}_x$  l'application canonique. Le nombre  $D(y, y')$  ne dépend que des classes  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  et détermine une distance  $\tilde{D}(\tilde{y}, \tilde{y}') = D(y, y')$  sur  $\tilde{K}_x$ .

**Proposition 5.1.** *Équipons  $\tilde{K}_x$  de la distance  $\tilde{D}$ , alors l'application canonique  $c : K_x \rightarrow \tilde{K}_x$  est continue. En particulier, l'espace métrique  $(\tilde{K}_x, \tilde{D})$  est compact.*

*Démonstration.* Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.2.** *Soit  $y \in K_x$  et  $Q_k = \bigcup_{m < m_{k+1}} P_m$ . Il existe un entier  $n_k \in \{0, 1, \dots, p_k - 1\}$  ( $p_k = r_{m_k}$ ) tel que pour tout entier  $n \geq 0$  de reste  $\hat{n} \in \{0, 1, \dots, p_k - 1\}$  modulo  $p_k$ , on ait*

$$n + n_k \in Q_k \Rightarrow y_n = y_{\hat{n}} \quad \& \quad y_{\hat{n}} = x_{n+n_k} \quad ( = x_{\widehat{n+n_k}} ).$$

En effet, par hypothèse, si  $\ell \in Q_k$  alors pour tout  $t \in \mathbf{N}_0$ ,  $x_\ell = x_{\ell+tp_k}$ . Soit alors  $(\ell_n)_n$  une suite croissante d'entiers telle que la suite  $(S^{\ell_n} x)_n$  converge vers  $y$  dans  $K_x$ . Quitte à choisir une suite extraite, on peut supposer  $\ell_n \equiv \ell_0 \pmod{p_k}$  pour tout  $n \geq 0$ , d'où l'implication du lemme avec  $n_k = \ell_0$ . CQFD.

Établissons maintenant la continuité de  $c(\cdot)$ . Soient  $\eta > 0$ ,  $y$  et  $y'$  dans  $K_x$  tels que  $d(y_\ell, y'_\ell) \leq \eta$  pour tout  $0 \leq \ell < p_k$ . D'après le lemme 5.2, il existe  $n_k$  et  $n'_k$  dans  $\{0, \dots, p_k - 1\}$  tels que  $y_n = y_{\hat{n}+n_k}$  et  $y'_n = x_{\hat{n}+n'_k}$  pour tout  $n \in (Q_k - n_k) \cap (Q_k - n'_k)$ ; d'où pour tout  $t \in \mathbf{N}_0$ ,

$$\text{card}\{\ell \in \mathbf{N}_0; t \leq \ell < t + p_k \text{ \& } d(y_\ell, y'_\ell) \leq \eta\} \leq p_k - 2\varepsilon_k p_k$$

avec  $\varepsilon_k = 1 - \sum_{m < m_{k+1}} r_m^{-1}$ . Soit  $\delta$  le diamètre de  $X$ , alors  $D(y, y') \leq \eta(1 - 2\varepsilon_k) + 2\delta\varepsilon_k$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , choisissons  $\eta$  et  $k$  tels que  $\varepsilon_k \leq \frac{\varepsilon}{4\delta+1}$  et  $\eta \leq \varepsilon/2$ . Alors,  $\max_{0 \leq \ell < p_k} d(y_\ell, y'_\ell) \leq \eta$  implique  $D(y, y') \leq \varepsilon$ . ■

Le décalage  $S$  induit sur  $\tilde{K}_x$  une transformation  $\tilde{S}$  qui est une isométrie pour la distance  $\tilde{D}$ . Par minimalité  $\tilde{S}(\tilde{K}_x) = \tilde{K}_x$ , et par suite  $\tilde{\mathcal{K}}(x) := (\tilde{S}, \tilde{K}_x)$  est un flot isométrique strictement

ergodique sur un espace métrique compact. On retrouve ainsi le fait, déjà observé, que  $\widetilde{\mathcal{K}}(x)$  est isomorphe à une rotation minimale sur un groupe abélien compact. Nous allons établir ce résultat de manière plus explicite.

**Théorème 5.1.** *Soit  $x : \mathbf{N}_0 \rightarrow X$  une suite vérifiant les hypothèses du lemme 5.1. Alors, avec les notations et définitions précédentes :*

(i) *l'application canonique  $c : K_x \rightarrow \widetilde{K}_x$  détermine un morphisme continu du flot  $\mathcal{K}(x)$  sur le flot  $\widetilde{\mathcal{K}}(x)$ , qui est injectif sur  $\psi(\mathcal{U})$  ( $\psi$  et  $\mathcal{U}$  étant définis au lemme 5.1), et réalise un isomorphisme métrique. De plus,  $\widetilde{\mathcal{K}}(x)$  étant identifié à une rotation minimale sur un groupe abélien métrisable compact, le morphisme de flot métrique  $C = c \circ \psi$  est un homomorphisme continu de groupes.*

(ii)  *$\mathcal{K}(x)$  est de spectre discret pur continu (i.e., les fonctions propres peuvent être choisies continues) et il existe une partition de  $\mathbf{N}_0$  en progressions arithmétiques  $(P'_m)_m$  ( $m \geq 0$ ) sur chacune desquelles  $x$  est constante et dont l'odomètre associé  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}'}$  est topologiquement conjugué à  $\widetilde{\mathcal{K}}(x)$ .*

*Démonstration.* On a déjà vu que l'application canonique  $c(\cdot)$  est continue et le fait qu'elle soit surjective et commute avec les décalages est immédiat. Complétons la démonstration de (i). Pour tout entier  $n$  et  $m$ , le lemme 5.2 donne l'implication

$$n \equiv m \pmod{p_k} \Rightarrow D(S^n x, S^m x) \leq 2\varepsilon_k. \quad (26)$$

Il en résulte que l'application  $n \mapsto \widetilde{S}^n x$  se prolonge en un homomorphisme surjectif continu  $C : \mathcal{Z}_{\mathbf{q}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{K}}(x)$  tel que  $C(0) = \tilde{x}$  ( $\widetilde{K}_x$  étant identifié à un groupe abélien compact d'élément neutre  $\tilde{x}$ ). Soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathcal{U}$  tels que  $a = \psi(\alpha) \neq \psi(\beta) = b$  et soit  $s \in \mathbf{N}_0$  tel que  $a_s \neq b_s$ . Par définition de  $\mathcal{U}$ , on a  $a = \lim_{\ell} S^{\alpha^{(\ell)}}(x)$ ,  $b = \lim_{\ell} S^{\beta^{(\ell)}}(x)$  et

$$\alpha^{(k)} + s \in \bigcup_{m < m_{k+1}} P_m, \quad \beta^{(k)} + s \in \bigcup_{m < m_{k+1}} P_m$$

pour  $k$  assez grand. Comme  $\alpha^{(k)} \equiv \alpha^{(\ell)} \pmod{p_k}$  et  $\beta^{(k)} \equiv \beta^{(\ell)} \pmod{p_k}$  pour tout  $\ell \geq k$ , le lemme 5.2 donne

$$D(S^{\alpha^{(\ell)}}(x), S^{\beta^{(\ell)}}(x)) \geq \frac{1}{p_k} d(a_s, b_s),$$

inégalité qui se conserve par passage à la limite, d'où  $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ . Ainsi  $c(\cdot)$  est injective sur  $\psi(\mathcal{U})$ , mais de plus,  $C = c \circ \psi$  sur  $\mathcal{U}$ . En fait,  $C = c \circ \psi$  sur  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ . En effet, pour  $\alpha \in \mathbf{Z}_{\mathbf{q}} \setminus \mathcal{U}$  on a choisi  $\psi(\alpha)$  comme limite d'une suite  $(S^{e_n}(x))_n$  où les  $e_n$  sont les termes successifs d'une suite d'entiers qui converge vers  $\alpha$  dans  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ . D'après (26), la classe  $\widetilde{\psi(\alpha)}$  ne dépend pas du choix de  $(e_n)_n$  et par passage à la limite :

$$\alpha \equiv \beta \pmod{p_k \mathbf{Z}_{\mathbf{q}}} \Rightarrow \widetilde{D}(\widetilde{\psi(\alpha)}, \widetilde{\psi(\beta)}) \leq \varepsilon_k,$$

d'où la continuité de  $c \circ \psi$ , qui s'identifie ainsi à  $C$ , ce qui termine la démonstration de (i).

La première partie de (ii) résulte de la continuité de  $c$  et du fait que  $\mathcal{K}(x)$  est métriquement isomorphe à  $\widetilde{\mathcal{K}}(x)$  qui est à spectre discret pur continu. L'application canonique étant continue, les fonctions propres (continues) de  $\widetilde{\mathcal{K}}(x)$  se remontent en fonctions propres continues de  $\mathcal{K}(x)$ .

Voyons la construction de la partition  $(P'_m)_m$ . Quitte à remplacer les sous-suites finies de progressions  $P_{n_1}, \dots, P_{n_s}$  ( $m_k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s < m_{k+1}$ ) par la réunion  $P_{n_1} \cup \dots \cup P_{n_s}$  si celle-ci forme une progression arithmétique de raison  $p_{k-1}$  sur laquelle  $x$  est constante, on peut supposer que le choix de la partition  $(P_m)_m$  est telle que les progressions  $P_{m_k}, P_{m_k+1}, \dots, P_{m_{k+1}-1}$  soient les seules progressions arithmétiques de raison  $p_k$  sur lesquelles  $x$  est constante. Puisque  $p_k = p_{k-1}q_k$ , il existe un plus petit entier  $q'_k > 1$  tel que  $q'_k | q_k$  et  $P_{m_k} \cup P_{m_k+1} \cup \dots \cup P_{m_{k+1}-1}$  admet une partition en progressions arithmétiques de raison  $p_{k-1}q'_k$  sur lesquelles  $x$  est constante. Cette construction vaut pour  $k = 1$ , ce qui donne  $p'_1 = q'_1$  et une partition de  $\mathbf{N}_0$  en progressions arithmétiques  $\{P'_{m'_1}, \dots, P'_{m'_2-1}, P_{m_2}, P_{m_2+1}, \dots\}$ . On construit ainsi, de proche en proche, une suite de partitions de  $\mathbf{N}_0$  en progressions arithmétiques  $\{P'_{m'_1}, \dots, P'_{m'_2}, \dots, P'_{m'_k-1}, P'_{m'_k}, \dots, P'_{m'_{k+1}-1}, P'_{m_{k+1}}, P_{m_{k+1}+1}, \dots\}$  ( $m'_1 = 0$ ) d'où l'on extrait la partition  $(P'_m)_{m \geq 0}$  de  $\mathbf{N}_0$  formée de progressions arithmétiques de raisons  $r'_m$  sur chacune desquelles  $x$  est constante et possède les propriétés suivantes :

(a) la partition est régulière ;

(b) soient  $(m'_k)_k, (p'_k)_k$ , les suites des entiers associés à  $(P'_m)_{m \geq 0}$  comme pour  $(P_m)_{m \geq 0}$ , alors

(b<sub>1</sub>) aucune réunion  $P'_{n_1} \cup \dots \cup P'_{n_s}$  avec  $m'_k \leq n_1 < \dots < n_s < m'_{k+1}$  ne forme une progression de raison  $r_{m'_{k-1}}$  sur laquelle  $x$  est constante ;

(b<sub>2</sub>) la réunion

$$P'_{m'_k} \cup P'_{m'_{k+1}} \cup \dots \cup P'_{m'_{k+1}-1}$$

n'admet pas de partition en progressions arithmétiques de raisons  $p'_{k-1}q''_k$ , avec  $q''_k$  diviseur strict de  $q_k$ , sur chacune desquelles  $x$  est constante.

Notons maintenant  $(P_m)_{m \geq 0}$  la partition  $(P'_m)_{m \geq 0}$  (en supprimant les primes) vérifiant (a) et (b), et reprenons les constructions précédentes. Montrons que  $C : \mathbf{Z}_{\mathbf{q}} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}(x)$  est un isomorphisme. Soit  $\beta \in \mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  tel que  $C(\beta) = \tilde{x}$  (élément neutre de  $\tilde{\mathcal{K}}(x)$ ). Posons  $\psi(\beta) = x'$ , de sorte que  $\tilde{x}' = \tilde{x}$ . Soit  $(b_n)_{n \geq 0}$  une suite d'entiers qui converge vers  $\beta$  dans  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ . D'après le lemme 5.2,  $k$  étant fixé, il existe  $n_k \in \{0, \dots, p_k - 1\}$  tel que  $b_n \equiv n_k \pmod{p_k}$  pour une infinité d'entiers  $m$  qui satisfont en outre aux égalités  $(S^{b_m}x)_\ell = x_{\ell+n_k}$  pour tout entier  $\ell$  tel que  $\ell + n_k \in Q_k (= \bigcup_{m < m_{k+1}} P_m)$ . Par passage à la limite, on obtient  $x'_\ell = x_\ell$  pour  $\ell' - \ell \equiv n_k \pmod{p_k}$  et  $\ell' \in Q_k$ . Mais  $x'_\ell = x_\ell$  pour tous les entiers  $\ell$  en dehors d'une partie de densité nulle, de sorte que  $x_\ell = x_{\ell'}$  pour tout  $\ell$  et  $\ell'$  tels que  $\ell' - \ell \equiv n_k \pmod{p_k}$  et  $\ell' \in Q_k$ .

Pour une quelconque progression arithmétique  $Q$  dans  $\mathbf{N}_0$  dont le plus petit élément est strictement inférieur à la raison  $r$  et pour tout entier  $n$ , notons  $Q \oplus n$  la progression arithmétique  $(Q + n + r\mathbf{Z}) \cap \mathbf{N}_0$ . Considérons alors  $\Gamma_k := \{P_{m_k}, P_{m_k+1}, \dots, P_{m_{k+1}-1}\}$  et  $P$  une des progressions arithmétiques parmi les  $P_m$  de raison  $p_k$  telle que  $P \oplus n_k$  appartienne à  $\Gamma_k$ . D'après ce qui vient d'être établi sur l'égalité entre  $x_\ell$  et  $x_{\ell'}$ , la suite  $x$  est constante sur  $P \cup (P \oplus n_k)$  et la propriété (b<sub>1</sub>) entraîne  $P \in \Gamma_k$ . Par suite  $P \mapsto P \oplus n_k$  forme une bijection sur  $\Gamma_k$  et pour  $P \in \Gamma_k$ ,  $x$  reste constant sur l'orbite  $\bigcup_{s \geq 0} P \oplus sn_k$ . Cette orbite se présente comme union de progressions de raison  $p_{k-1}q'_k$  avec  $q'_k$  diviseur strict de  $q_k$  si  $n_k \not\equiv 0 \pmod{p_k}$ . La propriété (b<sub>2</sub>) assure donc  $n_k \equiv 0 \pmod{p_k}$ . On peut ainsi choisir la suite  $(b_n)_n$  convergente vers 0 dans  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$ , ce qui signifie  $\beta = 0$  et termine la démonstration de (ii). ■

Nous appliquons maintenant le théorème 5.1 pour préciser la structure d'un flot chaîné.

## 6 Produits croisés

### 6.1 Construction d'un produit croisé et quasi-continuité uniforme

**Définition 6.1.** On appelle produit croisé, au dessus de l'odomètre  $\mathcal{Z}_q$  suivant une application borélienne  $\varphi : \mathbf{Z}_q \rightarrow G$ , le système dynamique  $\mathcal{T}(q, \varphi) := (\tau_\varphi, \mathbf{Z}_q \times G, h_{\mathbf{Z}_q} \otimes h_G)$  défini par

$$\tau_\varphi(\alpha, g) := (\alpha + 1, g\varphi(\alpha)). \quad (27)$$

Cette définition est cohérente en ce sens que la mesure produit  $h_{\mathbf{Z}_q} \otimes h_G$  est bien invariante par  $\tau_\varphi$ . Soit  $u : \mathbf{N}_0 \rightarrow G$  une suite chaînée en base  $q$ . Pour  $a, b$  entiers tels que  $0 \leq a < q - 1$  et  $0 \leq b \leq q - 1$  posons

$$\mathcal{O}_k(a, b) = \alpha_k(a, b) + q^{k+2}\mathbf{Z}_q, \quad (k \geq 0)$$

avec  $\alpha_k(a, b) = \sum_{0 \leq \ell < k} (q-1)q^\ell + aq^k + bq^{k+1}$ . Les ensembles  $\mathcal{O}_k(a, b)$  sont des ouverts deux à deux disjoints, dont la réunion est  $\mathbf{Z}_q \setminus \{-1\}$ . D'après le théorème 4.5, ou pour être plus précis, sa démonstration, la suite  $\Delta u : n \mapsto u_n^{-1}u_{n+1}$  est constante sur les progressions arithmétiques  $\mathbf{N}_0 \cap \mathcal{O}_k(a, b)$ . Définissons maintenant  $\Phi_u : \mathbf{Z}_q \rightarrow G$  par

$$\Phi_u(\alpha) := \begin{cases} \Delta u(\alpha_k(a, b)) & \text{si } \alpha \equiv \alpha_k(a, b) \pmod{q^{k+2}\mathbf{Z}_q}, \\ \Delta u(q-1) & \text{si } \alpha = -1. \end{cases} \quad (28)$$

**Proposition 6.1.** L'application  $\Phi_u$  est continue sur  $\mathbf{Z}_q \setminus \{-1\}$  et  $\Phi_u(n) = \Delta u(n)$  pour tout entier  $n \geq 0$ .

*Démonstration.* Résulte immédiatement des définitions et du fait que  $\mathbf{Z}_q \setminus \{-1\}$  est la réunion des ouverts  $\mathcal{O}_k(a, b)$ . ■

Lorsque  $\varphi = \Phi_u$  dans la définition du produit croisé, nous noterons simplement  $\tau_u$  au lieu de  $\tau_{\Phi_u}$ . Notre objectif est d'étudier le produit croisé  $\mathcal{T}(q, \Phi_u)$  et d'identifier les cas où il est métriquement isomorphe à  $\mathcal{K}(\Delta u) \square G$ .

**Théorème 6.1.** Soit  $u$  une suite chaînée dans  $G$ . La transformation  $\tau_u : \mathbf{Z}_q \times G \rightarrow \mathbf{Z}_q \times G$  définie en (27) avec  $\varphi = \Phi_u$  est uniformément  $\tau_u$ -quasicontinue. Si de plus  $\mathcal{T}(q, \Phi_u)$  est ergodique, alors il est uniquement ergodique et tous les points  $(\alpha, g)$  de  $\mathbf{Z}_q \times G$  sont uniformément génériques c'est-à-dire, pour toute application continue  $f : \mathbf{Z}_q \times G \rightarrow \mathbf{C}$ ,

$$\lim_N \left( \sup_k \frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} f(\tau_u^{n+k}(\alpha, g)) - \int_{\mathbf{Z}_q \times G} f d(h_q \otimes h_G) \right) = 0.$$

*Démonstration.* L'ensemble des points de discontinuité de  $\tau_u$  est inclus dans  $\{-1\} \times G$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une application continue  $f : \mathbf{Z}_q \rightarrow [0, 1]$  telle que  $f(-1) = 1$  et  $\int_{\mathbf{Z}_q} f(\alpha) h_{\mathbf{Z}_q}(d\alpha) \leq \varepsilon$ . Puisque l'odomètre est un flot uniquement ergodique, les moyennes  $\frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} f \circ \tau^n$  convergent uniformément vers  $\int_{\mathbf{Z}_q} f(\alpha) h_{\mathbf{Z}_q}(d\alpha)$ . Avec l'application  $\psi : (\alpha, g) \mapsto f(\alpha)$ , il vient  $\lim_N \|\frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} \psi \circ \tau_u^n\|_\infty \leq \varepsilon$  prouvant l'uniforme  $\tau_u$ -quasicontinuité de  $\tau_u$ . Maintenant,  $\mathcal{T}(q, \Phi_u)$  étant ergodique, on sait qu'il est uniquement ergodique ([19], Corollaire 2.2) et par le théorème 4.1, tous les points sont uniformément génériques. ■

Dans la suite, nous distinguerons essentiellement trois cas disjoints : le cas où la suite chaînée est périodique, le cas où elle est contractante et le cas où elle est non contractante non périodique.

## 6.2 Flot d'une suite chaînée périodique

**Théorème 6.2.** Soit  $u : \mathbf{N}_0 \rightarrow G$  une suite chaînée en base  $q$ , de matrice de transition  $T$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  est périodique de période  $q(q-1)$  ;
- (ii) l'élément  $g := {}^1T_0$  est d'ordre un diviseur de  $q-1$  et  ${}^iT_j = g^i$  pour tout couple  $(i, j)$ ,  $0 \leq i, j < q$  ;
- (iii) il existe un élément  $g$  de  $G$  d'ordre diviseur de  $q-1$  tel que pour tout entier  $n \in \mathbf{N}_0$ , on ait  $u(n) = g^n g^{-e_0(n)} u(e_0(n))$  où  $e_0(n)$  est le chiffre des unités de  $n$  dans la base  $q$  ;
- (iv) l'application  $\Phi_u : \mathbf{Z}_q \rightarrow G$  définie par (28) est continue ;
- (v) l'application  $\Phi_u$  (voir (28)) restreinte à  $\mathbf{Z}_q \setminus \{-1\}$  admet une limite en  $-1$ .

*Démonstration.* Notons  $f_u$  l'application chaînée régulière à gauche définie par  $u$ .

a) Supposons  $u$  périodique admettant la période  $q(q-1)$ . Alors pour tous les entiers  $a$  et  $b$  tels que  $0 < a \leq q-1$  et  $0 \leq b \leq q-1$ , on a grâce, à la périodicité,  $f_u(ab) = f_u(1(a-1)b) = f_u(10(a-1)b) = {}^1T_0 f_u((a-1)b)$  d'où  ${}^aT_b = {}^1T_0 ({}^{a-1}T_b)$  et par itération  ${}^aT_b = ({}^1T_0)^a ({}^0T_b) = ({}^1T_0)^a$  ce qui amène à prendre  $g = {}^1T_0$ . Par définition de  $T$  et la périodicité de  $u$ , on a successivement  ${}^{a-1}T_0 = f_u((q-1)0) f_u(0)^{-1} = u(q(q-1)) u(0)^{-1} = 1_G$ , ce qui donne  $g^{q-1} = 1_G$  et termine la démonstration de (ii).

b) Supposons la propriété (ii) vérifiée. Alors

$$f_u(e_k \cdots e_0) = g^{e_k + \cdots + e_1 + e_0} g^{-e_0} u(e_0),$$

ce qui donne (iii) puisque  $g^q = g$ . Notons au passage le lien de  $u$  avec la somme des chiffres.

c) Supposons (iii), alors pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $\Phi_u(\alpha_k(a, b)) = u(q-1)^{-1} g u(0) = u(q-1)^{-1} u(q) = \Delta u(q-1)$ . Ainsi  $\Phi_u$  vaut  $\Phi_u(-1)$  sur les ouverts  $\mathcal{O}_k(a, b)$ ,  $k \geq 1$ ,  $0 \leq a < q-1$  et  $0 \leq b \leq q-1$ . Leur réunion avec  $\{-1\}$  forme un voisinage ouvert de  $-1$ . Sur les autres ouverts  $\mathcal{O}_0(a, b)$ ,  $\Phi_u$  est constante, d'où la continuité de  $\Phi_u$  ce qui démontre (iv), mais aussi (v).

d) Supposons (v) c'est-à-dire l'existence de la limite  $\ell := \lim_{\substack{\alpha \rightarrow -1 \\ \alpha \neq -1}} \Phi_u(\alpha)$ . Remarquons que la propriété de chaînage donne, pour  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_u(\alpha_k(a, b)) &= f_u(ba(q-1)^k)^{-1} f_u(b(a+1)0^k) \\ &= [f_u(q-1)^{-1} ({}^{q-1}T_{q-1})^{-k+1} f_u(q-1)] f_u(ba(q-1))^{-1} f_u(b(a+1)0). \end{aligned}$$

Posons  $M_q = f_u(q-1)^{-1} ({}^{q-1}T_{q-1})^{-1} f_u(q-1)$  de sorte que

$$\Phi_u(\alpha_k(a, b)) = (M_q)^{k-1} f_u(ba(q-1))^{-1} f_u(b(a+1)0). \quad (29)$$

Dans  $\mathbf{Z}_q$ , on a  $\lim_k \alpha_k(a, b) = -1$  indépendamment des choix de  $a$  et  $b$ . D'après (29), nécessairement  $M_q = 1_G$ , donc  ${}^{q-1}T_{q-1} = 1_G$ , c'est-à-dire  $f_u(q-1) = f_u((q-1)(q-1))$  et pour  $0 \leq a < q-1$ ,  $0 \leq b \leq q-1$ , on a

$$f_u(ba(q-1)) = f_u(b(a+1)0) \ell^{-1}. \quad (30)$$

En particulier  $f_u(a(q-1)) = f_u((a+1)0) \ell^{-1}$  et en développant (30),  ${}^bT_a = {}^bT_{a+1}$ . La ligne  $b$  dans  $T$  est donc constante, notons  $C_b$  cette constante et revenons sur (30) pour  $0 \leq a < q-1$  :

$${}^bT_a {}^aT_{q-1} f_u(q-1) = {}^bT_{a+1} ({}^{a+1}T_0) f_u(0) \ell^{-1}$$

soit encore

$$C_b C_a f_u(q-1) = C_b C_{a+1} f_u(0) \ell^{-1}$$

d'où  $C_{a+1} = C_a f_u(q-1) \ell f_u(0)^{-1}$ . Par ailleurs  $C_0 = 1_G$  et rappelons que  ${}^{q-1}T_{q-1} = 1_G$ . Posons

$$g := f_u(q-1) \ell f_u(0)^{-1};$$

il vient

$${}^i T_j = g^i \quad \text{et} \quad g^{q-1} = 1_G,$$

ce qui démontre (iii).

e) Il est clair que (iii) entraîne (i). L'équivalence des propriétés (i) à (v) s'en déduit. ■

**Corollaire 6.1.** *Si la suite chaînée satisfait à l'une des conditions du théorème 6.2, alors elle n'est pas contractante (sauf si  $G$  se réduit au groupe trivial).*

*Démonstration.* En effet, la matrice de transition  $T$  de la suite donnée par (ii) dans le théorème 6.2 est

$$T = \begin{pmatrix} 1_G & \cdots & 1_G \\ g & \cdots & g \\ \vdots & & \vdots \\ g^{q-1} & \cdots & g^{q-1} \end{pmatrix}$$

d'où, pour toute représentation  $\rho \in \Lambda(G)$  de dimension  $s$ ,

$$\rho T = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_s & & & \\ \rho(g) & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & \rho(g)^{q-2} & \\ & & & \mathbf{1}_s \end{pmatrix} \rho T^* \quad \text{avec} \quad T^* = \begin{pmatrix} 1_G & \cdots & 1_G \\ 1_G & \cdots & 1_G \\ \vdots & & \vdots \\ 1_G & \cdots & 1_G \end{pmatrix};$$

par suite  $\|\rho T\| = q$ . ■

Si la suite chaînée satisfait à l'une des conditions du théorème 6.2, alors  $K_u$  est constitué de  $q'd$  orbites  $\{u, Su, \dots, S^{q'd-1}u\}$  où  $d$  divise  $q-1$  ( $d$  est l'ordre de  $g$  (cf. (iii)),  $q'$  (diviseur de  $q$ ) étant la période minimale de  $p : n \mapsto g^{-e_0(n)}u(e_0(n))$ ). Décomposons  $u$  en le produit  $u = v.p$  où  $v : n \mapsto g^n$  est périodique de période  $d$ . On a  $K_v = \{v, g.v, \dots, g^{d-1}.v\}$ ,  $\Delta v$  est la suite constante  $n \mapsto g$  et de manière immédiate  $\mathcal{K}(v)$  correspond à la multiplication par  $g$  des orbites de  $K_v$  de sorte que  $\mathcal{K}(v)$  est conjugué à la translation  $x \mapsto x+1$  sur le groupe  $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ . Le flot  $\mathcal{K}(p)$  est constitué des  $q'$  orbites  $K_p = \{p, Sp, \dots, S^{q'-1}p\}$  sur lequel le décalage  $S$  effectue une permutation circulaire. Finalement, puisque  $d$  et  $q'$  sont premiers entre eux, le produit direct  $\mathcal{K}(v) \times \mathcal{K}(p)$  est conjugué à  $\mathcal{K}(u)$  par l'application  $(\omega, \omega') \mapsto \omega.\omega'$ .

**Remarque 6.1.** Si  $u$  est chaînée périodique, avec les notions précédentes, l'espace des orbites  $K_u$  est invariant par l'action du sous-groupe cyclique  $[g]$  de  $G$ . Si  $[g] = G$ , le flot  $\mathcal{K}(u)$  est conjugué par  $J : \omega \rightarrow (\Delta\omega, \omega_0)$  au produit croisé standard  $\mathcal{K}(\Delta u) \square [g]$ ; mais si  $u$  prend des valeurs n'appartenant pas à  $[g]$  (et provenant de  $u(e_0(n))$ ), alors l'image par  $J$  dans  $K_{\Delta u} \times G$  n'est plus un produit direct. En fait, avec la décomposition  $u(n) = g^n p(n)$ , on a  $J(K_u) = \bigcup_{0 \leq k < q} \{S^k \Delta u\} \times [g]p(k)$ . Mais on peut restaurer le produit direct en conjuguant  $J(K_u)$  avec le produit direct  $(T, K_{\Delta u} \times [g])$  défini par  $T(\omega, \gamma) = (S\omega, \gamma g)$ . Cette conjugaison, donnée par l'application  $H(S^k(\Delta u), \gamma p(k)) = (S^k(\Delta u), \gamma)$ , résulte du fait que  $\Delta u(n) = p(n)^{-1} g p(n+1)$ .

### 6.3 Flot d'une suite chaînée contractante

Pour toute suite chaînée contractante, nous savons déjà que le flot  $\mathcal{K}(u)$  est strictement ergodique (théorème 4.5). Nous allons identifier ce flot à un produit croisé au-dessus de l'odomètre  $\mathcal{Z}_q$ .

**Théorème 6.3.** *Soit  $u$  une suite chaînée en base  $q$ , à valeurs dans un groupe métrisable compact  $G$ , de matrice de transition contractante. Avec les notations et définitions précédentes :*

- (i)  $\tilde{\mathcal{K}}(\Delta u)$  est topologiquement conjugué à  $\mathcal{Z}_q$ ;
- (ii) le flot métrique  $(S, K_u, m_u)$  est conjugué (au sens métriquement) au produit croisé  $\mathcal{Z}_q \square_u G = (\tau_u, \mathbf{Z}_q \times G, h_{\mathbf{Z}_q} \otimes h_G)$  défini par

$$\tau_u(\alpha, g) := (\alpha + 1, g\Phi_u(\alpha)), \quad (31)$$

la mesure produit  $h_{\mathbf{Z}_q} \otimes h_G$  étant l'unique mesure de probabilité borélienne sur  $\mathbf{Z}_q \times G$  invariant par  $\tau_u$ ;

- (iii) La composante discrète du type spectral de  $\mathcal{K}(u)$  est donnée par celle de  $\mathcal{K}(\Delta u)$  (donc de  $\mathcal{Z}_q$ ) et la composante dans l'orthocomplément est continue.

*Démonstration.* (i) Soit  $(P_m)_{m \geq 0}$  la partition de  $\mathbf{N}_0$  formée des progressions arithmétiques  $P_k(a, b) := (\sum_{0 \leq \ell < k} (q-1)q^\ell) + aq^k + bq^{k+1} + q^{k+2}\mathbf{N}_0$  ( $0 \leq a < q-1$ ,  $a \leq b < q-1$  et  $k \geq 0$ ). Nous indexons ces progressions de manière à former une partition régulière. Déterminons maintenant, comme dans la démonstration du théorème 5.1, la partition  $(P'_m)_m$  qui satisfait aux conditions (a), (b). Si  $(m'_k), (p'_k)$  sont les suites d'entiers associées à  $(P'_m)_m$ , on a  $\tilde{\mathcal{K}}(\Delta u)$  topologiquement conjugué à  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}'}$  pour  $\mathbf{q}' = (1, q'_1, q'_2, \dots)$ ,  $q'_{k+1} = p'_{k+1}(p'_k)^{-1}$ . Pour que dans cette construction  $\mathcal{Z}_{\mathbf{q}'}$  s'identifie à  $\mathcal{Z}_q$  il faut, et il suffit, que pour tout entier  $s \geq 1$  il existe un index  $k$  tel que  $q^s | p'_k$ . La construction des  $p'_m$  peut, a priori, donner une suite finie. Dans ce cas, cela signifie qu'il existe un indice  $k$  tel que  $\Delta u$  est constante sur la progression arithmétique  $\sum_{0 \leq \ell \leq k} (q-1)q^\ell + q^{k+1}\mathbf{N}_0$ . Il en résulte que  $\Phi_u$ , restreinte à  $\mathbf{Z}_q \setminus \{-1\}$ , se prolonge par continuité en  $-1$ . Mais alors, d'après le corollaire 6.1, la matrice de transition n'est pas contractante, ce qui est exclu par hypothèse. La suite des progressions  $P'_m$  est donc infinie. Par construction, pour tout indice  $s \geq 1$ , il existe un indice  $k_s$  tel que

$$\bigcup_{0 \leq \ell < s} \bigcup_{0 \leq a < q-1} \bigcup_{0 \leq b < q-1} P_\ell(a, b) \subset \bigcup_{0 \leq m < m_{k_s}} P'_m.$$

Alors

$$P'_{m_{k_s}} \subset \sum_{0 \leq \ell \leq s} (q-1)q^\ell + q^s \mathbf{N}_0,$$

de sorte que  $q^s | p'_{k_s}$ .

(ii) Soit  $\psi : \mathcal{Z}_q \rightarrow \mathcal{K}(\Delta u)$  le morphisme de flots métriques construit au lemme 5.1. Par (i) et le théorème 6.2,  $\psi$  est une conjugaison métrique et pour  $\alpha \in P_k(a, b) + q^{k+2}\mathbf{Z}_q$ , par construction de  $\psi$  (remarque 5.1) et de  $\Phi_u$ , on a  $\psi(\alpha)_0 = \Phi_u(\alpha)$ . Définissons  $f : \mathbf{Z}_q \times G \rightarrow K_{\Delta u} \times G$  par  $f(\alpha, g) = (\psi(\alpha), g)$ . Pour  $\alpha \neq -1$  on a successivement

$$\begin{aligned} f(\tau_u(\alpha, g)) &= (\psi(\alpha + 1), g\Phi_u(\alpha)) \\ &= (S\psi(\alpha), g\psi(\alpha)_0) \\ &= S_0(\psi(\alpha), g) = S_0 \circ f(\alpha, g). \end{aligned}$$

Ainsi,  $f \circ \tau_u = S_0 \circ f$  sauf sur  $\{-1\} \times G$ . Par ailleurs  $(h_q \otimes h_G) \circ f^{-1} = h_q \circ \psi^{-1} \otimes h_G = m_{\Delta u} \otimes h_G$ , donc  $f$  réalise une conjugaison métrique entre  $\mathbf{Z}_q \square_u G$  et  $\mathcal{K}(\Delta u) \square G$ ; le théorème 4.5 entraîne donc que  $\mathbf{Z}_q \square_u G$  est ergodique. L'ensemble des points de discontinuité de  $\tau_u$  est égal à  $\{-1\} \times G$ , ces points provenant de la discontinuité de  $\Phi_u$  en  $-1$ . Par suite  $\tau_u$  est uniquement ergodique d'après [19] (corollaire 2.2) ou encore par le théorème 6.1, ce qui termine la démonstration de (ii).

(iii) Soit  $\zeta$  un nombre complexe de module 1 qui ne soit pas une valeur propre du système  $\mathcal{Z}_q$ . Notons  $[\zeta]$  le sous-groupe fermé de  $\mathbf{U}$  engendré par  $\zeta$  et  $\mathcal{R}_\zeta := (R_\zeta, [\zeta], h_{[\zeta]})$  la translation (ergodique)  $z \mapsto z\zeta$  sur  $[\zeta]$ . Montrons que tout point  $(\alpha, g, z)$  de  $\mathbf{Z}_q \times G \times [\zeta]$  est  $\tau_u \times R_\zeta$ -générique pour la mesure produit  $h_q \otimes h_G \otimes h_\zeta$ . Observons tout d'abord que

$$(\tau_u \times R_\zeta)^n(\alpha, g, z) = (\alpha + n, g\Phi_u^{(n)}(\alpha), z\zeta^n)$$

où  $\Phi_u^{(n)}(\alpha) := \Phi_u(\alpha) \cdots \Phi_u(\alpha + n - 1)$  ( $n \geq 1$ ), avec  $\Phi_u^{(0)}(\alpha) = 1_G$ . Par choix de  $\zeta$ , pour tout  $k \in \mathbf{Z}$  et tout caractère non trivial  $\chi$  de  $\mathbf{Z}_q$ , on a  $\chi(1)\zeta^k \neq 1$ , de sorte que

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n < N} \chi(\alpha + n) \zeta^{kn} = 0.$$

Grâce au critère de Weyl associé au théorème de Peter-Weyl ([17], chp 4, thm 1.3), il reste à montrer que pour toute représentation irréductible  $\rho : G \rightarrow \mathbf{U}_{s_\rho}$  et tout  $\xi \in \mathbf{U}$ , on a

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n < N} \xi^n \rho(g\Phi_u^{(n)}(\alpha)) = 0 \quad (32)$$

pour tout  $g \in G$  et tout  $\alpha \in \mathbf{Z}_q$ . Soit  $m \in \mathbf{N}_0$ , on a simplement  $\Phi_u^{(n)}(m) = u_m^{-1} u_{m+n}$  et par le théorème 3.3, il existe des constantes  $c > 0$  et  $\delta \in ]0, 1/2]$ , dépendantes de  $\rho$ , telles que

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n < N} \xi^n \rho(g\Phi_u^{(n)}(m)) \right\| \leq cN^{-\delta}, \quad (33)$$

la majoration étant uniforme en  $m$ . Choisissons  $\alpha \notin \{-1, -2, -3, \dots\}$ . L'application  $\Phi_u(\cdot)$  est continue en  $\alpha$  d'où (33) avec  $\alpha$  au lieu de  $m$ . Si  $\alpha$  est maintenant un entier négatif  $-m$ , pour tout  $N > m$  il vient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n < N} \xi^n \rho(g\Phi_u^{(n)}(-m)) \right\| &\leq \frac{N-m}{N} \left\| \frac{1}{N-m} \sum_{m \leq n < N} \xi^n \rho(\Phi_u^{(n-m)}(0)) \right\| + \frac{m}{N} \\ &\leq C(N-m)^{-\delta} + \frac{m}{N}. \end{aligned}$$

D'où (32) pour tout  $(\alpha, g, \xi) \in \mathbf{Z}_q \times G \times [\zeta]$ . Il en résulte que le produit  $\mathcal{Z}_q \square_u G \times \mathcal{R}_\alpha$ , où  $\mathcal{R}_\alpha$  est la rotation  $z \mapsto z\xi$  sur  $\mathbf{U}$ , est uniquement ergodique puisque tous les points sont génériques pour la même mesure. En particulier, la composante discrète du type spectral de  $\mathcal{Z}_q \square_u G$  ne provient que de la translation  $\mathcal{Z}_q$ . L'opérateur unitaire dans  $L^2(\mathbf{Z}_q \times G)$  associé à  $\tau_u$  est stable sur  $L^2(\mathbf{Z}_q) \otimes \mathbf{1}$  et sur l'espace orthogonal. Celui-ci fournit la composante continue du type spectral de  $\mathcal{Z}_q \square_u G$ . ■

**Remarque 6.2.** En appliquant les théorèmes 4.1 et 6.1, on obtient comme corollaire que tous les points de  $\mathbf{Z}_q \times G$  sont uniformément génériques pour le produit croisé  $\mathcal{Z}_q \square_u G$ .

**Remarque 6.3.** La démonstration de l'ergodicité du produit croisé  $\mathcal{Z}_q \square_u G$  n'a pas fait appel aux critères usuels caractérisant l'ergodicité d'un produit croisé, à savoir l'un sur la non existence de solutions mesurables non nulles des équations fonctionnelles

$$X(\alpha) = (\rho \circ \Phi_u)X(\alpha + 1) \quad h_q\text{-p.p.}$$

où  $\rho$  parcourt  $\Lambda(G)$  (cf. [19, 20, 29]), l'autre en montrant que le groupe des valeurs essentielles de K. Schmidt [27] est le groupe  $G$ . Cela provient des formules sommatoires qui permettent de démontrer l'ergodicité avec une mesure invariante unique.

La connaissance des systèmes dynamiques associés aux suites chaînées permet de conclure à l'équirépartition d'un  $s$ -uple de telles suites :

**Théorème 6.4.** Soient  $\mathbf{q} = (q^{(1)}, \dots, q^{(s)})$  un  $s$ -uple d'entiers aux moins égaux à 2 dont les coordonnées sont premières entre elles deux à deux et soit  $\mathbf{u} = (u^{(1)}, \dots, u^{(s)})$  un  $s$ -uple de suites, chaque suite  $u^{(m)}$  étant chaînée contractante en base  $q^{(m)}$  et à valeurs dans un groupe métrisable compact  $G^{(m)}$ . Alors le flot  $\mathcal{K}(\mathbf{u})$  est strictement ergodique, topologiquement conjugué au produit  $\mathcal{K}(u^{(1)}) \times \dots \times \mathcal{K}(u^{(s)})$ . Si  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  désigne le produit  $\mathbf{Z}_{q^{(1)}} \times \dots \times \mathbf{Z}_{q^{(s)}}$  et  $\Phi_{\mathbf{u}} = (\Phi_{u^{(1)}}, \dots, \Phi_{u^{(s)}})$ , alors  $\mathcal{K}(\mathbf{u})$  est métriquement conjugué au produit croisé  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}} \square_{\Phi_{\mathbf{u}}}(G^{(1)} \times \dots \times G^{(s)})$ . En particulier, la suite  $\mathbf{u} : n \mapsto (u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(s)})$  est uniformément équirépartie dans  $G^{(1)} \times \dots \times G^{(s)}$ .

*Démonstration.* Les systèmes ergodiques  $\mathbf{Z}_{q^{(m)}} \square_{u^{(m)}} G^{(m)}$  n'ayant pas de composante spectrale discrète commune en dehors de la mesure de Dirac en  $\{1\}$ , leur produit est ergodique. Celui-ci peut se présenter comme le produit croisé  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}} \square_{\Phi_{\mathbf{u}}}(G^{(1)} \times \dots \times G^{(s)})$  au-dessus de l'odomètre  $\mathbf{Z}_{\mathbf{q}}$  (isomorphe à  $\mathbf{Z}_{q^{(1)} \dots q^{(s)}}$ ). Il en résulte que ce produit croisé est ergodique et donc, classiquement, uniquement ergodique. Il est facile de voir que le produit croisé est en fait uniformément  $\tau_{\Phi_{\mathbf{u}}}$ -quasicontinu. La suite  $n \mapsto \mathbf{u}_n$  est alors uniformément équirépartie dans  $G^{(1)} \times \dots \times G^{(s)}$ . Montrons que  $\mathcal{K}(u^{(1)}) \times \dots \times \mathcal{K}(u^{(s)})$  est strictement ergodique. Soit  $k$  un entier plus grand ou égal à 1,  $f^{(m)} : (G^{(m)})^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \mathbf{C}$  des applications continues ne dépendant que des  $k$  premières coordonnées et soit  $f := f^{(1)} \otimes \dots \otimes f^{(s)}$ . Introduisons l'application  $F^{(m)} : (G^{(m)})^k \rightarrow \mathbf{C}$  définie par  $f^{(m)}(\omega) = F^{(m)}(\omega_0, \dots, \omega_{k-1})$  et les projections canoniques  $pr_m : \mathbf{Z}_{\mathbf{q}} \times (G^{(1)} \times \dots \times G^{(s)}) \rightarrow G^{(m)}$ . On a successivement

$$\begin{aligned} f(S^{n+\ell_1} u^{(1)}, \dots, S^{n+\ell_s} u^{(s)}) &= \prod_{m=1}^s f^{(m)}(S^{n+\ell_m} u^{(m)}) \\ &= \prod_{m=1}^s F^{(m)}(u_{n+\ell_m}^{(m)}, \dots, u_{n+\ell_m+k-1}^{(m)}) \\ &= \prod_{m=1}^s F^{(m)}(pr_m(\tau_{\Phi_{u^{(m)}}}^{n+\ell_m}(0, u^{(m)})), \dots, pr_m(\tau_{\Phi_{u^{(m)}}}^{n+\ell_m+k-1}(0, u^{(m)}))). \end{aligned}$$

La suite des moyennes  $\frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} f(S^{n+\ell_1} u^{(1)}, \dots, S^{n+\ell_s} u^{(s)})$  converge donc uniformément en  $(\ell_1, \dots, \ell_s)$  (théorème 4.1) vers

$$\prod_{m=1}^s \int_{\mathbf{Z}_{q_m} \times G^{(m)}} F^{(m)}(pr_m, pr_m \circ \tau_{\Phi_{u^{(m)}}}, \dots, pr_m \circ \tau_{\Phi_{u^{(m)}}}^{k-1}) d(h_{q_m} \otimes h_{G^{(m)}}).$$

Mais  $f^{(m)}(S^n u^{(m)}) = F^{(m)}(pr_m, pr_m \circ \tau_{\Phi_{u^{(m)}}}, \dots, pr_m \circ \tau_{\Phi_{u^{(m)}}}^{k-1})$  de sorte que l'intégrale de cette fonction est égale à  $\int_{K_{u^{(m)}}} f^{(m)} dm_{u^{(m)}}$ , ce qui montre que  $(S^{\ell_1} u^{(1)}, \dots, S^{\ell_s} u^{(s)})$  est uniformément générique en  $(\ell_1, \dots, \ell_s)$  pour le système produit  $\mathcal{K}(u^{(1)}) \times \dots \times \mathcal{K}(u^{(s)})$  et après un passage standard à la limite, tous les points de  $K_{u^{(1)}} \times \dots \times K_{u^{(s)}}$  sont aussi (uniformément) génériques. En conséquence,  $\mathcal{K}(u^{(1)}) \times \dots \times \mathcal{K}(u^{(s)})$  est uniquement ergodique et comme la mesure produit charge les ouverts puisqu'il en est ainsi de ses marginales (les flots  $\mathcal{K}(u^{(m)})$  étant strictement ergodiques), le flot  $\mathcal{K}_{u^{(1)}} \times \dots \times \mathcal{K}_{u^{(s)}}$  est strictement ergodique.

Il reste à établir la conjugaison entre  $\mathcal{K}_{\mathbf{u}}$  et  $\mathcal{K}_{u^{(1)}} \times \dots \times \mathcal{K}_{u^{(s)}}$ . Le produit  $(G^{(1)} \times \dots \times G^{(s)})^{\mathbf{N}_0}$  est homéomorphe à  $(G^{(1)})^{\mathbf{N}_0} \times \dots \times (G^{(s)})^{\mathbf{N}_0}$  par l'application

$$M : (\omega_n^{(1)}, \dots, \omega_n^{(s)})_n \mapsto ((\omega_n^{(1)})_n, \dots, (\omega_n^{(s)})_n)$$

qui commute avec les décalages :  $M \circ S = (S \times \dots \times S)M$ . Montrons que la restriction de  $M$  à  $K_{\mathbf{u}}$  réalise cette conjugaison. Par construction,  $M(\mathbf{u}) = (u^{(1)}, \dots, u^{(s)})$  de sorte que  $M(K_{\mathbf{u}})$  contient les points  $(S^n u^{(1)}, \dots, S^n u^{(s)})$  qui forment un ensemble dense dans  $K_{u^{(1)}} \times \dots \times K_{u^{(s)}}$  et donc  $M(K_{\mathbf{u}}) = \mathcal{K}(u^{(1)}) \times \dots \times \mathcal{K}(u^{(s)})$ . Cette conjugaison entraîne la stricte ergodicité de  $\mathcal{K}(\mathbf{u})$ . ■

Lorsque les suites sont chaînées sur la même base  $q$ , l'étude se ramène à une seule suite chaînée. Par exemple, dans le cas de deux suites chaînées  $u$  et  $u'$  à valeurs dans  $G$  et  $G'$  respectivement, de matrices de transition  $T$  et  $T'$ , la suite  $v : n \mapsto (u_n, u'_n)$  est chaînée à valeurs dans le groupe  $G \times G'$ , de matrice de transition

$$\Theta := (T, T') = (({}^i T_j, {}^i T'_j))_{0 \leq i, j < q}.$$

Remarquons que la matrice normalisée  $\Theta^*$  est égale à  $(T^*, T'^*)$ .

**Exemple 9.** Prenons le cas des suites  $u : n \mapsto e^{2i\pi\alpha s_{11}(n)}$  et  $u' : n \mapsto e^{2i\pi\alpha' s_{11}(n)}$  introduites dans l'exemple 7 (avec  $q = 2$ ). Avec les notations précédentes

$$\Theta = \begin{pmatrix} (1, 1) & (1, 1) \\ (1, 1) & (e^{2i\pi\alpha}, e^{2i\pi\alpha'}) \end{pmatrix}.$$

Pour tout caractère  $\chi(z, z') = z^n z'^{n'}$  de  $\mathbf{U}^2$ ,

$$\chi^\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix}$$

avec  $\eta = e^{2i\pi(n\alpha + n'\alpha')}$ . En conséquence, si  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont rationnellement indépendants modulo 1, la suite  $v : n \mapsto (u_n, u'_n)$  est chaînée contractante, le flot  $\mathcal{K}(v)$  est strictement ergodique, métriquement conjugué au produit croisé  $\mathbf{Z}_2 \square_v (\mathbf{U} \times \mathbf{U})$ . En conséquence la suite  $(\alpha s_{11}(n), \alpha' s_{11}(n))_n$  est uniformément équirépartie modulo 1.

## 7 Opérateurs à poids

### 7.1 Décomposition spectrale

Dans toute cette partie,  $G$  est supposé abélien de groupe de caractères  $\widehat{G}$  et  $u$  est une suite chaînée (en base  $q$ ) à valeurs dans  $G$ . L'espace  $L^2(\mathbf{Z}_q \times G)$  (la référence à la mesure est omise

lorsque celle-ci est la mesure de Haar) est décomposé par le produit croisé  $\tau_u$  en la somme hilbertienne

$$L^2(\mathbf{Z}_q \times G) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} L^2(\mathbf{Z}_q) \otimes \chi \quad (34)$$

L'isométrie  $f \mapsto f \circ \tau_u$  associée à  $\tau_u$  est un opérateur unitaire qui laisse invariant les espaces  $L^2(\mathbf{Z}_q) \otimes \chi$  et en identifiant chacun de ces espaces à  $L^2(\mathbf{Z}_q)$  par l'isomorphisme  $f \mapsto f \otimes \chi$ , la restriction de  $\tau_u$  à  $L^2(\mathbf{Z}_q) \otimes \chi$  donne l'opérateur  $V_{u,\chi} : L^2(\mathbf{Z}_q) \rightarrow L^2(\mathbf{Z}_q)$  défini par

$$V_{u,\chi}(f)(\alpha) = \chi(\Phi_u(\alpha))f(\alpha + 1). \quad (35)$$

Le type spectral de  $\mathcal{Z}_q \square_u G$  est donc la somme des types spectraux des  $V_{u,\chi}$ . Pour  $\chi$  égal au caractère trivial, il s'agit du type spectral  $\lambda^{(0)}$  de l'odomètre  $\mathcal{Z}_q$  dont le support est le groupe  $\mathbf{D}_q = \{z \in \mathbf{U} ; \exists r \in \mathbf{N}_0, z^{q^r} = 1\}$  (lequel sera muni de la topologie discrète).

Pour tout caractère  $\chi$  de  $\mathbf{Z}_q$  l'opérateur  $V_{u,\chi}$  est dit à poids de base  $\tau$ , c'est-à-dire de la forme

$$V_\varphi : L^2(\mathbf{Z}_q) \rightarrow L^2(\mathbf{Z}_q), \quad V_\varphi(f) = \varphi.(f \circ \tau)$$

avec  $\varphi : \mathbf{Z}_q \rightarrow \mathbf{U}$  borélienne. Pour toute application  $f$  dans  $L^2(\mathbf{Z}_q)$ , la suite des corrélations  $n \mapsto \int_{\mathbf{Z}_q} V_\varphi^n(f) \bar{f} dh_q$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) sera notée  $\gamma_f$  (la référence à  $\varphi$  étant sous-entendue) et la mesure spectrale de  $f$  déterminée par l'opérateur  $V_\varphi$  sera notée  $\nu_f$ . Par définition  $\widehat{\nu}_f(n) = \gamma_f(n)$ .

## 7.2 Pureté du spectre

Soit  $V_\varphi : f \mapsto \varphi.(f \circ \tau)$  un opérateur à poids de base  $\tau$  comme ci-dessus. Nous étudions le spectre de  $V_\varphi$  en nous inspirant de la méthode de H. Helson [12] développée dans le cas de cocycles sur le cercle. Pour tout caractère  $\psi$  de  $\mathbf{Z}_q$ , définissons l'opérateur unitaire  $M_\psi : f \mapsto \psi f$ . La relation suivante (dite de commutation de Weyl) s'obtient par un calcul direct, elle est fondamentale :

$$V_\varphi M_\psi = \psi(1) M_\psi V_\varphi. \quad (36)$$

**Théorème 7.1.** *Soit  $H$  un sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\mathbf{Z}_q)$  invariant par le groupe des opérateurs  $M_\psi$  ( $\psi \in \widehat{\mathbf{Z}_q}$ ) et l'opérateur unitaire  $V_\varphi$ . Alors  $H = \{0\}$  ou  $H = L^2(\mathbf{Z}_q)$ .*

*Démonstration.* Supposons  $H$  non réduit à l'espace nul et soit  $f \in H$  non nulle. Soit maintenant une fonction  $g$  dans  $L^2(\mathbf{Z}_q)$ , orthogonale à  $H$  et montrons que  $g$  est nulle ( $h_q$ -presque partout). Par hypothèse, pour tout entier  $n \geq 0$  on a

$$\int_{\mathbf{Z}_q} \varphi^{(n)}(\alpha) f(\alpha + n) \overline{g(\alpha)} \psi(\alpha) h_q(d\alpha) = 0$$

pour tout  $\psi \in \widehat{\mathbf{Z}_q}$ . Il en résulte que la fonction  $\varphi^{(n)}(\alpha) f(\alpha + n) \overline{g(\alpha)}$  est nulle presque partout, or  $|\varphi^{(n)}(\alpha)| \neq 0$  donc  $|f(\alpha + n)g(\alpha)| = 0$   $h_q$ -presque partout. En utilisant le théorème ergodique, cette dernière égalité conduit à  $\|f\|^2 |g(\alpha)| = 0$  presque partout d'où  $g$  nulle presque partout.

■

**Théorème 7.2.** *Le type spectral de  $V_\varphi$  est soit discret, soit singulier continu (par rapport à la mesure de Haar de  $\mathbf{U}$ ), soit Lebesgue (i.e. du type de la mesure de Haar).*

*Démonstration.* La relation de commutation (36) donne facilement  $\gamma_{M_\psi f}(n) = \psi(1)^n \gamma_f(n)$ , d'où le produit de convolution  $\nu_{M_\psi f} = \nu_f * \delta_{\psi(1)}$  ( $\delta_z$  désigne la mesure de Dirac en  $z$  ( $z \in \mathbf{U}$ )). Celui-ci conserve les caractères d'atomicité, de singularité continue et d'absolue continuité de  $\nu_f$ . Considérons alors les sous-espaces de  $L^2(\mathbf{Z}_q)$  des fonctions de mesures spectrales respectivement discrètes, singulières continues et absolument continues. D'après le théorème précédent, un seul de ces espaces n'est pas réduit à  $\{0\}$  et vaut donc  $L^2(\mathbf{Z}_q)$ .

Il reste à montrer que si le type spectral de  $V_\varphi$  est absolument continu, il est Lebesgue. Soit  $\nu$  une mesure sur  $\mathbf{U}$  représentant ce type spectral; nous devons prouver que tout borélien  $B$  de  $\mathbf{U}$ , de  $\nu$ -mesure 0, est de mesure de Haar nulle. D'après ce qui précède  $\nu * \delta_{\psi(1)} \ll \nu$  pour tout caractère  $\psi$  de  $\mathbf{Z}_q$ , d'où  $\nu(B.x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbf{D}_q$ . Considérons alors l'ensemble  $C = \cup_{x \in \mathbf{D}_q} (B.x)$ . On a encore  $\nu(C) = 0$  et  $C$  est maintenant invariant par l'action des translations  $z \mapsto zx$  par les éléments  $x$  du groupe  $\mathbf{D}_q$ . Cette action de  $\mathbf{D}_q$  sur  $(\mathbf{U}, h_{\mathbf{U}})$  est en fait ergodique. En effet, soit  $f$  une fonction dans  $L^2(\mathbf{U})$  telle que pour tout  $x \in \mathbf{D}_q$  on ait  $f(zx) = f(z)$  presque partout. En développant  $f$  en série de Fourier, cette dernière égalité entraîne que les coefficients de Fourier  $\hat{f}(m) = \int_{\mathbf{U}} f(z) z^{-m} h_{\mathbf{U}}(dz)$  vérifient  $\hat{f}(m) = x^m \hat{f}(m)$  pour tout  $m \in \mathbf{Z}$  et tout  $x \in \mathbf{D}_q$ . Par suite  $\hat{f}(m) = 0$  si  $m \neq 0$ , donc  $f$  est constante, ce qui prouve l'ergodicité de l'action de  $\mathbf{D}_q$ . En conséquence,  $h_{\mathbf{U}}(C)$  vaut 0 ou 1. Le cas  $h_{\mathbf{U}}(C) = 1$  est exclu puisqu'il signifie que  $\nu$  est étrangère à  $h_{\mathbf{U}}$ . Ainsi  $h_{\mathbf{U}}(B) = 0$  comme attendu. ■

### 7.3 $D$ -invariance et $D$ -ergodicité

Avant de déterminer les cas où le spectre de  $V_{u,\chi}$  est discret, singulier continu ou Lebesgue, il est utile d'introduire les notions suivantes associées à un sous-groupe dénombrable dense  $D$  du cercle. Une mesure borélienne de probabilité  $\mu$  sur le cercle est dite  $D$ -quasi-invariante si  $\mu * \delta_d \ll \mu$  pour tout  $d$  dans  $D$ . Dans ce cas, le type spectral de  $\nu$  est  $D$ -invariant puisque l'on a aussi  $\mu * \delta_{-d} \ll \mu$  d'où  $\mu \ll \mu * \delta_d$  et donc  $\mu * \delta_d \sim \mu$ . Elle est dite  $D$ -ergodique si toute partie borélienne  $B$  du cercle,  $D$ -invariante (*i.e.*  $B.d = B$  pour tout  $d$  de  $D$ ), est de  $\mu$ -mesure 0 ou 1. Pour une étude détaillée de ces notions, nous renvoyons le lecteur à la monographie [25], voir aussi [4]. La notion de  $D$ -ergodicité conduit, comme dans le cas ergodique usuel, au résultat suivant :

*Deux mesures de probabilité sur le cercle,  $D$ -quasi-invariantes et  $D$ -ergodiques, sont équivalentes ou mutuellement singulières.*

L'introduction de la  $D$ -ergodicité est justifiée par le résultat suivant qui est une conséquence importante du théorème 7.1.

**Théorème 7.3.** *Le type spectral de  $V_\varphi$  est  $\mathbf{D}_q$ -invariant et  $\mathbf{D}_q$ -ergodique.*

*Démonstration.* Soit  $\nu_f$  une mesure spectrale représentant le type spectral de  $V_{u,\chi}$  et supposons-la de probabilité ( $\|f\| = 1$ ). Pour tout caractère  $\psi$  de  $\mathbf{Z}_q$ , on a  $\nu_{M_\psi f} \ll \nu_f$ . De même  $\nu_{M_{\psi^{-1}} f} \ll \nu_f$ , d'où par translation  $\nu_f \ll \nu_{M_\psi f}$ , ce qui montre l'invariance du type spectral par les translations  $z \mapsto zx$ ,  $x \in \mathbf{D}_q$ . Montrons l'ergodicité. Soit  $B$  un borélien  $\mathbf{D}_q$ -invariant et supposons  $0 < \nu_f(B)$ . Soit  $H$  le sous-espace de Hilbert des éléments  $g$  de  $L^2(\mathbf{Z}_q)$  tels que  $\nu_g \ll \mathbf{1}_B \nu_f$ .  $H$  est invariant par  $V_\varphi$ , ce qui est banal, et par  $M_\psi$  pour tout caractère  $\psi$  de  $\mathbf{Z}_q$  à cause de l'invariance de  $B$  par l'action de  $\mathbf{D}_q$ . Le théorème 7.1 entraîne  $H = 0$  ou  $H = L^2(\mathbf{Z}_q)$ . Le premier cas est exclu puisque  $\nu_f(B) > 0$ . D'où  $f \in H$ , ce qui implique  $\nu_f(B) = 1$ . ■

## 7.4 Type spectral des opérateurs $V_{u,\chi}$

Soit  $u$  une suite chaînée dans  $G$ , groupe commutatif métrisable compact, de matrice de transition  $T$ .

**Cas où  $u$  est contractante.** D'après le théorème 6.3, pour tout caractère non trivial  $\chi$  de  $G$ , l'opérateur  $V_{u,\chi}$  n'a pas de composante discrète dans son spectre. Ce dernier étant pur, il est soit singulier continu, soit Lebesgue. Il est de Lebesgue dans le cas suivant :

**Théorème 7.4.** *Si  $u$  est de Hadamard, alors pour tout caractère non trivial de  $G$  le type spectral de l'opérateur  $V_{u,\chi}$  est Lebesgue.*

*Démonstration.* D'après le théorème 7.2, il suffit de montrer que le type spectral de  $V_{u,\chi}$  est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue et pour cela, il suffit de montrer que la mesure spectrale associée à la fonction constante est absolument continue. Comme  $(0,0)$  est un point générique, cette mesure est la même que la mesure spectrale  $\nu$  de la suite  $u \mapsto \chi(u_n)$ , laquelle est limite faible des mesures de probabilité  $\nu_N$  de densité

$$P_N(z) := \frac{\nu_N(dz)}{h_{\mathbf{U}}(dz)} = \frac{1}{N} \left| \sum_{0 \leq k < N} \chi(u_k) z^{-k} \right|^2.$$

La suite  $n \mapsto \chi(u_n)$  est chaînée en base  $q$  et, par hypothèse sur  $u$ , sa matrice de transition est de norme quadratique  $\sqrt{q}$ . Il en résulte, par le théorème 3.3, que  $\max_{|z|=1} P_N(z) \leq C$  où  $C$  est une constante explicite. En conséquence, pour toute application continue  $f : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}$ , on obtient par passage à la limite

$$\left| \int_{\mathbf{U}} f(z) \nu(dz) \right| \leq C \int_{\mathbf{U}} |f(z)| h_{\mathbf{U}}(dz),$$

ce qui établit l'absolue continuité de  $\nu$  par rapport à la mesure de Haar de  $\mathbf{U}$ . ■

**Cas où  $u$  est chaînée non contractante.** Pour tout caractère  $\chi$  de  $G$ , la suite image  $\chi \circ u$  est chaînée à valeurs dans  $\mathbf{U}$ . Nous allons donc restreindre l'étude au cas où  $G = \mathbf{U}$ . Si  $\chi$  est le caractère identité  $z \mapsto z$ , l'opérateur  $V_{u,\chi}$  sera simplement noté  $V_u$  de sorte que par définition  $V_u(f) = \Phi_u \cdot f \circ \tau$ . Notons  $T$  la matrice de transition de  $u$ . Elle a ses coefficients dans  $\mathbf{U}$  et provient d'une application chaînée régulière à gauche, ce qui signifie que la première ligne de  $T$  n'est formée que de 1.

D'après le lemme 3.1, si  $\|T\| = q$ , il existe des nombres complexes  $s_i$  et  $r_i$  de module 1 ( $0 \leq i \leq q-1$ ) tels que  ${}^i T_j = s_i \bar{r}_j$ . Réciproquement, si  $T$  a cette forme, alors pour tout caractère  $\chi$  de  $\mathbf{U}$  la matrice  $\chi T$  est de norme quadratique  $q$ . Par conséquent, nous supposons que  $\chi$  est le caractère identité  $z \mapsto z$ . La première ligne de  $T$  n'étant formée que de 1,  $s_0 = r_j$  pour tous les indices  $j$ . Posons  $\zeta_i = s_i \bar{s}_0$  ( $= {}^i T_j$ ), avec  $\zeta_0 = 1$ , alors

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_1 & \cdots & \zeta_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \zeta_{q-1} & \zeta_{q-1} & \cdots & \zeta_{q-1} \end{pmatrix} \quad (37)$$

ce qui permet d'écrire

$$u_n = \zeta_{e_k(n)} \zeta_{e_{k-1}(n)} \cdots \zeta_{e_1(n)} \zeta_{e_0(n)} (u_{e_0(n)} \overline{\zeta_{e_0(n)}}) \quad (38)$$

si  $n = e_k(n)q^k + e_{k-1}(n)q^{k-1} + \dots + e_0(n)$  est le développement de  $n$  en base  $q$ . Ainsi,  $u$  se factorise en un produit  $u_n = v_n p(n)$  où  $v : n \mapsto v_n$  est une suite complètement  $q$ -multiplicative à valeurs dans  $\mathbf{U}$ , définie par  $v_{aq^k} = \zeta_a$  ( $a = 0, 1, \dots, q-1$  et  $k \in \mathbf{N}_0$ ). La suite  $p(\cdot)$  est périodique, de période  $q$ , définie par  $p(n) = u_{e_0(n)} \overline{\zeta_{e_0(n)}}$ . L'application  $p(\cdot)$  se prolonge naturellement à  $\mathbf{Z}_q$ . Notons encore  $p$  cette extension; elle s'écrit comme une combinaison linéaire des caractères de  $\mathbf{Z}_q$ , soit

$$p(\alpha) = \sum_{k=0}^{q-1} p_k e^{2i\pi k\alpha/q}.$$

Au sujet de la mesure spectrale de  $u$ , en utilisant l'inégalité classique  $|z_1 + \dots + z_q|^2 \leq q(|z_1|^2 + \dots + |z_q|^2)$ , on obtient pour toute application continue  $f : \mathbf{Z}_q \rightarrow \mathbf{R}$  positive

$$\nu_u(f) \leq q \left( \sum_{k=0}^{q-1} |p_k|^2 \right) \nu_v(f),$$

en particulier  $\nu_u \ll \nu_v$ .

Les mesures spectrales associées aux suites complètement  $q$ -multiplicatives ont fait l'objet de nombreux travaux. Citons plus particulièrement [9, 6, 24]. L'exemple classique où  $v_a = \zeta^a$  ( $0 \leq a \leq q-1$ ) avec  $\zeta \in \mathbf{U}$  est relié à la fonction somme-des-chiffres  $s_q$  en base  $q$  puisque  $v_n = \zeta^{s_q(n)}$ . La structure dynamique de ces suites particulières, et notamment la mise sous forme d'un produit croisé, a été étudiée dans [21] lorsque  $\zeta$  n'est pas un point de torsion et les propriétés spectrales du produit croisé  $\tau_v$  (cf. (31)) de telles suites, considérées dans deux bases premières entre elles, sont exploités dans [15]. Pour une suite  $v$  complètement  $q$ -multiplicative quelconque, à valeurs dans  $\mathbf{U}$ , le type spectral de  $V_v$  est caractérisée dans [10]. Plus précisément :

- Soit le type spectral de  $V_v$  est discret, alors  $v(n) = \zeta^{s_q(n)}$  où  $\zeta$  est une racine  $(q-1)$ -ième de l'unité. En particulier  $v$  est périodique de période l'ordre  $d$  de  $\zeta$ .
- Soit le type spectral de  $V_v$  est singulier continu.

Si  $\nu_v$  est discrète, il en est de même de  $\nu_u$  (avec  $u_n = v_n p(n)$  comme ci-dessus) et donc  $u$  est une suite chaînée périodique; ce cas a déjà été étudié.

## 7.5 Rigidité

Il est utile de disposer d'un test simple pour identifier deux mesures spectrales mutuellement singulières. Dans ce but nous utilisons la notion de temps rigides pour un opérateur unitaire  $V$  sur un espace de Hilbert  $H$ . Soit  $\zeta$  un nombre complexe tel que  $|\zeta| \leq 1$ . Une suite  $(t_k)_k$  strictement croissante d'entiers est dite un temps  $\zeta$ -rigide si la suite  $k \mapsto V^{t_k}$  converge vers  $\zeta I$  (où  $I$  désigne l'opérateur identité) au sens de la convergence faible des opérateurs. Cette notion (ou plus exactement sa forme duale qui parle de  $(1-\zeta)$ -mixing) a été introduite par Stepin [28]. Une formulation équivalente est que, pour tout  $h$  dans  $H$ , la suite des produits scalaires  $(V^{t_k} h | h)$  converge vers  $\zeta \|h\|_H^2$ . Un des intérêts de cette définition pour ce qui concerne ce travail est le suivant :

*Si  $V$  et  $V'$  sont deux opérateurs unitaires (sur des espaces de Hilbert identiques ou distincts) pour lesquels il existe un temps commun  $(t_k)_k$  qui soit  $\zeta$ -rigide et  $\zeta'$ -rigide respectivement et tels que  $\zeta \neq \zeta'$ , alors  $V$  et  $V'$  ont un spectre mutuellement singulier.*

Le critère suivant de  $\zeta$ -rigidité pour les opérateurs à poids offre une méthode pratique pour calculer  $\zeta$  et donc fournit un outil pour montrer la mutuelle singularité entre deux de ces opérateurs. Il est démontré dans [10] sous une forme plus générale. Nous le traduisons ici dans le contexte de cette étude.

**Théorème 7.5.** *Soit  $K$  un groupe abélien compact métrisable et  $\varphi : K \rightarrow \mathbf{U}$  borélienne. Supposons données une translation  $T$  de  $K$ , ergodique, et une suite strictement croissante d'entiers  $(n_k)_k$  qui soit un temps 1-rigide pour  $T$ . Alors  $(n_k)_k$  est un temps  $\zeta$ -rigide pour l'opérateur unitaire  $V_\varphi : f \mapsto \varphi \cdot (f \circ T)$  si, et seulement si, pour tout caractère  $\psi$  de  $K$  on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K \varphi^{(n)}(x) \psi(x) h_K(dx) = \begin{cases} \zeta & \text{si } \psi \text{ est trivial} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (39)$$

où  $\varphi^{(n)}(x) = \varphi(T^{n-1}x) \cdots \varphi(x)$ .

Dans le cas où  $T$  est l'addition de 1 dans  $\mathbf{Z}_q$ , toute suite  $k \mapsto \ell q^k$  ( $\ell \in \mathbf{N}_0$ ) est un temps 1-rigide pour  $T$ . La propriété de chaînage entraîne alors qu'il existe  $\zeta_\ell$  (explicitement calculable), tel que  $(n_k)_k$  soit un temps  $\zeta_\ell$ -rigide pour les opérateurs à poids associés. Plus précisément :

**Théorème 7.6.** *Soit  $u : \mathbf{N}_0 \rightarrow G$  une suite chaînée (en base  $q$ ),  $G$  abélien (métrisable compact),  $\chi$  un caractère de  $G$  et  $\ell \in \mathbf{N}$ .*

(i) *La suite  $(\ell q^k)_k$  est un temps  $\zeta_{\ell, \chi}$ -rigide pour l'opérateur unitaire  $V_{u, \chi}$  avec*

$$\zeta_{\ell, \chi} = \int_{\mathbf{Z}_q} \chi(\Phi_u^{(\ell q)}(\alpha)) h_q(d\alpha);$$

(ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{Z}_q} \chi(\Phi_u^{(m + \ell q^k)}(\alpha)) h_q(d\alpha) = \int_{\mathbf{Z}_q} \chi \circ \Phi_u^{(m)} dh_q \int_{\mathbf{Z}_q} \chi \circ \Phi_u^{(\ell q)} dh_q$ .

*Démonstration.* Soit un entier  $k \geq 0$ . Tout entier  $n \geq 0$  s'écrit sous la forme (unique)  $n = n''q^{k+1} + e_k(n)q^k + n'$  avec  $0 \leq n' < q^k$  et  $e_k(n) \in \{0, \dots, q-1\}$ , et pour toute suite chaînée  $u$  à valeurs dans un groupe abélien quelconque, la relation de chaînage entraîne

$$u_{n+q^{k+1}\ell} - u_n = u_{(n''+\ell)q+e_k(n)} - u_{qn''+e_k(n)},$$

pour tout entier  $\ell \geq 0$ . La relation  $\Phi_u^{(q^{k+1}\ell)}(n) = u_{n+q^{k+1}\ell} - u_n$  se prolonge par continuité sur  $\mathbf{Z}_q \setminus \{-1, -2, \dots, -\ell q^{k+1}\}$  pour donner

$$\Phi_u^{(q^{k+1}\ell)}(\alpha) = \Phi_u^{(q\ell)}(S^k(\alpha)).$$

Soit maintenant  $\psi$  un caractère de  $\mathbf{Z}_q$ . Il existe un entier  $r$  tel que  $\psi(\alpha)$  ne dépend que des  $r$  premières coordonnées de  $\alpha$ , ce qu'on explicitera en remplaçant  $\psi(\alpha)$  par  $\psi(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})$ . Avec ces notations,

$$\int_{\mathbf{Z}_q} \psi(\alpha) \chi(\Phi_u^{(\ell q^k)}(\alpha)) h_q(d\alpha) = \int_{\mathbf{Z}_q} \psi(\beta_0, \dots, \beta_{r-1}) h_{\mathbf{Z}/q^r\mathbf{Z}}(d\beta) \int_{\mathbf{Z}_q} \chi(\Phi_u^{(\ell q)}(S^k \alpha)) h_q(d\alpha)$$

dès que  $k \geq r+1$ . La relation (39) avec  $\varphi = \chi \circ \Phi_u$  est alors une conséquence de l'invariance de  $h_q$  par  $S$ . La propriété (i) du théorème s'en déduit.

Pour démontrer (ii), utilisons la formule générale (en notation additive)  $\Phi_u^{(m+q^{k+1}\ell)}(\alpha) = \Phi_u^{(q^{k+1}\ell)}(\alpha) + \Phi_u^{(m)}(\alpha + \ell q^{k+1})$  pour  $-\alpha \notin \mathbf{N}$ . Notons  $\mathcal{B}_s$  l'algèbre de Boole engendrée par les cylindres  $[a_0, \dots, a_{s-1}] = \{\alpha \in \mathbf{Z}_q; \alpha_0 = a_0, \dots, \alpha_{s-1} = a_{s-1}\}$ . Ces cylindres sont invariants par les translations  $\alpha \mapsto \alpha + \ell q^r$  telles que  $r \geq s$ . Notons  $E_s(\cdot)$  l'espérance conditionnelle par rapport à  $\mathcal{B}_s$ . Alors, pour tout  $r \geq s$ , on a  $E_s(f \circ \tau^{\ell q^r}) = E_s(f) = E_s(f) \circ \tau^{\ell q^r}$  pour toute  $f \in L^2(\mathbf{Z}_q)$  et en particulier

$$\int_{\mathbf{Z}_q} \chi(\Phi_u^{(q^{k+1}\ell)}(\alpha)) E_s(\chi(\Phi_u^{(m)}(\alpha + \ell q^{k+1}))) h_q(d\alpha) = \int_{\mathbf{Z}_q} \chi \circ \Phi_u^{(q^{k+1}\ell)} dh_q \int_{\mathbf{Z}_q} E_s(\chi \circ \Phi_u^{(m)}) dh_q.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , puis  $s$  un entier tel que  $\|\chi \circ \Phi_u^{(m)} - E_s(\chi \circ \Phi_u^{(m)})\| \leq \varepsilon$ , de sorte que pour  $k \geq s$ ,

$$\left| \int_{\mathbf{Z}_q} (\chi \circ \Phi_u^{(m+q^{k+1}\ell)} - (\chi \circ \Phi_u^{\ell q} \circ S^k) E_s(\chi \circ \Phi_u^{(m)})) dh_q \right| \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs

$$\int_{\mathbf{Z}_q} (\chi \circ \Phi_u^{(\ell q)} \circ S^k) E_s(\chi \circ \Phi_u^{(m)}) dh_q = \int_{\mathbf{Z}_q} \chi \circ \Phi_u^{(\ell q)} dh_q \int_{\mathbf{Z}_q} \chi \circ \Phi_u^{(m)} dh_q,$$

d'où

$$\left| \int_{\mathbf{Z}_q} \chi \circ \Phi_u^{(m+q^{k+1}\ell)} dh_q - \int_{\mathbf{Z}_q} \chi \circ \Phi_u^{(\ell q)} dh_q \int_{\mathbf{Z}_q} \chi \circ \Phi_u^{(m)} dh_q \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve (ii). ■

## 8 Dynamique d'une suite chaînée $u$ dans $\mathbf{U}$

nous supposons maintenant  $G = \mathbf{U}$ . L'ensemble des caractères  $\chi_n : z \mapsto z^n$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) de  $\mathbf{U}$  tels que la matrice  $\chi_n T$  est de norme quadratique  $q$  forme un sous-groupe du groupe des caractères  $\widehat{\mathbf{U}}$ . Ce fait résulte directement du lemme 3.1 (b) et (37). Il existe donc un entier  $a \geq 0$  tel que  $\|\chi_n T\| = q$  si, et seulement si,  $n$  est multiple (entier) de  $a$ . De même, il existe un entier  $b \geq 0$ , multiple de  $a$ , tel que la suite  $n \mapsto (u_n)^m$  est périodique si, et seulement si,  $m \in b\mathbf{Z}$ . Cette analyse conduit à introduire les deux notions suivantes :

**Définition 8.1.** *Pour une matrice  $T$  de transition d'une suite chaînée à valeurs dans  $\mathbf{U}$ , les entiers  $a$  et  $b$  déterminés ci-dessus seront respectivement appelés indice de multiplicativité et indice de périodicité de  $T$ , ou de la suite chaînée.*

Si le groupe engendré par les valeurs de  $u$  n'est pas  $\mathbf{U}$ , il est alors cyclique et son ordre  $d$  sera dit *ordre* de  $u$ ; dans ce cas, les indices de multiplicativité et de périodicité de  $u$  sont diviseurs de  $d$ .

### 8.1 Cas d'une suite chaînée $u$ non contractante

#### 8.1.1 Lemmes préparatoires

Deux cas sont à distinguer suivant que l'application  $\Phi_u$  est ou n'est pas continue. Le cas où  $\Phi_u$  est continue a déjà été traité (théorème 6.2). Le flot  $\mathcal{K}(u)$  est :

– Soit constitué d'une orbite de  $d$  éléments avec  $d$  diviseur de  $q - 1$ . Dans ce cas  $u_n = \zeta^n$  où  $\zeta$  est une racine primitive  $d$ -ième de l'unité,  $K_{\Delta u} = \{(\zeta, \zeta, \zeta, \dots)\}$  et  $\mathcal{K}(u)$  est topologiquement conjugué à la translation à  $(x \mapsto x + 1, \mathbf{Z}/d\mathbf{Z})$  ;

– Soit constitué d'une orbite de  $dq'$  éléments. Dans ce cas  $u_n = \zeta^n p(n)$  où  $\zeta$  est comme dans le cas précédent et  $p(\cdot)$  une suite de période minimale  $q'$  diviseur de  $q$ . L'orbite fermée  $K_{\Delta u}$  de  $\Delta u$  est constituée d'une orbite de  $q'$  éléments  $\zeta \cdot S^k(\Delta u)$  ( $0 \leq k < q'$ ) et  $\mathcal{K}(u)$  est topologiquement conjugué au produit de la translation  $(x \mapsto x + 1, \mathbf{Z}/q'\mathbf{Z})$  par la translation  $(x \mapsto x + 1, \mathbf{Z}/d\mathbf{Z})$ .

Dans la suite, nous écarterons le cas où  $u$  est périodique, ou ce qui revient au même, le cas où  $\Phi_u$  est continue. Le lemme général suivant joue un rôle clef dans notre analyse :

**Lemme 8.1.** *Soit  $E$  un ensemble et  $\varphi : \mathbf{Z}_q \rightarrow E$  une application pour laquelle il existe une partition de  $\mathbf{Z}_q \setminus \{-1\}$  en un ensemble dénombrable de cylindres  $C_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  sur chacun desquels  $\varphi$  est constante. On suppose en outre que la suite  $(C_m)_m$  s'accumule en  $-1$  c'est-à-dire que pour tout cylindre  $C$  contenant  $-1$ , il existe un entier  $m_C$  tel que l'inégalité  $m \geq m_C$  entraîne l'inclusion  $C_m \subset C$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) l'application  $\psi : \mathbf{Z}_q \rightarrow E^{\mathbf{N}_0}$  définie par  $\psi(\alpha) = (\varphi(\alpha), \varphi(\alpha + 1), \varphi(\alpha + 2), \dots)$  est injective ;
- (ii) pour tout cylindre  $V$  contenant  $-1$ , la restriction de  $\varphi$  à  $V \setminus \{-1\}$  n'est pas constante ;
- (iii) la suite  $n \mapsto \varphi(n)$  n'est pas périodique.

*Démonstration.* Soient  $\alpha$  et  $\beta$  distincts dans  $\mathbf{Z}_q$  tels que  $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ . Cela se traduit par  $\varphi(\alpha + n) = \varphi(\beta + n)$  pour tout entier  $n$ . Introduisons l'entier  $k$  tel que pour  $z := (z_0, z_1, z_2, \dots) = \beta - \alpha$  on ait  $z_i = 0$  si  $0 \leq i < k$  et  $z_k \neq 0$ . Notons  $C$  le cylindre  $[c_0, \dots, c_k]$  de longueur  $k + 1$  défini par  $c_i = q - 1$  pour  $0 \leq i \leq k - 1$  et  $c_k = q - 1 - z_k$ . Par construction  $C + z$  est le cylindre  $C'$  de longueur  $k + 1$  contenant  $-1 = (q - 1, q - 1, q - 1, \dots)$ . De par les hypothèses, il existe une partition finie de  $C$  en cylindres sur chacun desquels  $\varphi$  est constante. Considérons alors une partition de  $C$  en cylindres de même longueur et formant une partition plus fine que la précédente. Désignons par  $C^*$  le cylindre de cette partition tel que  $-1 \in C^* + z$ . Soit  $H = \varphi^{-1}(\varphi(C^*))$  ; par hypothèse  $|\mathbf{1}_H(\alpha + n) - \mathbf{1}_H(\beta + n)| = 0$  pour tout  $n$  tandis que  $H$  est une réunion finie ou au plus dénombrable de cylindres et dans ce dernier cas les cylindres s'accumulent en  $-1$ . Il en résulte que l'application  $x \mapsto |\mathbf{1}_H(\alpha + x) - \mathbf{1}_H(\beta + x)|$  est  $h_q$ -continue et comme la translation  $\tau$  est continue, uniquement ergodique, il s'en suit  $\int_{\mathbf{Z}_q} |\mathbf{1}_H(\alpha + x) - \mathbf{1}_H(\beta + x)| h_q(dx) = 0$  ou encore  $H + z = H$  presque partout au sens de la mesure de Haar. Mais  $C^*$  est contenu dans  $H$ , donc  $C^* + z \subset H$ . Ainsi  $\varphi$  est égale presque partout à une constante  $c$  sur  $C^* + z$ . Les hypothèses faites sur  $\varphi$  et les cylindres  $C_m$  entraînent que  $\varphi$  vaut  $c$  sur tous les cylindres  $C_m$  contenus dans  $C^* + z$  et la réunion de ces cylindres est précisément l'ensemble  $(C^* + z) \setminus \{-1\}$ . Ainsi (i) implique (ii). Il est évident que (ii) implique (iii) et que (iii) implique (i). ■

**Lemme 8.2.** *Soit  $\varphi : \mathbf{Z}_q \rightarrow E$  une application satisfaisant aux hypothèses du lemme 8.1 dont on reprend les notations. On suppose que  $E$  est muni d'une topologie métrisable compacte et que la suite  $n \mapsto \varphi(n)$  n'est pas périodique.*

- (j) Si  $\alpha \in \mathbf{Z}_q \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$  alors  $\psi(\alpha)$  (élément de  $E^{\mathbf{N}_0}$ ) appartient à l'orbite fermée de  $\psi(0)$ .
- (jj) Si  $(n_k)_k$  est une suite croissante d'entiers telle que la suite  $k \mapsto \psi(n_k)$  converge (dans  $E^{\mathbf{N}_0}$ ) vers  $\omega \in K_{\psi(0)}$  alors la suite  $k \mapsto n_k$  converge dans  $\mathbf{Z}_q$  et si  $\alpha$  est sa limite, on a

$\psi(\alpha) = \omega$  lorsque  $\alpha$  n'est pas un entier négatif. Dans le cas contraire où  $\lim_k n_k = -m$ , on a  $S^m \omega = \psi(0)$ .

*Démonstration.*

(j) Par hypothèse sur  $\varphi$  et  $\alpha$ , pour tout entier  $k \geq 1$  il existe un cylindre  $C_k$  dans  $\mathbf{Z}_q$  contenant  $\alpha$  tel que pour tout  $\ell = 0, 1, \dots, k$ ,  $\varphi$  est constante sur les cylindres  $C_k + \ell$ . En conséquence, pour tout entier  $n_k$  dans  $C_k$ , on a  $\varphi(n_k + \ell) = \varphi(\alpha + \ell)$ . On est donc en mesure de construire une suite croissante d'entiers  $(n_k)_k$  (éventuellement constante) telle que la suite des  $S^{n_k}(\psi(0))$  converge vers  $\psi(\alpha)$ .

(jj) Avec les hypothèses données, soit  $(n'_k)_k$  une sous-suite de  $(n_k)_k$  convergente dans  $\mathbf{Z}_q$ . Notons  $\alpha$  sa limite. Si  $\alpha$  n'est pas égal à un entier négatif, reprenons la construction faite dans (j). Celle-ci montre que  $\psi(n'_k)$  converge vers  $\psi(\alpha)$ ; donc  $\psi(\alpha) = \omega$ . Soit maintenant une sous-suite  $(n''_k)_k$  de  $(n_k)_k$  convergente dans  $\mathbf{Z}_q$ , de limite  $\beta$ . Si  $\beta$  n'est pas un entier négatif, ce qui vient d'être montré donne  $\psi(\beta) = \omega$  et le lemme 8.1 assure  $\alpha = \beta$ . Si  $\beta$  est un entier négatif  $-m$ , remplaçons  $n''_k$  par  $n''_k + m$ , ce qui permet de conclure à  $\psi(0) = S^m \omega$ ; mais  $\psi(\alpha + m) = S^m \omega$  d'où, par le lemme 8.1,  $\alpha = -m$  ce qui a été exclu. Ainsi  $\lim_k n_k = \alpha$ .

Supposons maintenant que la suite  $(n'_k)_k$  converge dans  $\mathbf{Z}_q$  vers un entier négatif  $-m'$ . D'après la première étude, toute sous-suite  $(n''_k)_k$  de  $(n_k)_k$  convergente dans  $\mathbf{Z}_q$  a pour limite un entier négatif  $-m''$ . En remplaçant  $\omega$  par  $S^m \omega$  pour  $m = \max\{m', m''\}$ , on en déduit  $m' = m''$ . Par suite  $\lim_k n_k = m$  et  $S^m \omega = \psi(0)$ .

Enfin, si  $\alpha$  est un entier négatif  $-m$ , remplaçons la suite des entiers  $n'_k$  par celle des  $n'_k + m$ . On en déduit alors que  $\lim_k (n'_k + m) = 0$  et donc  $\lim_k n'_k = -m$ . ■

### 8.1.2 Dynamique d'une suite complètement $q$ -multiplicative

Dans toute cette partie,  $v$  désigne une suite complètement  $q$ -multiplicative à valeurs dans  $\mathbf{U}$  et nous introduisons le sous-groupe fermé  $G_v$  de  $\mathbf{U}$  engendré par les valeurs de  $v$ . Le type spectral du produit croisé  $\mathbf{Z}_q \square_u G_u$  a été décrit dans [10]. Le théorème suivant le complète notamment en comparant le produit croisé avec avec le flot strictement ergodique  $\mathcal{K}(u)$ .

**Théorème 8.1.** *Soit  $v$  une suite complètement  $q$ -multiplicative à valeurs dans  $\mathbf{U}$ .*

(i) *Le flot  $\mathcal{K}(v)$  est strictement ergodique, conjugué (par  $J : \omega \mapsto (\Delta\omega, \omega_0)$ ) au produit croisé standard  $\mathcal{K}(\Delta v) \square G_v$ .*

(ii) *Le produit croisé  $\mathcal{Z}_q \square_v G_v = (\tau_v, \mathbf{Z}_q \times G_v, h_{\mathbf{Z}_q} \otimes h_{G_v})$  avec  $\tau_v(\alpha, z) = (\alpha + 1, z\Phi_v(\alpha))$  est uniquement ergodique.*

(iii) *Pour que  $\zeta \in \mathbf{U}$  soit une valeur propre de  $\mathcal{Z}_q \square_v G_v$  il faut et il suffit que : soit  $\zeta \in \mathbf{D}_q$ , soit il existe une racine  $(q-1)$ -ième de l'unité  $\theta$  telle que  $\zeta \bar{\theta} \in \mathbf{D}_q$  et telle qu'il existe un caractère  $\chi$  de  $G_v$  pour lequel  $\chi \circ v(n) = \theta^n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}_0$ .*

(iv) *L'odomètre  $\mathcal{Z}_q$  est métriquement conjugué au flot  $\mathcal{K}(\Delta v)$  et le produit croisé  $\mathcal{Z}_q \square_v G_v$  est métriquement conjugué au flot métrique  $\mathcal{K}(\Delta v) \square G_v$  par l'application*

$$(\alpha, \gamma) \mapsto ((\Phi_u(\alpha), \Phi_v(\alpha + 1), \Phi_v(\alpha + 2) \dots), \gamma)$$

*si, et seulement si,  $v$  n'est pas périodique (ou de manière équivalente si, et seulement si,  $\Phi_v$  n'est pas constante sur  $\mathbf{N}_0$ ).*

(v) *La suite  $v$  est périodique si, et seulement si,  $\Phi_v$  est constante de valeur égale à une racine  $q-1$ -ième de l'unité.*

*Démonstration.* On sait que  $\mathcal{K}(u)$  est minimal (théorème 4.3). La complète multiplicativité entraîne que  $v(\mathbf{N}_0)$  est dense dans  $G_v$  et de plus  $v(\mathbf{N}_0) = v(q^r \mathbf{N}_0)$  pour tout entier  $r \geq 0$ . On peut reprendre la démonstration de l'isomorphisme entre  $\mathcal{K}(u)$  et  $\mathcal{K}(\Delta u) \square G$ , donnée lorsque  $u$  est chaînée contractante (théorème 4.5) mais en utilisant maintenant la densité de  $v(\mathbf{N}_0)$  en lieu et place de la densité du groupe engendré par les coefficients de la matrice  $T^*$  lorsque  $T$  est la matrice de transition de  $u$ . En fait  $T$  a ici la forme (37) et ses coefficients engendrent un sous-groupe dense dans  $G_v$ . Cela démontre (i).

Pour démontrer (ii), utilisons le critère suivant, conséquence d'un résultat général ([20], théorème A) mais traduit en termes d'opérateurs :

**Lemme 8.3.** *Le produit croisé  $\mathcal{T}(q, \varphi)$  (définition (6.1)) est ergodique si, et seulement si, pour tout caractère non trivial  $\chi$  de  $G$ , l'opérateur à poids  $V_{\chi \circ \varphi}$  n'a pas 1 comme valeur propre.*

Soit  $\chi$  un caractère non trivial de  $G_v$ . Si  $V_{\chi \circ v}$  admet la valeur propre 1, alors la mesure de Dirac  $\delta_{\{1\}}$  sur  $\mathbf{U}$  appartient au spectre de  $V_{\chi \circ v}$ . Le type spectral de cet opérateur est donc discret ce qui entraîne que  $\chi \circ v$  est périodique de période  $d$ , diviseur de  $q-1$ . Plus précisément  $\chi \circ v(n) = \zeta^n$  avec  $\zeta$  racine  $q-1$ -ième de l'unité, et donc  $\Delta(\chi \circ v) = \zeta$ , d'où  $V_{\chi \circ v}(f) = \zeta f \circ \tau$ . Par suite, si  $f$  est une fonction propre de  $V_{\chi \circ v}$  de valeur propre 1 alors  $f$  est fonction propre de l'odomètre  $\tau$  de valeur propre  $\bar{\zeta}$ , ce qui est impossible car  $\zeta$  n'appartient pas au groupe  $\mathbf{D}_q$  des valeurs propres de  $\tau$ . Le lemme appliqué à  $\varphi = \Phi_u$  entraîne l'ergodicité de  $\mathcal{Z}_q \square_v G_v$ . Maintenant, puisque  $\tau$  est uniquement ergodique, la mesure produit  $h_{\mathbf{Z}_q} \otimes h_{G_v}$  est l'unique mesure borélienne invariante par  $\tau_v$ .

Démontrons (iii). Soit  $\zeta$  une valeur propre de  $\mathcal{Z}_q \square_v G_v$  et écartons le cas banal où  $\zeta \in \mathbf{D}_d$ . D'après la décomposition (34) cette valeur propre provient au moins d'un des espaces  $L^2(\mathbf{Z}_q) \otimes \chi$ , ce qui implique que l'opérateur  $V_{v, \chi}$  admet une composante discrète dans son type spectral. Ce type est donc discret du fait de sa pureté et par conséquent la suite  $\chi \circ v$  est égale à la suite  $n \mapsto \theta^n$  où  $\theta$  est une racine  $(q-1)$ -ième de l'unité. Maintenant, l'opérateur  $V_{v, \chi}$  est donné par  $V_{v, \chi}(f) = \theta f \circ \tau$  et possède une fonction propre  $h$  dans  $L^2(\mathbf{Z}_q)$ , de valeur propre  $\zeta$ . La relation  $\theta h \circ \tau = \zeta h$  montre que  $\zeta \bar{\theta}$  appartient à  $\mathbf{D}_q$ . Réciproquement, soit  $\zeta \in \mathbf{U}$  tel qu'il existe  $\theta$ , racine  $(q-1)$ -ième de l'unité (éventuellement  $\theta = 1$ ), vérifiant  $\zeta \bar{\theta} \in \mathbf{D}_q$  et supposons qu'il existe un caractère  $\chi$  de  $G_v$  tel que  $\chi \circ v(n) = \theta^n$ . Par ailleurs, il existe un caractère  $\psi$  de  $\mathbf{Z}_q$  déterminé par la valeur  $\psi(1) = \zeta \bar{\theta}$  et par hypothèse  $V_{v, \chi}(\psi)(\alpha) = \theta \psi(\alpha + 1) = \theta \psi(1) \psi(\alpha)$ ; par conséquent  $V_{v, \chi}(\psi) = \zeta \psi$ . Alors, un calcul direct montre que  $\psi \otimes \chi$  est une fonction propre de  $\tau_v$ , de valeur propre  $\zeta$ .

Démontrons (iv). Il s'agit essentiellement de montrer que l'application  $\psi : \mathbf{Z}_q \rightarrow K_{\Delta v}$ , définie par  $\psi(\alpha) = (\Phi_v(\alpha), \Phi_v(\alpha + 1), \Phi_v(\alpha + 2), \dots)$  réalise une conjugaison métrique entre  $\mathcal{Z}_q$  et  $\mathcal{K}(\Delta v)$  si, et seulement si,  $v$  n'est pas périodique. La relation de commutation  $S \circ \psi = \psi \circ \tau$  est banale. La surjection de  $\psi$  (à un ensemble négligeable près) résulte du lemme 5.1 associé à la remarque 5.1. L'injectivité est une conséquence du lemme 8.1 en prenant pour  $\varphi$  l'application  $\Phi_u$ . En effet, si  $\psi$  n'est pas injective, le lemme implique que  $\Phi_u$  se prolonge par continuité en  $-1$  (et en y regardant de près,  $\Phi_u$  est continue en ce point) alors (théorème 6.2)  $v_n = \zeta^n$  où  $\zeta$  est une racine  $(q-1)$ -ième de l'unité et donc  $v$  est périodique (de période  $q-1$ ) et  $\Phi_u$  constante. Réciproquement, si  $v$  est périodique il en résulte immédiatement que  $\psi$  n'est pas injective.

La propriété (v) a déjà été démontrée; elle est rappelée ici pour compléter le théorème. ■

### 8.1.3 Cas général d'une suite chaînée non contractante

La suite  $u$  est donnée par (38) que l'on écrira sous la forme  $u = v.p$  où  $v$  est complètement  $q$ -multiplicative et  $p$  une suite périodique de période  $q$ . Le produit de  $v$  par  $p$  a pour effet de tordre la structure de produit croisé mise en évidence plus haut pour la suite  $v$ . La situation est assez analogue à celle étudiée lorsque la suite  $u$  était périodique. Plus précisément

**Théorème 8.2.** *Soit  $u = v.p$  où  $v$  est complètement  $q$ -multiplicative et  $p$  une suite périodique de période  $q$  et supposons  $u$  non périodique. Alors le flot  $\mathcal{K}(u)$  est strictement ergodique, métriquement conjugué à  $\mathcal{K}(v)$ .*

*Démonstration.* L'application  $\Phi_v$  vérifie les hypothèses des lemmes 8.1 et 8.2. Pour tout  $\omega \in K_v$  et toute suite croissante d'entiers  $(n_k)_k$  telle que  $\lim_k S^{n_k}v = \omega$ , en passant par  $\Delta v$ , on voit que la suite  $(n_k)_k$  converge dans  $\mathbf{Z}_q$ . Cette limite ne dépendant pas du choix de la suite  $(n_k)_k$ , notons-là  $\alpha(\omega)$ . Alors, la suite  $S^{n_k}u$  converge vers  $\omega.S^{\alpha(\omega)_0}p : n \mapsto \omega_n p(\alpha(\omega)_0 + n)$ . En particulier, cette limite appartient à  $K_u$ . Notons que pour toute suite d'entiers  $(n_k)_k$  convergente dans  $\mathbf{Z}_q$  de limite  $\alpha$ , la suite  $S^{n_k}(p)$  est égale à  $S^{\alpha_0}p$  dès que  $k$  est assez grand. Cela conduit à définir l'application  $f : K_v \rightarrow K_u$ ,  $f(\omega) = \omega.S^{\alpha(\omega)_0}p$ . Puisque  $v = up'$  où  $p'$  est la suite périodique définie par  $p'(n) = p(n)^{-1}$ , la construction précédente détermine une application  $f' : K_u \rightarrow K_v$ , analogue à  $f$  et qui est en outre l'application réciproque de  $f$ . Il reste à montrer que  $f$  est continue, son application réciproque le sera aussi du fait de la compacité. Fixons  $\omega \in K_v$  et soit  $(\omega^{(n)})_n$  une suite dans  $K_v$  qui converge vers  $\omega$ . La suite  $(\Delta\omega^{(n)})_n$  converge donc vers  $\Delta\omega$ . Soit  $\alpha^{(n)}$  et  $\alpha$  dans  $\mathbf{Z}_q$  associés respectivement à  $\Delta\omega^{(n)}$  et  $\Delta(\omega)$  par le lemme 8.2. D'après ce qui précède, on peut construire une suite d'entiers  $(m_n)_n$  telle que  $e_0(m_n) = \alpha_0^{(n)}$  et  $\lim_n S^{m_n}v = \omega$ . La suite  $n \mapsto m_n$  converge donc vers  $\alpha$  et de ce fait,  $e_0(m_n) = \alpha_0$  dès que  $n$  est assez grand. En conséquence,  $\lim_n f(\omega^{(n)}) = f(\omega)$ . ■

## 8.2 Dynamique d'une suite de Hadamard

Supposons la suite  $u$  chaînée et de Hadamard en base  $q$ , à valeurs dans un groupe abélien  $G$  d'ordre  $N$  (nécessairement diviseur de  $q$ ). On sait déjà que le flot  $\mathcal{K}(u)$  est strictement ergodique, métriquement conjugué au produit croisé  $\mathcal{Z}_q \square_u G$  pour lequel tous les points de  $\mathbf{Z}_q \times G$  sont génériques. Le théorème suivant précise le type spectral de ce système :

**Théorème 8.3.** *Lorsque  $u$  est de Hadamard, le type spectral du produit croisé  $\mathcal{Z}_q \square_u G$  sur l'orthocomplément de l'odomètre  $\mathcal{Z}_q$  est la mesure de Lebesgue.*

*Démonstration.* D'après la décomposition (34), il suffit de montrer que pour tout caractère non trivial  $\chi$  de  $G$  l'opérateur à poids  $V_{u,\chi}$  est de type spectral Lebesgue. c'est le théorème 7.4. ■

**Exemple 10.** Reprenons l'exemple 8 lorsque  $\mathcal{A}$  est un groupe cyclique d'ordre  $q$ . Ce cas a été exploré par M. Queffélec [26] d'un point de vue spectral bien que le système dynamique associé à la suite chaînée ne fut pas exhibé explicitement comme produit croisé. Les résultats de [26] (théorème 3) donne la décomposition suivante du type spectral de  $\mathcal{Z}_q \square_r \mathbf{U}_q$  pour la suite chaînée  $r$  de matrice de transition (8) et de conditions initiales  $r_0 = r_1 = \dots = r_{q-1} = 1$  :

- une composante atomique correspondante à l'odomètre  $\mathcal{Z}_q$  ;

et dans l'orthocomplément de l'odomètre, la décomposition hilbertienne (34) donne :

– une composante de Lebesgue de multiplicité  $q\varphi(q)$  qui correspond aux  $\varphi(q)$  caractères d'ordre  $q$  ;

– pour chaque diviseur  $d$  non trivial de  $q$ , une composante singulière, produit de Riesz généralisé, de multiplicité  $d\varphi(d)$  et provenant des  $\varphi(d)$  caractères d'ordre  $d$ .

Si  $q$  est un nombre premier, il n'y a pas de composante spectrale singulière continue et ce cas correspond à une suite chaînée de Hadamard régulière à droite et à gauche relevant du théorème 8.3.

### 8.3 Dynamique d'une suite chaînée non périodique

Dans cette section, nous assemblons les résultats précédents pour décrire le flot associé à une suite chaînée non périodique  $n \mapsto u_n$  à valeurs dans  $\mathbf{U}$ . Soit  $G_u$  le sous-groupe fermé de  $\mathbf{U}$  engendré par les valeurs de la suite et soit  $\Gamma_u$  le sous-groupe fermé de  $G_u$  qui laisse invariant  $K_u$ , à savoir  $\Gamma_u := \{\gamma \in \mathbf{U}; \gamma.K_u = K_u\}$ . Ce groupe a déjà joué un rôle important, il sera appelé groupe des *valeurs essentielles topologiques* de  $u$ .

**Théorème 8.4.** *Soit  $u$  une suite dans  $\mathbf{U}$ , chaînée en base  $q$ , non périodique, telle que le groupe des valeurs essentielles topologiques  $\Gamma_u$  soit égal au sous-groupe fermé  $G_u$  engendré par les valeurs de  $u$ . Alors le flot minimal  $\mathcal{K}(u)$  est topologiquement conjugué au produit croisé canonique  $\mathcal{K}(\Delta(u)) \square G_u$ . Si de plus l'indice de périodicité de  $u$  (cf. définition 8.1) est nul alors  $\mathcal{K}(u)$  est strictement ergodique, métriquement conjugué au produit croisé  $\mathcal{Z}_q \square G_u$ . La composante discrète du type spectral provient de l'odomètre  $\mathcal{Z}_q$  et le type spectral dans l'orthocomplément de l'odomètre est continue.*

*Démonstration.* La première partie du théorème est une conséquence directe de l'étude topologique faite sur les flots  $\mathcal{K}(u)$  (théorème 4.3 et proposition 4.1). Utilisons le lemme 8.1 avec l'application  $\varphi = \Phi_w$  définie par (28). L'application  $\psi$  introduite dans ce lemme correspond à celle du lemme 5.1 avec la situation décrite dans la remarque 5.1. Il s'en suit que  $\mathcal{Z}_q \square G_u$  est conjugué avec  $\mathcal{K}(\Delta(u)) \square G_w$  par l'application  $(\alpha, \gamma) \mapsto (\psi(\alpha), \gamma)$  qui est continue en tout point  $(\alpha, \gamma)$  tel que  $\alpha$  ne soit par un entier négatif. Le flot de Cantor  $\mathcal{K}(\Delta u)$  est strictement ergodique (lemme 5.1) métriquement conjugué (par  $\psi$ ) à l'odomètre  $\mathcal{Z}_q$ . Montrons que  $\mathcal{Z}_q \square G_u$  est ergodique et que les opérateurs à poids issus de la décomposition hilbertienne (34) ont un spectre continu. Ce résultat n'a été établi, pour l'instant, que pour  $\chi \circ u$  chaînée contractante ou lorsque la suite est non contractante, ainsi que les suites  $\chi^n \circ u$  ( $n \in \mathbf{N}_0$ ) pour les caractères  $\chi^n$  non triviaux sur  $G_{\chi \circ u}$ , aucune des suites  $\chi^n \circ u$  n'étant alors périodiques (section 7.4).

Notons  $T$  la matrice de transition de  $u$ . Il reste à traiter le cas mixte où la norme quadratique de la matrice de transition  $\chi T$  de la suite chaînée  $\chi \circ u$  est strictement inférieure à  $q$  mais avec l'existence d'entier  $k$  tel que  $\chi^k$  soit un caractère non trivial de  $G_u$  tandis que la matrice  $\chi^k T$  dégénère en une matrice de norme quadratique  $q$  sans que  $\chi^k \circ u$  ne soit périodique (indice de multiplicativité de  $\chi T$  non nul avec son indice de périodicité nul). Pour traiter ce cas, repartons de  $u$  à la place de  $\chi \circ u$  et commençons par établir l'ergodicité de  $\mathcal{Z}_q \square G_u$ . Il y a plusieurs méthodes pour obtenir ce résultat. Nous allons le démontrer en utilisant les propriétés de rigidité, exposées dans le théorème 7.6. Supposons donc que le produit croisé  $\mathcal{Z}_q \square G_u$  ne soit pas ergodique. Il existe  $F \in L^2(\mathbf{Z}_q \times G_u)$ , non constante, vérifiant  $F \circ \tau_u = F$ . La décomposition hilbertienne (34) permet d'exhiber  $f \in L^2(\mathbf{Z}_q)$  à partir de  $F$  et un caractère  $\chi$  nontrivial de  $G_u$  tels que  $f = \chi(\Phi_u)(f \circ \tau)$ . L'ergodicité de l'odomètre permet de choisir  $f$

de module constant égal à 1 et après itération,  $f \overline{f \circ \tau^n} = \chi(\Phi_u^{(n)})$ . Intégrons et passons à la limite selon la suite  $k \mapsto q^k$ . D'une part

$$\lim_k \int_{\mathbf{Z}_q} f(\alpha) \overline{f(\alpha + q^k)} h_q(d\alpha) = 1$$

et d'autre part (théorème 7.6)

$$\lim_k \int_{\mathbf{Z}_q} \chi(\Phi_u^{(q^k)}(\alpha)) h_q(d\alpha) = \int_{\mathbf{Z}_q} \chi(\Phi_u^{(q)}(\alpha)) h_q(d\alpha) = 1. \quad (40)$$

Par convexité, la dernière égalité en (40) s'écrit

$$\chi(\Phi_u(\alpha)\Phi_u(\alpha + 1) \cdots \Phi_u(\alpha + q - 1)) = 1 \quad h_{q\text{-p.p.}}$$

Le premier membre de cette dernière égalité représente la fonction  $\chi \circ \Phi^{(q)}$  qui est continue sauf éventuellement en les points  $-1, -2, \dots, -q$ , qui proviennent des discontinuités éventuelles de  $\chi \circ \Phi$ ,  $\chi \circ \Phi \circ \tau$ ,  $\dots$ ,  $\chi \circ \Phi \circ \tau^{q-1}$  respectivement. Par conséquent,  $\chi \circ \Phi^{(q)}$  se prolonge par continuité sur tout  $\mathbf{Z}_q$ , ce qui correspond à la possibilité de prolonger, par continuité,  $\chi \circ \Phi$  en  $-1$ . D'après le théorème 6.2,  $\chi \circ u$  est alors périodique. Cette éventualité étant exclue, l'ergodicité de  $\mathcal{Z}_q \square_u G_u$  est acquise.

Pour finir, montrons que l'hypothèse faite sur  $u$ , à savoir que pour tout caractère non trivial  $\chi$  de  $G_u$  la suite  $\chi \circ u$  n'est pas périodique, entraîne que l'opérateur à poids  $V_u$  est de type spectral continu. Il suffit de montrer qu'il n'est pas discret. C'est le cas si  $u$  est non contractante sans être périodique (théorèmes 8.2, 8.4 et section 7.5). Mais supposons le type spectral discret. Cette propriété est équivalente à l'existence d'une fonction propre  $f$  de  $V_u$  dans  $L^2(\mathbf{Z}_q)$  de valeur propre  $\zeta \in \mathbf{U}$ , d'où  $f(\alpha) = \bar{\zeta} \Phi_u(\alpha) f(\alpha + 1)$   $h_{q\text{-p.p.}}$ , relation qui implique que pour tout caractère non trivial  $\chi$  de  $G_u$  l'opérateur à poids  $V_{u,\chi}$  est aussi de type spectral discret. Il résulte du cas non contractant que la matrice de transition  $\chi T$  de la suite chaînée  $\chi \circ u$  est de norme quadratique strictement inférieure à  $q$ . En d'autres termes, la suite  $u$  est chaînée contractante, mais le théorème 6.3 fournit une contradiction. Ainsi  $V_u$  est de type spectral continu. ■

Le théorème 8.4 ne donne pas de précision sur la partie continue du type spectral. Cela dépend en fait du type spectral des opérateurs à poids associés au produit croisé. Montrons, sur un exemple, l'importance de l'hypothèse  $\Gamma_u = G_u$ .

**Exemple 11.** Soient  $s(\cdot)$  la fonction somme-des-chiffres en base 2,  $s_{11}(n)$  le nombre de 11 dans le développement binaire de l'entier  $n$ ,  $e_0(n)$  son digit de parité et  $\theta$  un nombre complexe de module 1. La suite

$$x : n \mapsto \theta^{e_0(n)} (-1)^{s(n)} i^{s_{11}(n)}$$

est chaînée en base 2 de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

avec  $G_x = [\theta] \mathbf{U}_4$  (où  $[\theta]$  désigne le sous-groupe fermé de  $\mathbf{U}$  engendré par  $\theta$ ) et  $\Gamma_x = \mathbf{U}_4$  (groupe des racines 4-ièmes de l'unité). Si  $\theta \in \mathbf{U}_4$ , alors  $G_x = \Gamma_x = \mathbf{U}_4$ ,  $x$  est contractante et  $\mathcal{Z}_2 \square_x \mathbf{U}_4$  est ergodique, métriquement conjugué à  $\mathcal{K}(x)$ . Le type spectral de  $\mathcal{Z}_2 \square_x \mathbf{U}_4$  est la

somme du type spectral de  $\mathcal{Z}_2$ , du type d'une mesure singulière continue associée au caractère  $\chi_1 : z \rightarrow z$  (ou  $\chi_3 : z \rightarrow z^3$  puisque  $\chi_3 \circ x = -x$ ) et du type Lebesgue provenant du caractère  $\chi_2 : z \rightarrow z^2$ . Si  $\theta \notin \mathbf{U}_4$ , la suite  $x$  n'est pas contractante ; le caractère  $\chi_4 : z \mapsto z^4$  n'est pas trivial sur  $G_x$  et l'opérateur à poids correspondant admet la fonction  $f : \alpha \mapsto \bar{\theta}^{4e_0(\alpha)}$  comme fonction propre de valeur propre 1. Cependant, quel que soit  $\theta$ , le flot  $\mathcal{K}(u)$  est strictement ergodique, topologiquement conjugué au flot  $\mathcal{K}(y)$  pour  $y : n \mapsto (-1)^{s(n)} i^{s_{11}(n)}$ . Cette dernière suite est chaînée contractante et de plus, la suite  $n \mapsto y_n^2$  est de Hadamard.

Plusieurs questions n'ont actuellement pas de réponses ou n'ont que des réponses partielles. Elles portent naturellement sur les disjonctions spectrales entre les opérateurs à poids issus de suites chaînées contractantes et de suites complètement  $q$ -multiplicatives. Nous conjecturons, par exemple, que si  $u$  et  $u'$  sont deux suites chaînées à valeurs dans  $\mathbf{U}$ , contractantes en base  $q$  et  $q'$  respectivement, avec  $q$  et  $q'$  premiers entre eux, alors les opérateurs  $V_u$  et  $V_{u'}$  sont de types spectraux mutuellement singuliers. C'est le cas si les suites chaînées sont non périodiques et respectivement complètement  $q$ -multiplicative et complètement  $q'$ -multiplicative (cf. [10]).

**Remerciements.** Les auteurs ont beaucoup apprécié les remarques et suggestions constructives de Guy Barat qui a motivé plusieurs améliorations dans l'étude du flot dérivé  $\mathcal{K}(\Delta u)$ . Ils remercient également très vivement Marius Iosifescu pour ses encouragements constants dans l'élaboration de ce travail.

## Références

- [1] J.-P. Allouche and P. Liardet, *Generalized Rudin-Shapiro sequences*, Acta Arith. **60** (1991), 1–27.
- [2] G. Barat, V. Berthé, P. Liardet and J. Thuswaldner, *Dynamical directions in numeration*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **56-7** (2006) 1987–2092.
- [3] G. Barat and P. Grabner, *Distribution of binomial coefficients and digital functions*, J. London Math. Soc. **64-2** (2001), 523–547.
- [4] G. Brown and W. Moran, *A dichotomy for infinite convolutions of discrete measures*, Proc. Camb. Phil. Soc. **73** (1973), 307–316.
- [5] E. Cateland, *Suites digitales et suites  $k$ -régulières*, Ph.D. Thesis, Université de Bordeaux I, 1992.
- [6] J. Coquet, T. Kamae et M. Mendès France, *Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 369–384.
- [7] J. Coquet and P. Liardet, *A metric study involving independent sequences*, J. Analyse Mathématique **49** (1987), 15–53.
- [8] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981, M. B. Porter Lectures.
- [9] A.O. Gel'fond, *Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données*, Acta Arith. **13** (1968), 259–265.
- [10] P. Grabner, P. Liardet and R. Tichy, *Spectral disjointness of dynamical systems related to some arithmetic functions*, Publicationes Mathematicae Debrecen **66/1-2** (2005), 213–244.

- [11] E. Hewitt and K.A. Ross, *Abstract harmonic analysis I*, Springer-Verlag (1963).
- [12] H. Helson, *Cocycles on the cercle*, J. Operator Theory **16** (1986), 189–199.
- [13] A. Iwanik, *Weyl almost periodic points in topological dynamics*, Colloq. Math. **56-1** (1988), 107–119
- [14] K. Jacobs and M. Keane, *0–1 sequences of Toeplitz type*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **13** (1969), 123–131.
- [15] T. Kamae, *Mutual singularity of spectra of dynamical systems given by “sums of digits” to different bases*, Dynamical systems, Vol. I –Warsaw, Soc. Math. France, Paris, 1977, pp. 109–114. Astérisque, No. 49.
- [16] A. Katok and J.-P. Thouvenot, *Spectral Properties and Combinatorial Constructions in Ergodic Theory*, in Handbook of Dynamical Systems, Vol 1B, Edited by B. Hasselblatt and A. Katok, Elsevier (2006), 649–743.
- [17] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience, New York, 1974.
- [18] E. Lesigne et C. Mauduit, *Propriétés ergodiques des suites  $q$ -multiplicatives*, Compositio Math. **100** (1996), 131–169.
- [19] P. Liardet, *Répartition et ergodicité*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des Nombres, 19e année : 1977/78, fasc. 1(1978), Exposé No. 10, pp. 12.
- [20] P. Liardet, *Propriétés génériques de processus croisés*, Israel L. Math. **39-4** (1981), 303–325.
- [21] P. Liardet, *Regularities of distribution*, Compositio Math. **61** (1987), 267–293.
- [22] P. Liardet, *Propriétés harmoniques de la numération suivant Jean Coquet*, in Colloque de Théorie Analytique des Nombres “Jean Coquet”, Journées SMF-CNRS, CIRM 1985, Publ. Math. d’Orsay No 88-02, H. Daboussi, J.-M. Deshouillers et P. Liardet, Editeurs (1988), 1–35.
- [23] J.-L. Maucilaire, *A characterization of generalized Rudin-Shapiro sequences with values in a locally compact abelian group*, Acta Arithmetica **68-3** (1994), 213–217.
- [24] M. Queffélec, *Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 385–421.
- [25] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis*, Lecture Notes in Math., **1294**, Spinger-Verlag (1987).
- [26] M. Queffélec, *Une nouvelle propriété des suites de Rudin-Shapiro*, Ann. Institut Fourier **37-2** (1987), 115–138.
- [27] K. Schmidt, *Cocycles on ergodic transformation groups*, Macmillan Company of India, Ltd., Delhi, Macmillan Lectures in Mathematics, Vol. 1 (1977)
- [28] A.M. Stepin, *Spectral properties of generic dynamical systems*, Math. U.S.S.R. Izv. **50** (1986), 159–192.
- [29] W. Veech, *Finite group extensions of irrational rotations*, Israel J. Math. **21** (1975), 240–259.
- [30] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, New York (1982).
- [31] S. Williams, *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **67** (1984), 95–107.

- [32] N. Wiener, *The spectrum of an array and its application to the study of the translation properties of a simple class of arithmetical function*, J. Math. and Phys. **6** (1927), 145–157.

Isabelle Abou,  
Pierre Liardet  
Université de Provence,  
39, rue Frédéric Joliot-Curie,  
F-13453 Marseille cedex 13  
e-mail :  
isabelleabou@hotmail.com  
liardet@cmi.univ-mrs.fr