



# Compilation de requêtes à préférences en problèmes de contraintes qualitatives

Jean-Francois Condotta, Souhila Kaci

## ► To cite this version:

Jean-Francois Condotta, Souhila Kaci. Compilation de requêtes à préférences en problèmes de contraintes qualitatives. 9èmes Journées Francophones de Programmation par Contraintes (JFPC 2013), Jun 2013, Aix-en-Provence, France. pp.85-94. hal-00870572

**HAL Id: hal-00870572**

**<https://hal.science/hal-00870572>**

Submitted on 15 Feb 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Compilation de requêtes à préférences en problèmes de contraintes qualitatives

---

Jean-François Condotta<sup>1</sup>

Souhila Kaci<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université Lille-Nord de France, Artois, CRIL-CNRS, UMR 8188  
Rue de l'université, F-62307  
Lens, France  
[condotta@cril.fr](mailto:condotta@cril.fr)

<sup>2</sup>Université Montpellier 2, LIRMM-CNRS, UMR 5506  
161 rue Ada, F-34095  
Montpellier, France  
[kaci@lirmm.fr](mailto:kaci@lirmm.fr)

## Résumé

Les préférences comparatives sont les ingrédients de base des logiques conditionnelles pour la représentation compacte de préférences d'utilisateurs. Ces préférences peuvent être strictes ou non et obéir à différentes sémantiques. Dans la littérature, des algorithmes ont été développés afin de calculer une relation de préférence sur des alternatives étant donné un ensemble de préférences et une ou plusieurs sémantiques. Ces algorithmes en utilisant des principes du raisonnement non monotone (plus particulièrement, les principes de minimum et de maximum de spécificité) veillent à ce que les relations de préférence soient des préordres complets. Cependant, la limitation principale de ces logiques concernent les requêtes de préférences lorsque deux alternatives sont comparées. En effet, étant donné deux alternatives ayant la même préférence par rapport à la relation de préférence, il n'y a aucune indication permettant de savoir si cette égalité résulte d'une égalité des deux préférences ou d'une incomparabilité des deux alternatives qui a été réduite en une égalité par les principes de spécificité. D'autre part, les préférences comparatives et les sémantiques associées peuvent être traduites en problèmes de satisfaction de contraintes qualitatives à partir desquels nous pouvons avoir un ordre précis entre deux alternatives. Dans cet article, nous étudions cette passerelle et proposons une compilation des requêtes de préférences basées sur des logiques

conditionnelles en problèmes de contraintes qualitatives.

## 1 Introduction

Les préférences sont utiles dans de nombreux problèmes de la vie quotidienne, guidant les humains à prendre des décisions des plus élémentaires jusqu'à des décisions organisationnelles et professionnelles complexes. Les préférences sont particulièrement importantes dans le cadre du raisonnement non monotone, dans les systèmes multi-agents, pour la prise de décision, etc.

Il est communément admis qu'ordonner la totalité des alternatives est simplement irréalisable. Ceci, du fait que l'ensemble des alternatives est généralement trop grand. Heureusement, en pratique, nous avons les préférences posées sur des descriptions partielles d'alternatives. Ces préférences peuvent être données sous différents formats. Cependant, elles se réfèrent implicitement ou explicitement à des préférences de la forme "préférer X à Y". Nous pouvons aussi rencontrer des préférences comparatives conditionnelles de la forme "si Z alors préférer X à Y". Ces préférences conditionnelles permettent d'exprimer des préférences générales et des préférences plus spécifiques. Par exemple, on

peut préférer *le poisson* à *la viande* mais cette préférence peut être inversée (i.e., préférer *la viande* au *poisson*) quand *du vin rouge* est servi.

Les logiques conditionnelles sont des langages de représentation de préférences qui supportent la première forme de préférences. Elles utilisent différents principes de complétion afin de calculer une relation de préférence induite par un ensemble de préférences. Elles utilisent des éléments du raisonnement non monotone, notamment les principes de spécificité minimale et maximale, pour calculer une relation de préférence (qui est un préordre complet) sur des alternatives étant donné un ensemble de préférences. Les logiques conditionnelles ont été étendues pour traiter des préférences comparatives non strictes. Plus précisément, on peut établir que "X est au moins aussi préféré que Y" (conditionnellement ou inconditionnellement). Ainsi, des préférences de la forme "X et Y sont autant préférés" peuvent être également formulées dans ces logiques. Comme les préférences sont exprimées sur des descriptions partielles d'alternatives, chaque préférence comparative conduit à la comparaison de deux ensembles d'alternatives. Différentes manières sont possibles pour réaliser une telle comparaison. Elles sont appelées sémantiques de préférences. Elles expriment plus ou moins des contraintes fortes sur la relation de préférence associée à l'ensemble des préférences comparatives posées.

Dans la proposition originale des logiques conditionnelles, seules des préférences strictes sont considérées. Deux alternatives ayant une égale préférence par rapport à la relation de préférence est interprété comme deux alternatives originellement incomparables. Les principes de spécificité renforcent leur égalité puisqu'elles sont préférées à toutes les alternatives de rang inférieur dans le préordre et moins préférées à toutes les alternatives de rang supérieur par rapport à ces principes. Cependant, ceci n'est plus le cas avec les logiques conditionnelles étendues, i.e. lorsque des préférences non strictes sont présentes. En fait, la raison d'une égalité entre deux alternatives est perdue. Nous ne savons plus si elles sont incomparables ou également préférées par rapport à des préférences non strictes. Cette information est particulièrement importante dans des systèmes de recommandation par exemple.

Fort heureusement, la représentation de préférences et les problèmes de satisfaction de contraintes sont des thèmes proches rendant possible la résolution du problème décrit précédemment. Plus précisément, des préférences comparatives et leur sémantique associée peuvent être traduites en problèmes de satisfaction de contraintes qualitatives dans lesquels nous pouvons avoir un ordre précis sur deux alternatives. Dans cet

article, nous étudions cette passerelle et présentons une compilation des requêtes à préférences basées sur des logiques conditionnelles en problèmes de contraintes qualitatives.

Après des rappels nécessaires donnés dans la section 2, nous présentons les logiques conditionnelles en section 3. Puis nous donnons un exemple soulignant les limitations de ces logiques dans la section 4. Après cela, nous présentons les problèmes de satisfaction de contraintes sur des ensembles partiellement ordonnés en section 5 avant de proposer un encodage des requêtes à préférences basées sur des logiques conditionnelles en problèmes de contraintes qualitatives en section 6. Pour terminer, nous concluons.

## 2 Rappels

Soit  $V = \{V_1, \dots, V_h\}$  un ensemble de  $h$  variables, chaque variable  $V_i$  prend ses valeurs dans un domaine  $Dom(V_i)$ . Une alternative possible, dénotée par  $\omega$ , est le résultat d'une attribution d'une valeur de  $Dom(V_i)$  à la variable  $V_i$  pour chacune des variables  $V_i \in V$ .  $\Omega$  dénote l'ensemble de toutes les alternatives possibles. Nous supposons que cet ensemble est fixé et fini. Soit  $\mathcal{L}$  un langage basé sur  $V$ .  $Mod(\alpha)$  dénote l'ensemble des alternatives satisfaisant la formule  $\alpha$  (construite sur  $\mathcal{L}$ ). Cet ensemble est appelé  $\alpha$ -alternatives. Une relation de préférence  $\succeq$  sur  $\mathcal{X} = \{x, y, z, \dots\}$  est une relation binaire  $\subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  telle que  $x \succeq y$  lorsque " $x$  est au moins aussi préféré que  $y$ ".  $x \approx y$  signifie que  $x \succeq y$  et  $y \succeq x$  sont satisfaits i.e.,  $x$  et  $y$  sont autant préférés. Enfin,  $x \sim y$  signifie que ni  $x \succeq y$  et ni  $y \succeq x$  sont satisfaits, i.e.,  $x$  et  $y$  sont incomparables. La notation  $x \succ y$  exprime que  $x$  est strictement préféré à  $y$ . Nous avons  $x \succ y$  si  $x \succeq y$  est satisfait et  $y \succeq x$  ne l'est pas.  $\succeq$  est un préordre sur  $\mathcal{X}$  ssi  $\succeq$  est réflexive et transitive, i.e.,  $\forall x \in \mathcal{X}, x \succeq x$  est satisfait et  $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ , si  $x \succeq y$  et  $y \succeq z$  alors  $x \succeq z$ . Nous supposons qu'une relation de préférence est un préordre.  $\succeq$  est complet ssi  $\forall x, y \in \mathcal{X}, x \succeq y$  ou  $y \succeq x$  est satisfait.  $\succeq$  est cyclique ssi  $\exists x, y \in \mathcal{X}$  tels que  $x \succ y$  et  $y \succ x$  sont satisfaits. Dans le cas contraire, il est acyclique.

Étant données une relation de préférence  $\succeq$  et une formule  $\alpha$ , l'ensemble des  $\alpha$ -alternatives maximale (resp. minimale) préférées est dénoté par  $\max(\alpha, \succeq)$  (resp.  $\min(\alpha, \succeq)$ ) et est défini par :

$$\begin{aligned} \max(\alpha, \succeq) &= \{\omega | \omega \in Mod(\alpha), \nexists \omega' \in Mod(\alpha), \omega' \succ \omega\}, \\ \min(\alpha, \succeq) &= \{\omega | \omega \in Mod(\alpha), \nexists \omega' \in Mod(\alpha), \omega \succ \omega'\}. \end{aligned}$$

Pour des raisons pratiques, un préordre complet  $\succeq$  peut également être représenté par une partition bien

ordonnée de  $\Omega$ . C'est une représentation équivalente, dans le sens où chaque préordre correspond à une partition ordonnée et vice versa.

**Définition 1 (Partition)** Une séquence d'ensembles d'alternatives de la forme  $(E_1, \dots, E_n)$  est une partition de  $\Omega$  ssi

- (i)  $\forall i, E_i \neq \emptyset$ ,
- (ii)  $E_1 \cup \dots \cup E_n = \Omega$ , et
- (iii)  $\forall i, j, E_i \cap E_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ .

Une partition de  $\Omega$  est ordonnée si et seulement si elle est associée avec un préordre  $\succeq$  sur  $\Omega$  tel que  $(\forall \omega, \omega' \in \Omega \text{ avec } \omega \in E_i, \omega' \in E_j \text{ nous avons } i \leq j \text{ ssi } \omega \succeq \omega')$ .

**Définition 2** [12] Soient  $\succeq$  et  $\succeq'$  deux préordres complets sur  $\Omega$  représentés respectivement par  $(E_1, \dots, E_n)$  et  $(E'_1, \dots, E'_n)$ . Nous dirons que  $\succeq$  est moins spécifique que  $\succeq'$ , noté par  $\succeq \sqsubseteq \succeq'$ , ssi  $\forall \omega \in \Omega$ , si  $\omega \in E_i$  et  $\omega \in E'_j$  alors  $i \leq j$ .  $\succeq$  appartient à l'ensemble des préordres minimalement (resp. maximalement) spécifiques, parmi un ensemble de préordres complets, si et seulement si, il n'existe pas de préordre dans l'ensemble qui est strictement moins (resp. plus) spécifique que  $\succeq$ . Si  $\succeq$  est l'unique préordre complet minimalement (resp. maximalement) spécifique alors il est appelé le préordre le moins spécifique (resp. le plus spécifique).

### 3 Logiques conditionnelles

Dans cette section nous présentons quelques rappels concernant les logiques conditionnelles. Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à [4, 3, 2, 11, 6].

#### 3.1 Préférences comparatives

L'ingrédient de base des logiques conditionnelles sont les préférences comparatives qualitatives de la forme “préférer  $\alpha$  à  $\beta$ ”. Le gestion de telles préférences est facile lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  font chacune référence à une alternative. Cependant, cette tâche devient complexe lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  référencent des ensembles d'alternatives, en particulier lorsqu'elles partagent des alternatives. Afin de prévenir cette situation, von Wright [10] interprète “préférer  $\alpha$  à  $\beta$ ” comme un problème de choix entre  $\alpha \wedge \neg \beta$  et  $\beta \wedge \neg \alpha$ . Nous avons ainsi “préférer  $\alpha$  à  $\beta$ ” qui conduit à préférer les  $\alpha \wedge \neg \beta$ -alternatives aux  $\beta \wedge \neg \alpha$ -alternatives. Des situations particulières apparaissent lorsque  $\alpha \wedge \neg \beta$  (resp.  $\beta \wedge \neg \alpha$ ) est une contradiction ou n'est pas réalisable. En pareil cas il est remplacé par  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). Nous reportons le lecteur à [10] pour plus de détails. Pour des raisons de simplicité, nous supposons que  $\alpha \wedge \neg \beta$  et  $\beta \wedge \neg \alpha$  sont cohérents et réalisables.

**Remarque 1** On pourrait se demander si “préférer poisson à vin rouge” est une préférence puisque nous comparons la valeur de deux variables différentes, nommément plat principal (i.e., poisson) et vin (i.e., vin rouge). C'est en fait une déclaration d'importance. C'est à dire qu'il est plus important pour un individu d'avoir un menu composé d'un poisson et sans vin rouge plutôt qu'un menu composé de vin rouge sans poisson. Ainsi, les menus composés de poisson et de vin blanc seront préférés aux menus composés de viande et de vin rouge. La clause “préférer  $\alpha$  à  $\beta$ ” est une déclaration de préférence lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  font référence aux valeurs d'une même variable e.g. “préférer poisson à viande”. Que “préférer  $\alpha$  à  $\beta$ ” corresponde à une déclaration de préférence ou une déclaration d'importance, cela revient à préférer les  $\alpha \wedge \neg \beta$ -alternatives aux  $\beta \wedge \neg \alpha$ -alternatives. Pour cette raison, nous ne faisons pas la distinction entre une déclaration de préférence et une déclaration d'importance.

Notons que des préférences comparatives peuvent s'exprimer par rapport à un contexte. Elles sont alors de la forme “si  $\gamma$ , préférer  $\alpha$  à  $\beta$ ” qui s'entend pour “préférer  $\alpha$  à  $\beta$  lorsque  $\gamma$  est satisfait”. Cela signifie également que nous comparons les  $\gamma \wedge \alpha \wedge \neg \beta$ -alternatives et les  $\gamma \wedge \beta \wedge \neg \alpha$ -alternatives, ce qui correspond à “préférer  $\gamma \wedge \alpha$  à  $\gamma \wedge \beta$ ”. Sans perte de généralité, nous nous focalisons sur des déclarations de la forme “préférer  $\alpha$  à  $\beta$ ”.

Pour terminer, les logiques conditionnelles ont été étendues pour gérer des préférences comparatives non strictes de la forme “ $\alpha$  est au moins aussi préféré que  $\beta$ ”. Que la préférence de  $\alpha$  sur  $\beta$  soit stricte ou non, nous devons comparer les  $\alpha \wedge \neg \beta$ -alternatives et les  $\beta \wedge \neg \alpha$ -alternatives.

Différentes manières ont été proposées dans la littérature pour comparer deux ensembles d'objets. Elles sont appelées sémantiques de préférence.

#### 3.2 Sémantiques de préférence

Nous dénotons par  $\alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\alpha \trianglerighteq \beta$ ) une déclaration de préférence comparative “préférer  $\alpha$  à  $\beta$ ” (“ $\alpha$  est au moins aussi préféré que  $\beta$ ”). Une sémantique de préférence décrit la manière dont les  $\alpha \wedge \neg \beta$ -alternatives et les  $\beta \wedge \neg \alpha$ -alternatives sont rangées par rapport à la relation de préférence  $\succeq$  (à construire). Plus précisément, elle exprime une contrainte sur  $\succeq$  afin d'avoir  $\alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\alpha \trianglerighteq \beta$ ) satisfait par  $\succeq$ . Différentes approches ont été étudiées pour comparer deux ensembles d'objets. Elles ont conduit à différentes sémantiques de préférence. Nous rappelons les sémantiques les plus utilisées [4, 2, 9]. Grossièrement, ces sémantiques comparent deux ensembles d'alternatives (nommément les  $\alpha \wedge \neg \beta$ -alternatives et les  $\beta \wedge \neg \alpha$ -alternatives) sur la

base de leurs alternatives maximale et minimale-ment préférées par rapport à une relation de préférence donnée.

**Définition 3** Soit  $\succeq$  une relation de préférence. Considérons  $\alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\alpha \sqsupseteq \beta$ ).

- **Sémantique forte** [4, 3, 11]  
 $\succeq$  satisfait  $\alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\alpha \sqsupseteq \beta$ ) suivant la sémantique forte, noté par  $\succeq \models_{st} \alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\succeq \models_{st} \alpha \sqsupseteq \beta$ ), ssi  $\forall \omega \in \min(\alpha \wedge \neg \beta, \succeq), \forall \omega' \in \max(\beta \wedge \neg \alpha, \succeq), \omega \succ \omega'$  (resp.  $\omega \succeq \omega'$ ).
- **Sémantique optimiste** [8, 4]  
 $\succeq$  satisfait  $\alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\alpha \sqsupseteq \beta$ ) suivant la sémantique optimiste, noté par  $\succeq \models_{opt} \alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\succeq \models_{opt} \alpha \sqsupseteq \beta$ ), ssi  $\forall \omega \in \max(\alpha \wedge \neg \beta, \succeq), \forall \omega' \in \max(\beta \wedge \neg \alpha, \succeq), \omega \succ \omega'$  (resp.  $\omega \succeq \omega'$ ).
- **Sémantique pessimiste** [2]  
 $\succeq$  satisfait  $\alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\alpha \sqsupseteq \beta$ ) suivant la sémantique pessimiste, noté par  $\succeq \models_{pes} \alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\succeq \models_{pes} \alpha \sqsupseteq \beta$ ), ssi  $\forall \omega \in \min(\alpha \wedge \neg \beta, \succeq), \forall \omega' \in \min(\beta \wedge \neg \alpha, \succeq), \omega \succ \omega'$  (resp.  $\omega \succeq \omega'$ ).
- **Sémantique opportuniste** [9]  
 $\succeq$  satisfait  $\alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\alpha \sqsupseteq \beta$ ) suivant la sémantique opportunistes, noté par  $\succeq \models_{opp} \alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\succeq \models_{opp} \alpha \sqsupseteq \beta$ ), ssi  $\forall \omega \in \max(\alpha \wedge \neg \beta, \succeq), \forall \omega' \in \min(\beta \wedge \neg \alpha, \succeq), \omega \succ \omega'$  (resp.  $\omega \succeq \omega'$ ).

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, par abus de notation, nous écrirons  $\alpha \triangleright_* \beta$  (resp.  $\alpha \sqsupseteq_* \beta$ ), avec  $*$   $\in \{st, opt, pes, opp\}$ , pour signifier que  $\alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\alpha \sqsupseteq \beta$ ) est interprété suivant la sémantique correspondante, nommément  $*$ . Nous dirons donc que  $\succeq$  satisfait  $\alpha \triangleright_* \beta$  (resp.  $\alpha \sqsupseteq_* \beta$ ) pour signifier que  $\succeq \models_* \alpha \triangleright \beta$  (resp.  $\succeq \models_* \alpha \sqsupseteq \beta$ ).

**Définition 4** Un ensemble de préférences du type  $*$ , dénoté par  $\mathcal{P}_*$ , est un ensemble de préférences de la forme  $\{p_i \triangleright_* q_i, p_i \sqsupseteq_* q_i \mid i = 1, \dots, n\}$ , avec  $*$   $\in \{st, opt, pes, opp\}$ . Une relation de préférence acyclique  $\succeq$  est un modèle de  $\mathcal{P}_*$  si et seulement si  $\succeq$  satisfait chaque préférence  $p_i \triangleright_* q_i$  (resp.  $p_i \sqsupseteq_* q_i$ ) dans  $\mathcal{P}_*$ . Un ensemble de préférences  $\mathcal{P}_*$  est cohérent s'il admet un modèle.

### 3.3 Des ensembles de préférences aux relations de préférence

Généralement, nous devons traiter plusieurs préférences comparatives exprimées par un individu. Il existe principalement deux types de requêtes dans le cadre de la représentation des préférences : soit on recherche les alternatives maximale et minimale-ment préférées, soit

on compare deux alternatives. Dans de nombreuses applications (dans le cadre de requêtes de base données par exemple), les individus sont plus concernés par les alternatives préférées. Dans le cas où ces alternatives ne sont pas satisfaisantes (les menus préférés sont trop chers par exemple), nous devons calculer les alternatives préférées parmi les alternatives restantes, et ainsi de suite. Afin de prendre en compte ces différentes considérations, nous associons un préordre complet à un ensemble de préférences. Différents préordres complets peuvent satisfaire un ensemble de préférences étant donné une sémantique. Cependant, il est largement accepté que, pour des prises de décision, il est plus pratique de caractériser un *unique* préordre complet [4]. Le principe de spécificité a été habituellement utilisé afin de caractériser un tel préordre. Proposition 1 résume des résultats existants sur l'unicité des modèles (qui sont des préordres complets) pour chacune des sémantiques.

**Proposition 1** [6]

- (1) Le modèle le moins spécifique de  $\mathcal{P}_{\triangleright_{opt}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{opt}}$  (resp.  $\mathcal{P}_{\triangleright_{st}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{st}}$ ) existe.
- (2) Le modèle le plus spécifique de  $\mathcal{P}_{\triangleright_{pes}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{pes}}$  (resp.  $\mathcal{P}_{\triangleright_{st}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{st}}$ ) existe.
- (3) Le modèle le plus (resp. le moins) spécifique de  $\mathcal{P}_{\triangleright_{opt}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{opt}}$  (resp.  $\mathcal{P}_{\triangleright_{pes}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{pes}}$ ) n'existe pas.
- (4) Le modèle le moins / le plus spécifique n'existe pas pour  $\mathcal{P}_{\triangleright_{opp}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{opp}}$ .

Pour des préférences comparatives uniquement non strictes, à la fois existent le modèle le moins spécifique et le modèle le plus spécifique, et il existe la relation de préférence triviale pour laquelle toutes les alternatives sont équivalentes. Ainsi, la notion de spécificité maximale et minimale pour les ensembles de préférences consistant seulement à des préférences comparatives non strictes n'est pas très utile. D'autre part, les auteurs de [6] ont montré que des sémantiques peuvent être utilisées ensemble tout en préservant l'unicité des modèles. Plus précisément, le modèle le moins (resp. le plus) spécifique de  $\mathcal{P}_{\triangleright_{st}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{st}} \cup \mathcal{P}_{\triangleright_{opt}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{opt}}$  (resp.  $\mathcal{P}_{\triangleright_{st}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{st}} \cup \mathcal{P}_{\triangleright_{pes}} \cup \mathcal{P}_{\sqsupseteq_{pes}}$ ) existe.

Dans cet article, nous cherchons des modèles uniques, aussi nous ne considérerons pas la sémantique opportuniste. Nous ne donnons pas d'algorithmes pour calculer les uniques modèles et reportons le lecteur à [6].

## 4 Exemple et problème

Dans cette section, nous soulevons un problème qui se pose dans le contexte de requêtes à préférences avec des logiques conditionnelles.

**Exemple 1** Supposons qu'un individu souhaite planifier ses vacances. Elle/il exprime ses préférences sur la base de trois variables :  $P$  (pour la période) qui est soit  $W$  (hiver) ou  $S$  (été),  $D$  (pour la destination) qui est soit  $M$  ou  $B$  (resp. montagne et plage) et  $L$  (pour le lieu) qui vaut soit  $H$  ou  $A$  (resp. hôtel et appartement). Ainsi, nous avons  $\text{Dom}(P) = \{W, S\}$ ,  $\text{Dom}(D) = \{M, B\}$ ,  $\text{Dom}(L) = \{H, A\}$  et  $\Omega = \{\omega_0 : HMW, \omega_1 : HMS, \omega_2 : HBW, \omega_3 : HBS, \omega_4 : AMW, \omega_5 : AMS, \omega_6 : ABW, \omega_7 : ABS\}$ . L'individu exprime cinq préférences :

- (i) elle/il préférerait voyager en été plutôt qu'en hiver,
- (ii) si la destination est la montagne alors elle/il préférerait voyager en hiver plutôt qu'en été,
- (iii) si elle/il voyage en hiver alors elle/il préférerait louer un appartement plutôt qu'aller à l'hôtel,
- (iv) si elle/il va à l'hôtel alors elle/il préférerait la plage à la montagne et,
- (v) si elle/il va à l'hôtel alors été et hiver sont autant préférés.

Formellement nous écrivons  $\mathcal{P}_* = \{s_1 : S \triangleright_* W, s_2 : M \wedge W \triangleright_* M \wedge S, s_3 : W \wedge A \triangleright_* W \wedge H, s_4 : H \wedge B \triangleright_* H \wedge M, s_5 : H \wedge S \triangleright_* H \wedge W, s_6 : H \wedge W \triangleright_* H \wedge S\}$ . Remarquons que  $s_5$  et  $s_6$  pris ensemble expriment la préférence (v). Nous associons à chaque préférence  $s_i : p_i \triangleright_* q_i$  un couple  $C_i = (L(s_i), R(s_i))$  tel que  $L(s_i) = \text{Mod}(p_i \wedge \neg q_i)$  et  $R(s_i) = \text{Mod}(q_i \wedge \neg p_i)$ . Ainsi, nous avons  $\mathcal{L}(\mathcal{P}_*) = \{C_1 = (\{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7\}, \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_6\}), C_2 = (\{\omega_0, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_5\}), C_3 = (\{\omega_4, \omega_6\}, \{\omega_0, \omega_2\}), C_4 = (\{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_0, \omega_1\}), C_5 = (\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_0, \omega_2\}), C_6 = (\{\omega_0, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\})\}$ .

Soit  $\ast = \text{opt}$ . La relation de préférence associée est  $\succeq = (\{\omega_7\}, \{\omega_4, \omega_6\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}, \{\omega_0, \omega_1\})$ . Nous avons  $\omega_4$  et  $\omega_6$  (resp.  $\omega_2, \omega_3, \omega_5$  et  $\omega_0, \omega_1$ ) qui sont autant préférés. Cependant, seuls  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont autant préférés du fait de  $s_5$  et  $s_6$ . Toutes les autres égalités sont des incomparabilités transformées en égalités à cause du principe de spécificité. Cette transformation peut être importante dans des systèmes de recommandation expliquant si les alternatives préférées (ou n'importe quel couple d'alternatives) sont en fait autant préférées ou incomparables.

## 5 Problèmes de satisfaction de contraintes qualitatives sur des ensembles partiellement ordonnés

Dans cette section, nous introduisons des problèmes de satisfaction de contraintes qualitatives qui permettront de raisonner sur des un ensemble de préférences. Pour cela, nous faisons quelques rappels sur les relations de l'algèbre des points et introduisons des rela-

tions que nous appellerons relations min/max.

L'algèbre des points [5], AP en abrégé, est un formalisme qualitatif [7] proposé pour la représentation et le raisonnement sur des informations temporelles à l'aide de contraintes qualitatives. Étant donné un ordre partiel  $\geq$  sur un ensemble  $T$ , dénoté par  $(T, \geq)$ , AP considère quatre relations de base :

- $\forall x, y \in T, x > y$  ssi  $x \geq y$  et non  $(y \geq x)$  ;
- $\forall x, y \in T, x < y$  ssi  $y \geq x$  et non  $(x \geq y)$  ;
- $\forall x, y \in T, x = y$  ssi  $x \geq y$  et  $y \geq x$  ;
- $\forall x, y \in T, x \parallel y$  ssi non  $x \geq y$  et non  $y \geq x$ .

L'ensemble de ces relations de base sera dénoté par  $B_{AP}$  dans la suite. Remarquons que ces relations sont complètes et mutuellement exclusives (i.e. tout couple d'éléments  $x$  et  $y$  appartenant à  $T$  satisfait une et une seule relation de  $B_{AP}$ ). En réalisant un parallèle avec une relation de préférence  $\succeq$ , les relations de base précédentes correspondent à une stricte préférence, à l'égalité et l'incomparabilité.

Une relation (complexe) de AP correspond à une union de relations de base de  $B_{AP}$ . Elle est représentée par ce sous-ensemble de relations de base. Par exemple, l'ensemble  $\{\parallel, =\}$  correspond à la relation  $\parallel \cup =$ . Elle est satisfaite par deux éléments  $x$  et  $y$  si et seulement si  $x \parallel y$  ou  $x = y$ .  $2^{B_{AP}}$  dénotera l'ensemble des 16 relations de AP.

Maintenant, nous avons besoin de traduire la définition 3 dans le contexte des problèmes de satisfaction de contraintes. Étant donné un ordre partiel  $(T, \geq)$  et un sous-ensemble  $X \subseteq T$ , nous définissons  $\min(X)$  et  $\max(X)$  de la manière suivante :  $\min(X) = \{x \in X : \nexists y \in X \text{ tel que } x \geq y \text{ et non } (y \geq x)\}$  et  $\max(X) = \{x \in X : \nexists y \in X \text{ tel que } y \geq x \text{ et non } (x \geq y)\}$ . Nous définissons maintenant 8 relations binaires, appelées relations de base min/max, pouvant être satisfaites par des sous-ensembles de  $T$ . Chacune de ces relations de base sera dénotée par  $rel_{op2}^{op1}$  avec  $rel \in \{\geq, >\}$  et  $op1, op2 \in \{\min, \max\}$ . Elles sont définies de la manière suivante :

- pour  $op1, op2 \in \{\min, \max\}$ ,  $\forall X, Y \in 2^T$ ,  $X >_{op2}^{op1} Y$  ssi  $\forall x \in op1(X)$  et  $\forall y \in op2(Y)$ ,  $x \geq y$  et non  $(y \geq x)$  ;
- pour  $op1, op2 \in \{\min, \max\}$ ,  $\forall X, Y \in 2^T$ ,  $X \geq_{op2}^{op1} Y$  ssi  $\forall x \in op1(X)$  et  $\forall y \in op2(Y)$ ,  $x \geq y$ .

Dans la suite, nous noterons par  $B_{\min/\max}$  l'ensemble composé de ces 8 relations de base,  $B_{\min/\max} = \{>_{\min}^{\min}, >_{\max}^{\max}, >_{\min}^{\max}, >_{\max}^{\min}, \geq_{\min}^{\min}, \geq_{\max}^{\max}, \geq_{\min}^{\max}, \geq_{\max}^{\min}\}$ .

Nous sommes maintenant prêt à définir les problèmes de satisfaction de contraintes qualitatives que nous appelons problèmes de contraintes qualitatives sur des ensembles partiellement ordonnés (PCQ<sub>POS</sub> en abrégé). Un PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q}$  permet de spécifier des configurations possibles d'éléments partiellement ordonnés représentés par un ensemble de variables  $\mathcal{V}$ . Chaque

PCQ<sub>POS</sub> est composé de deux types de contraintes qualitatives. Le premier type est représenté par une fonction  $c$  spécifiant l'ordre relatif de chaque couple d'éléments de  $\mathcal{V}$  au moyen d'une relation de AP. Les contraintes de second type sont collectées dans un ensemble  $\mathcal{C}$  et s'appliquent à des sous-ensembles de  $\mathcal{V}$ . Plus précisément, chaque contrainte de  $\mathcal{C}$  contraint l'ordre relatif entre les éléments minimums et maximums de deux ensembles d'éléments. Elle est de la forme  $V R V'$  avec  $V, V' \in 2^{\mathcal{V}}$  et  $R \subseteq \mathcal{B}_{\min/\max}$ . Dans la suite, de telles contraintes seront appelées contraintes min/max sur  $\mathcal{V}$  et correspondront à l'ensemble dénoté par  $\mathcal{C}_{\min/\max}^{\mathcal{V}}$ . Formellement, un PCQ<sub>POS</sub> est défini de la manière suivante :

**Définition 5** Un PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q}$  est un triplet  $(\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$  où :

- $\mathcal{V}$  est un ensemble non-vide de variables ;
- $c$  est une fonction associant une relation  $c(v, v') \in \mathcal{B}_{\text{AP}}$  à chaque couple  $(v, v')$  de  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ .  $c$  est telle que  $c(v, v) \subseteq \{=\}$  et  $c(v, v') = (c(v', v))^{-1}$  pour tout  $v, v' \in \mathcal{V}$  (où  $^{-1}$  dénote l'opération inverse de AP) ;
- $\mathcal{C}$  est un sous-ensemble fini de  $\mathcal{C}_{\min/\max}^{\mathcal{V}}$ . Nous supposons que pour chaque min/max contrainte  $V R V' \in \mathcal{C}$ ,  $V$  et  $V'$  sont des ensembles non vides.

Nous dirons qu'un PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$  est atomique ssi pour tout  $v, v' \in \mathcal{V}$ , la relation  $c(v, v')$  est définie par une relation singleton de AP. De plus, un PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q}' = (\mathcal{V}', c', \mathcal{C}')$  est un sous-PCQ<sub>POS</sub> de  $\mathcal{Q}$  lorsque  $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$ , pour tout  $v, v' \in \mathcal{V}$   $c'(v, v') \subseteq c(v, v')$ ,  $|\mathcal{C}| = |\mathcal{C}'|$  et pour chaque min/max contrainte  $X R Y \in \mathcal{C}$ , il existe  $X R Y \in \mathcal{C}'$  avec  $R' \subseteq R$ .

**Définition 6** Soit un PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$ . Une interprétation  $\pi$  de  $\mathcal{Q}$  est un couple  $(f, (T, \geq))$  où  $f$  est une application surjective de  $\mathcal{V}$  vers  $T$  et  $(T, \geq)$  est un ordre partiel. Une interprétation  $\pi = (f, (T, \geq))$  de  $\mathcal{Q}$  est une solution de  $\mathcal{Q}$  ssi :

- pour chaque couple de variables  $v, v' \in \mathcal{V}$ ,  $f(v) c(v, v') f(v')$ , i.e. le couple  $(f(v), f(v'))$  satisfait une relation de base de  $\mathcal{B}_{\text{AP}}$  appartenant à  $c(v, v')$  ;
- pour chaque contrainte  $V R V' \in \mathcal{C}$ ,  $f(V)$  et  $f(V')$  satisfont au moins une relation de base min/max appartenant à  $R$ .

D'autre part, deux PCQ<sub>POS</sub> définis sur un même ensemble de variables sont équivalents ssi ils admettent les mêmes solutions. Étant donné un PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$ , le couple  $(\mathcal{V}, c)$  correspond à un problème de satisfaction de contraintes de AP. Ainsi, les PCQ<sub>POS</sub> peuvent être vus comme une généralisation particulière des problèmes de satisfaction de contraintes qua-

litatives de l'algèbre de points. De plus, nous pouvons noter que les contraintes spécifiées par la fonction  $c$  peuvent être exprimées par des contraintes appartenant à  $\mathcal{C}_{\min/\max}^{\mathcal{V}}$  et contraignant des ensembles singletons. Par exemple, la contrainte  $v \{>, =\} v'$  peut être formulée de manière équivalente par la min/max contrainte  $\{v\} \geq_{\min}^{\mathcal{V}} \{v'\}$ . Comme autre exemple, considérons la contrainte de AP  $v \{=\} v'$ . Cette contrainte peut être exprimée par la conjonction des deux min/max contraintes  $\{v\} \geq_{\min}^{\mathcal{V}} \{v'\}$  et  $\{v'\} \geq_{\min}^{\mathcal{V}} \{v\}$ . Ainsi, chaque PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$  peut être exprimé de manière équivalente par un PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q}' = (\mathcal{V}, c', \mathcal{C}')$  tel que  $c'(v, v') = \mathcal{B}_{\text{AP}}$  pour chaque couple de variables distinctes  $(v, v')$ . Néanmoins,  $c$  permet d'exprimer explicitement les relations d'ordre possibles entre chaque couple de variables de  $\mathcal{V}$ . Étant donné un PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$ , différents problèmes peuvent se poser :

- *Le problème de la cohérence* : décider si  $\mathcal{Q}$  est cohérent ou non, i.e. est-ce que  $\mathcal{Q}$  admet au moins une solution ? À partir du fait que les PCQ<sub>POS</sub> généralisent les problèmes de contraintes de AP, nous pouvons établir que le problème de la cohérence des PCQ<sub>POS</sub> est un problème NP-complet.
- *Le problème de trouver une solution de  $\mathcal{Q}$* . Ce problème revient à caractériser un équivalent sous-PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q}'$  de  $\mathcal{Q}$  tel que  $\mathcal{Q}'$  est cohérent et atomique. À partir d'un tel PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q}'$  nous pouvons facilement déduire une solution de  $\mathcal{Q}$ .
- *Le problème de l'étiquetage minimal* : trouver pour chaque couple de variables  $(v, v') \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  et chaque contrainte  $X R Y \in \mathcal{C}$  l'ensemble des relations de base de  $c(v, v')$  et de  $R$  pouvant être satisfaites, i.e. l'ensemble des relations de base de  $c(v, v')$  et de  $R$  impliquées dans au moins une solution. Ce problème consiste à calculer le PCQ<sub>POS</sub> minimal de  $\mathcal{Q}$ , i.e. l'unique sous-PCQ<sub>POS</sub> de  $\mathcal{Q}$  équivalent à  $\mathcal{Q}$  et ayant la propriété de minimalité (chaque relation de base de chacune de ses contraintes est satisfiable).

Une méthode pour caractériser un atomique et cohérent sous-PCQ<sub>POS</sub> d'un PCQ<sub>POS</sub>  $\mathcal{Q} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$  (dans le cas où il existe) consiste en une recherche avec retour arrière sur la composante AP de  $\mathcal{Q}$  (i.e. le problème de contraintes qualitatives de AP défini par  $\mathcal{N} = (\mathcal{V}, c)$ ). À chaque étape de la recherche, une contrainte  $c(v, v')$  non définie par une relation singleton est sélectionnée et définie par une relation composée d'une de ses relations de base. De plus, la méthode de la chemin-cohérence est réalisée afin de filtrer l'espace de recherche et d'assurer la cohérence du réseau

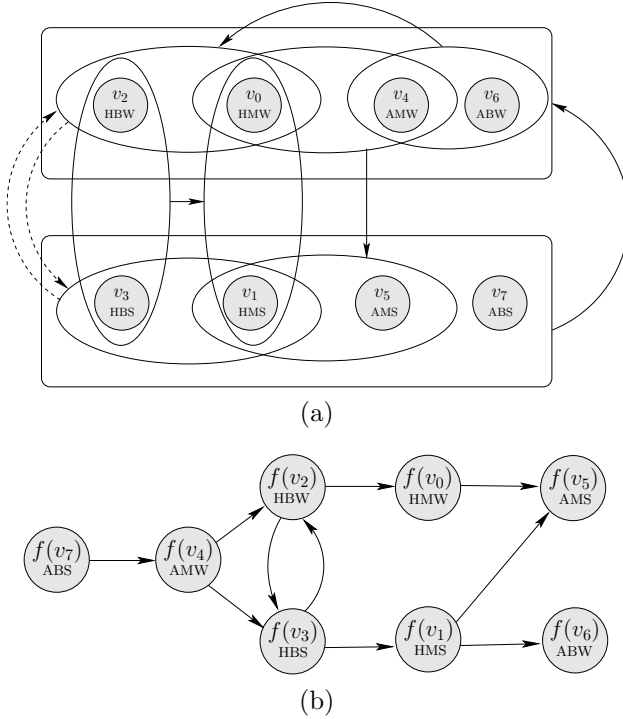


FIGURE 1 – (a) Les contraintes  $\mathcal{C}$  du  $\text{PCQ}_{\text{POS}} \mathcal{Q} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C}) = \text{PCQ}_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P})$  avec  $\mathcal{P}$  l'ensemble de préférences sur  $\Omega$  de l'exemple 1, (b) une solution  $(f, \geq)$  de  $\mathcal{Q}$ .

atomique de contraintes qualitatives de AP partiellement construit. Notons que dans le cadre des formalismes qualitatifs, la méthode de la chemin-cohérence est une méthode polynomiale habituellement utilisée pour supprimer des relations de base non satisfiables à l'aide de l'opération de composition, voir par exemple [1]. Durant la recherche, pour assurer que le réseau atomique de contraintes qualitatives de AP construit peut être étendu en un sous- $\text{PCQ}_{\text{POS}}$  de  $\mathcal{Q}$  atomique et cohérent, nous devons enlever les relations de base non satisfiables de chaque contrainte appartenant à  $\mathcal{C}$ .

## 6 Des préférences aux contraintes qualitatives

Dans cette section, nous allons montrer que les  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$  peuvent être utilisés de manière naturelle pour représenter et raisonner sur des ensembles de préférences. Considérons un ensemble d'alternatives  $\Omega$  et un ensemble de préférences  $\mathcal{P} = \{s_0, \dots, s_k\}$ . Nous noterons par  $*(s_i)$ , avec  $i \in \{0, \dots, k\}$ , la sémantique associée à la formule  $s_i$  ( $*(s_i) \in \{st, opt, pes, opp\}$ ) et par  $\text{rel}(s_i)$  la stricte/non stricte relation de préférence utilisée dans  $s_i$  ( $\text{rel}(s_i) \in \{>, \geq\}$ ). Nous définissons

$\text{PCQ}_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P})$  par le  $\text{PCQ}_{\text{POS}}(\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$  où :

- à chaque  $w_i \in \Omega$  est associée une variable  $v_i \in \mathcal{V}$ . Ainsi, pour  $\Omega = \{w_0, \dots, w_k\}$ ,  $\mathcal{V}$  est défini par l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_k\}$ .
- Pour chaque variable  $v, v' \in \mathcal{V}$  avec  $v \neq v'$ ,  $c(v, v')$  est par la relation universelle de AP, i.e. la relation  $\mathcal{B}_{\text{AP}}$ . Pour chaque  $v \in \mathcal{V}$ ,  $c(v, v)$  est la relation  $\{=\}$ .
- Pour chaque préférence  $s_i \in \mathcal{P}$  est définie une min/max contrainte  $V_i R_i V'_i \in \mathcal{C}$ .  $V_i$  et  $V'_i$  correspondent aux deux sous-ensembles de variables de  $\mathcal{V}$  représentant les deux sous-ensembles d'alternatives reliés par  $s_i$ .  $R_i$  est un ensemble composé d'une unique relation de base de  $\mathcal{B}_{\text{min/max}}$ . Cette relation dépend de la sémantique  $*(s_i)$  et de la stricte / non stricte relation de préférence  $\text{rel}(s_i)$ . Plus précisément, pour  $*(s_i) = st$  (resp.  $*(s_i) = opt$ ,  $*(s_i) = pes$ ,  $*(s_i) = opp$ ), pour le cas où  $\text{rel}(s_i)$  est  $>$ ,  $R_i$  est défini par  $\{>_{\text{max}}^{\text{min}}\}$  (resp.  $\{>_{\text{max}}^{\text{max}}\}$ ,  $\{>_{\text{min}}^{\text{min}}\}$ ,  $\{>_{\text{min}}^{\text{max}}\}$ ). Dans le cas où  $\text{rel}(s_i)$  est  $\geq$ ,  $R_i$  est défini par  $\{\geq_{\text{max}}^{\text{min}}\}$  (resp.  $\{\geq_{\text{max}}^{\text{max}}\}$ ,  $\{\geq_{\text{min}}^{\text{min}}\}$ ,  $\{\geq_{\text{min}}^{\text{max}}\}$ ).

**Exemple 2** (Exemple 1 poursuivi) Considérons de nouveau  $\Omega$  et  $\mathcal{P}$ . Définissons le  $\text{PCQ}_{\text{POS}} \mathcal{Q} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$  par  $\mathcal{Q} = \text{PCQ}_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P})$ . Dans la figure 1.a sont représentées les min/max contraintes de l'ensemble  $\mathcal{C}$ . Un arc plein correspond à l'ensemble  $\{>_{\text{max}}^{\text{max}}\}$  tandis qu'un arc pointillé correspond à  $\{\geq_{\text{max}}^{\text{max}}\}$ . Par exemple, nous avons les deux min/max contraintes  $\{v_2, v_3\}\{>_{\text{max}}^{\text{max}}\}\{v_0, v_1\}$  et  $\{v_0, v_2\}\{\geq_{\text{max}}^{\text{max}}\}\{v_1, v_3\}$  qui appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{C}$ .

Maintenant, nous allons étudier comment raisonner sur un ensemble de préférences à partir de sa représentation en  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$ . Tout d'abord, nous pouvons clairement établir que la cohérence (ou la non cohérence) d'un ensemble de préférences peut être décidée par la cohérence ou non du  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$  correspondant. En effet, nous avons la propriété suivante :

**Proposition 2** Soit  $\Omega$  un ensemble d'alternatives et  $\mathcal{P}$  un ensemble de préférences.  $\mathcal{P}$  est cohérent si et seulement si  $\text{PCQ}_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P})$  est cohérent.

Pour illustration, une solution  $(f, (T, \geq))$  de  $\text{PCQ}_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P})$ , avec  $\mathcal{P}$  l'ensemble de préférences donné dans l'exemple 1, est représenté par un graphe orienté dans la figure 1.b. Un arc  $(f(v), f(v'))$  représente le fait que  $f(v) \geq f(v')$ .  $f(v) \geq f(v')$  n'est pas représenté dans le cas où  $v$  et  $v'$  sont les mêmes variables ou quand il peut être déduit par transitivité à partir des arcs déjà présents. À partir de la proposition précédente, nous pouvons affirmer que  $\mathcal{P}$  est un ensemble cohérent de préférences. Remarquons

également qu'à partir de la solution  $(f, (T, \geq))$  nous pouvons facilement définir un modèle de  $\mathcal{P}$ .

Comme précédemment remarqué, pour certaines sémantiques de préférence, nous pouvons caractériser des modèles uniques suivant des principes de spécificité. Maintenant, nous allons montrer comment ces modèles peuvent être caractérisés à partir de la résolution de  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$ . Plus spécifiquement, nous proposons un algorithme permettant de calculer le modèle le moins spécifique (resp. le plus spécifique) d'un ensemble de préférences étant donné une sémantique forte ou une sémantique optimiste (resp. sémantique pessimiste) dans le cas où il existe, *i.e.* l'ensemble des préférences est cohérent.

---

**Algorithm 1:**  $\text{specificModel}(\Omega, \mathcal{P}, \text{kind})$

---

```

In      : Un ensemble d'alternatives  $\Omega$ , un ensemble
            $\mathcal{P}$  de préférences, le type du modèle unique avec
            $\text{kind} \in \{\text{leastSpecific}, \text{mostSpecific}\}$ .
Out     : Un unique modèle représenté par une
           séquence  $(E_0, \dots, E_n)$  ou Inconsistent.

1 begin
2   if  $\text{kind} = \text{leastSpecific}$  then
3      $\text{rel} \leftarrow \{>, =\}$ ;
4   else
5      $\text{rel} \leftarrow \{<, =\}$ ;
6    $\mathcal{Q} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C}) \leftarrow \text{PCQ}_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P})$ ;  $k \leftarrow 0$ ;
    $\mathcal{V}' \leftarrow \emptyset$ ;
7   while  $\mathcal{V} \neq \mathcal{V}'$  do
8      $E_k \leftarrow \emptyset$ ;
9     for  $v_i \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}'$  do
10      for  $v \in \mathcal{V} \setminus (\mathcal{V}' \cup \{v_i\})$  do
11         $c(v_i, v) \leftarrow \text{rel}$ ;  $c(v, v_i) \leftarrow \text{rel}^{-1}$ ;
12      if  $\text{consistent}(\mathcal{Q})$  then
13         $E_k \leftarrow E_k \cup \{v_i\}$ ;  $\mathcal{V}' \leftarrow \mathcal{V}' \cup \{v_i\}$ ;
14      else
15        for  $v \in \mathcal{V} \setminus (\mathcal{V}' \cup \{v_i\})$  do
16           $c(v_i, v) \leftarrow \text{B}_{\text{AP}}$ ;  $c(v, v_i) \leftarrow \text{B}_{\text{AP}}$ ;
17    if  $E_k = \emptyset$  then
18      return Inconsistent;
19     $k \leftarrow k + 1$ ;
20  if  $\text{kind} = \text{leastSpecific}$  then
21    return  $(E_0, \dots, E_{k-1})$ ;
22  else
23    return  $(E_{k-1}, \dots, E_0)$ ;

```

---

Considérons la fonction  $\text{specificModel}$  prenant comme paramètres un ensemble d'alternatives  $\Omega$ , un ensemble de préférences  $\mathcal{P}$  et le type de l'unique modèle que nous souhaitons. Grossièrement, en considérant  $\mathcal{Q} = \text{PCQ}_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P})$ , cette fonction construit la

partition de  $\Omega$  correspondant à ce modèle. Pour le modèle le moins (resp. le plus) spécifique, les strates de plus bas (resp. de plus haut) rangs sont considérées en premier. Pour une alternative  $\omega_i$ , son appartenance à une strate donnée est décidée par un test de cohérence d'un sous- $\text{PCQ}_{\text{POS}}$  de  $\mathcal{P}$  contraignant la position de  $\omega_i$  dans la strate. Cela est réalisé en ajoutant des contraintes de précédence sur  $v_i$  définies par  $\{<, =\}$  (resp.  $\{>, =\}$ ). Nous pouvons formellement prouver la propriété suivante :

**Proposition 3** *Soit  $\Omega$  un ensemble d'alternatives. Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de préférences interprétées suivant une sémantique donnée  $*$ . L'appel de la fonction  $\text{specificModel}$  avec  $\Omega, \mathcal{P}$  et  $\text{leastSpecific}$  (resp.  $\text{mostSpecific}$ ) comme paramètres retourne pour la sémantique  $*$   $\in \{\text{st}, \text{opt}\}$  (resp.  $*$   $\in \{\text{st}, \text{pes}\}$ ) le moins spécifique modèle (resp. le plus spécifique modèle) dans le cas où il existe.*

Habituellement, pour des prises de décision, il est plus commode de considérer un modèle unique. Néanmoins, du fait qu'un tel modèle est un préordre complet sur  $\Omega$ , nous ne pouvons pas distinguer les situations d'égalité et les situations d'incomparabilité entre deux alternatives appartenant à la même partition (*i.e.* deux alternatives  $\omega, \omega' \in \Omega$  égales par rapport au moins/plus spécifique modèle. Un moyen de remédier à cela est de voir le moins/plus spécifique modèle comme un ensemble de modèles particuliers et de le considérer comme un ensemble de contraintes complémentaires. Cela nous conduit à considérer une nouvelle traduction d'un ensemble de préférences en  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$  prenant en compte le modèle le moins/le plus spécifique. Nous la dénoterons par  $\text{PCQ}'_{\text{POS}}$ . Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de préférences et une séquence  $\succeq = (E_0, \dots, E_n)$  correspondant au modèle le moins / le plus spécifique de  $\mathcal{P}$ .  $\text{PCQ}'_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P}, \succeq)$  est défini par le  $\text{PCQ}_{\text{POS}}(\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$  où  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{C}$  sont respectivement l'ensemble de variables et l'ensemble de min/max contraintes de  $\text{PCQ}_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P})$  et  $c$  est défini pour chaque  $v_i, v_j \in \mathcal{V}$  par :

- pour la cas  $i = j$ ,  $c(v_i, v_i)$  est la relation  $\{=\}$ ;
- pour le cas  $i \neq j$  et  $v_i, v_j \in E_k$  avec  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $c(v_i, v_j)$  est la relation  $\{=, \parallel\}$ ;
- pour le cas  $i \neq j$ ,  $v_i \in E_k$ ,  $v_j \in E_l$  avec  $k, l \in \{0, \dots, n\}$  et  $k < l$  (resp.  $l > k$ ),  $c(v_i, v_j)$  is  $\{>\}$  (resp.  $\{<\}$ ).

La considération de  $\mathcal{Q} = \text{PCQ}'_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P}, \succeq)$  nous permet par exemple de déterminer les alternatives mises ensemble dans une même strate dans  $\succeq$  du fait qu'elles sont autant préférées à cause d'une égale préférence.

**Exemple 3** *Soit  $\mathcal{Q}$  le  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$  défini par  $\mathcal{Q} = \text{PCQ}'_{\text{POS}}(\Omega, \mathcal{P}, \succeq)$  avec  $\Omega, \mathcal{P}$  et  $\succeq$  correspondant respectivement à l'ensemble d'alternatives, l'ensemble de*

| $c(v, v')$ | $v_7$ | $v_4$   | $v_6$   | $v_2$   | $v_3$   | $v_5$   | $v_0$   | $v_1$   |
|------------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $v_7$      | {=}   | {>}     | {>}     | {>}     | {>}     | {>}     | {>}     | {>}     |
| $v_4$      | {<}   | {=}     | {=,   } | {>}     | {>}     | {>}     | {>}     | {>}     |
| $v_6$      | {<}   | {=,   } | {=}     | {>}     | {>}     | {>}     | {>}     | {>}     |
| $v_2$      | {<}   | {<}     | {<}     | {=}     | {=}     | {=,   } | {>}     | {>}     |
| $v_3$      | {<}   | {<}     | {<}     | {=}     | {=}     | {=,   } | {>}     | {>}     |
| $v_5$      | {<}   | {<}     | {<}     | {=,   } | {=,   } | {=}     | {>}     | {>}     |
| $v_0$      | {<}   | {<}     | {<}     | {<}     | {<}     | {<}     | {=}     | {=,   } |
| $v_1$      | {<}   | {<}     | {<}     | {<}     | {<}     | {<}     | {=,   } | {=}     |

TABLE 1 – La fonction  $c$ .

préférences et le modèle le moins spécifique donné dans l'exemple 1. La résolution du problème de l'étiquetage minimal de  $\mathcal{Q}$  fournit le  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$  minimal  $\mathcal{Q}_{\min} = (\mathcal{V}, c, \mathcal{C})$  avec la fonction  $c$  représenté par la table 1. La relation  $c(v, v')$  est donnée par l'entrée dont la ligne correspond à  $v$  et la colonne correspond à  $v'$ . En examinant ces relations nous pouvons par exemple remarquer que pour les modèles  $\mathcal{P}$  les alternatives  $\omega_2$  et  $\omega_3$  ne peuvent pas être incomparables ( $c(v_2, v_3) = \{=\}$ ).

## 7 Conclusion et perspectives

Les préférences sont exprimées en logique conditionnelle avec des préférences comparatives strictes ou non strictes. Elles peuvent être interprétées suivant différentes sémantiques. Des principes de spécificité sont utilisés pour caractériser un modèle unique étant donné un ensemble de préférences et une sémantique. La principale limitation de ces logiques réside dans les requêtes de préférences. Plus précisément, deux alternatives autant préférées par rapport à ce modèle unique ne peuvent pas être distinguées. Nous ne savons pas si elles sont autant préférées à cause de préférences non strictes ou d'incomparabilité. Cette distinction pourrait être importante dans des systèmes de recommandations par exemple. Dans cet article, nous résolvons ce problème par encodage des logiques de préférences et leurs algorithmes associés dans le cadre des problèmes de satisfaction de contraintes qualitatives.

Une analyse de notre encodage nous indique que les min/max contraintes résultant de la traduction d'un ensemble de préférences en un  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$  sont définies par des ensembles singletons de  $\mathcal{B}_{\min/\max}$ . Ceci provient du fait que les préférences utilisent un unique opérateur de comparaison ( $\triangleright$  or  $\trianglerighteq$ ). Étant donné le pouvoir expressif des  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$ , nous pouvons étendre les logiques conditionnelles et considérer des préférences exprimant par exemple un choix entre  $\triangleright$  ou  $\trianglerighteq$  (i.e.,  $\alpha \triangleright \beta$  ou  $\beta \triangleright \alpha$ ). Ce type de préférence peut être exprimé à l'aide de relations non singletons de  $\mathcal{B}_{\min/\max}$ . Un travail futur consiste en la définition et l'étude d'al-

gorithme pour résoudre efficacement un  $\text{PCQ}_{\text{POS}}$ .

## Références

- [1] F. D. Anger, D. Mitra, and R. V. Rodríguez. Satisfiability in nonlinear time : Algorithms and complexity. In *Proceedings of the Twelfth International Florida Artificial Intelligence Research Society Conference (FLAIRS'99)*, pages 406–411, 1999.
- [2] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Bipolar representation and fusion of preferences in the possibilistic logic framework. In *KR'02*, pages 421–432, 2002.
- [3] S. Benferhat and S. Kaci. A possibilistic logic handling of strong preferences. In *International Fuzzy Systems Association (IFSA '01)*, pages 962–967, 2001.
- [4] C. Boutilier. Toward a logic for qualitative decision theory. In *KR'94*, pages 75–86, 1994.
- [5] M. Broxvall and P. Jonsson. Point algebras for temporal reasoning : Algorithms and complexity. *Artificial Intelligence.*, 149(2) :179–220, 2003.
- [6] S. Kaci and L. van der Torre. Reasoning with various kinds of preferences : Logic, non-monotonicity and algorithms. *Annals of Operations Research*, 163(1) :89–114, 2008.
- [7] G. Ligozat and J. Renz. What is a qualitative calculus? a general framework. In Chengqi Zhang, Hans W. Guesgen, and Wai-Kiang Yeap, editors, *Proceedings of 8th Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence (PRICAI'04), Auckland, New Zealand*, volume 3157 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2004.
- [8] J. Pearl. System Z : A natural ordering of defaults with tractable applications to default reasoning. In *TARK'90*, pages 121–135, 1990.

- [9] L. van der Torre and E. Weydert. Parameters for utilitarian desires in a qualitative decision theory. *Applied Int.*, 14(3) :285–301, 2001.
- [10] G. H. von Wright. *The Logic of Preference*. University of Edinburgh Press, 1963.
- [11] N. Wilson. Extending CP-nets with stronger conditional preference statements. In *AAAI'04*, pages 735–741, 2004.
- [12] R.R. Yager. Entropy and specificity in a mathematical theory of evidence. *Int. J. of General Systems*, 9 :249–260, 1983.