Une approche non linéaire pour la reconnaissance des formes statistique : application à la céphalométrie

Non Linear Approach for Statistical Pattern Recognition Applied to Cephalometry

B. Romaniuk[1] M. Desvignes[1] J. Robiaille[1] M.Revenu[1] M.J. Deshayes[2]

[1] GREYC-CNRS 6072
[2] Société Télécrâne Innovation

Bd Maréchal Juin, 14050 Caen Cedex
bromaniu@greyc.ismra.fr

Résumé

Dans cet article, nous comparons deux approches, l'une linéraire, l'autre non linéraire, pour la localisation statistique de points caractéristiques sur des images 2D. Un modèle statisque est construit à partir d'un ensemble d'images expertisées, nécessitant un recalage entre images. Le recalage rigide est la solution linéaire classique, que nous comparons à une solution non linéaire : elle consiste à projeter les coordonnées des points expertisés dans un espace de dimension supérieure et à rechercher la meilleure représentation dans cet espace. La projection inverse de cette représentation moyenne assure la localisation des points caractéristiques recherchés sur une nouvelle image. Ces méthodes sont appliquées dans le cadre de la céphalométrie et les résultats illustrent la supériorité de l'approche non linéaire.

Mots Clef

Invariants, ACP non linéaire, reconnaissance des formes.

Abstract

In this paper we compare two approaches for statistical localisation of caracteristic points on 2D images : the first one is linear, the second one non linear. A statistical model is learned from an expertised images set, with images matching. Rigid registration is the classical linear solution. It is compared with a non linear approach. This approach maps expertised points coordinates in a higher dimension space and search of the best space representation. The inverse projection of this mean representation ensures the caracteristic points localisation on new images. Those methods are applied to the cephalometry problem. Results confirm the superiority of the non linear approach.

Keywords

Invariant, non linear PCA, pattern recognition.

1 Introduction

La céphalométrie est une méthode de tracé utilisée aussi bien en orthodontie qu'en anthropologie [4][5][14]. Elle consiste en un repérage de points céphalométriques sur des radiographies crâniennes latérales. Un certain nombre de lignes sont ensuite tracées entre ces différents points. Un ensemble de mesures de longueurs et d'angles est réalisé. Comparées à des valeurs normatives, ces mesures permettent à l'orthodontiste d'élaborer un diagnostic.

Le repérage des points par un expert pose cependant quelques problèmes très difficiles :

- Les définitions anatomiques des points étudiés sont difficiles à appliquer directement sur des radiographies. Leur repérage est délicat et variable selon les experts.

- Les structures anatomiques sur lesquelles sont positionnés nos points sont des entités tridimensionnelles. Sur les images qui sont des projections bidimensionnelles de ces structures, de nombreux dédoublements de contours anatomiques ou causés par des artéfacts d'acquisition apparaissent.

- Les images présentent un mauvais rapport signal/ bruit car les rayons X sont absorbés par les tissus mous. Il en résulte un manque de contraste dans certaines régions.

Les deux objectifs de ce projet sont d'une part, une aide au repérage par une amélioration locale de la perception des structures osseuses mises en jeu lors ce repérage manuel par le praticien [8], et d'autre part, une automatisation de ce repérage.

Dans les deux cas, la position de ces points sur des télé-radiographies sera estimée statistiquement. Nous disposons d'un ensemble d'images d'apprentissage sur lesquelles les différents points ont été localisés par un expert. Notre objectif est donc de pouvoir retrouver les points étudiés sur une nouvelle image, ou plus exactement de donner une estimation la plus précise possible de la position de ces points. Nous devons donc traiter deux aspects :

- construire un modèle à partir de cet ensemble : sur N images de l'ensemble d'apprentissage, soient $X_p(x_p, y_p)$ les P points céphalométriques. Soit le vecteur $T_i = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$, concaténation des P points. Nous souhaitons construire le vecteur $\overline{X}$, représentant simple, idéal et moyen des N exemples, ainsi que σ la variabilité de cet ensemble ;

- estimer la position des points sur la nouvelle image grâce à ce modèle : l'estimation de la position des points sur une nouvelle image se fait en projetant $\overline{X}$ sur cette nouvelle image.

La construction du modèle des points céphalométriques peut se voir comme un classique problème de reconnaissance des formes statistiques.

Dans le cadre de la reconnaissance des formes statistique, l'objet est représenté par un vecteur de caractéristiques issues de l'observation ou des mesures d'objets (niveau de gris de l'image, etc ...). L'objectif de la reconnaissance est de trouver parmi les vecteurs des objets déjà connus celui qui se rapproche du vecteur de mesures inconnu. Pour cela, la phase d'apprentissage consiste à construire une représentation efficace et compacte à partir d'un ensemble d'exemples dont les classes sont connues. Si la dimension du vecteur est grande, elle est en général réduite en ne conservant que les données primordiales par l'extraction de caractéristiques, opération souvent réalisée par une analyse en composantes principales.

En assimilant la notion de point céphalométrique à la notion de classe et les coordonnées des points aux caractéristiques des objets, nous cherchons à minimiser la variance des différentes classes (*i.e.* des différents points céphalométriques) pour permettre une estimation la plus précise possible. Cette démarche est identique aux méthodes de classification qui cherchent à optimiser des critères similaires (variances intra et/ou inter classes).

Dans cet article, nous présentons d'abord les outils classiques de classification ou de reconnaissance de formes qui nous ont inspirés. Nous précisons ensuite la position du problème de localisation statistique avant d'introduire les deux méthodes que nous avons développées, améliorations sensibles de nos travaux précédents [8][9][15]. Leurs résultats respectifs seront ensuite comparés et commentés.

2 Quelques outils de classification

De nombreux travaux sur la reconnaissance des formes statistique sont connexes à notre problématique et le lecteur pourra se référer à [12] pour un panorama complet. Nous ne souhaitons donner ici que les idées directrices qui ont servi à la définition de nos méthodes. Nous distinguons deux grandes classes : les approches linéaires et les approches non-linéaires.

2.1 Approches linéaires

Une première source d'inspiration de nos travaux est issue des travaux sur le recalage et la représentation de la variabilité statistique des formes [1][10]. Dans ces approches, la variabilité est la dissimilarité restante entre deux formes T_i et T_j après recalage ou normalisation des deux vecteurs. Classiquement, le recalage est linéaire (affine) et correspond dans notre cas à un changement de repère. Recaler T_i et T_j consiste à minimiser la fonctionnelle :

$$\widehat{\mathbf{g}} = \underset{g \in G}{argmin}(s^2(T_i - g(T_j)), \quad (1)$$

où s est une fonction objectif (somme des carrés ou médiane), g une transformation (affine dans notre cas) et G l'ensemble de ces transformations.
Dans le cas 2D, la solution au sens des moindres carrés est donnée par :

$$g = (T_j^t T_j)^{-1} T_j^t T_i. \quad (2)$$

Construire un modèle à partir d'un ensemble de N objets $T_1, T_2, \ldots, T_N$ revient à rechercher le vecteur moyen $\widehat{\mu}$ qui minimise l'ensemble des écarts :

$$\widehat{\mu} = \min \sum_{i=1}^{N} \underset{g_j \in G}{argmin}(s^2(\mu - g_j(T_i))). \quad (3)$$

Dans le cas 2D, cette forme moyenne est obtenue par l'analyse de Procrustes [11] et correspond au vecteur propre relatif à la plus petite valeur propre de la matrice A :

$$A = \sum_{i=1}^{N} (I - T_j(T_j^t T_j)^{-1} T_j^t). \quad (4)$$

Le modèle moyen est alors complété par une représentation de la variabilité de la forme en réalisant une analyse en composantes principales (ACP) de la matrice de variance-covariance des coordonnées après recalage. Cette représentation peut ensuite être utilisée par un algorithme de type contours actifs statistiques [3]. Malheureusement, ces algorithmes sont fondés sur la recherche de caractéristiques locales des points, comme un niveau de gradient élevé. Le bruit et la faiblesse des gradients ne permettent pas une utilisation directe de ces méthodes dans notre application.
L'idée essentielle que nous retiendrons est la recherche d'un référentiel commun à tous les objets de l'ensemble d'apprentissage qui minimise l'erreur globale restante après recalage.

2.2 Approches non-linéaires

La deuxième source d'inspiration concerne les méthodes non linéaires issues de la classification statistique ou de l'extraction de caractéristiques, parmi lesquelles on peut citer l'*ACP non-linéaire* [2], les *Kernel PCA* [16], les *machines à vecteurs de support* [17]. L'idée importante pour notre application est le passage des données d'entrée à un espace de dimension supérieure par une projection. Pour cela, des fonctions ϕ, en général non linéaires, sont utilisées pour transformer les données d'entrée. En classification, deux classes non séparables dans l'espace d'entrée deviennent séparables dans ce nouvel espace. Les méthodes de type *Kernel PCA* peuvent être utilisées pour l'extraction de caractéristiques non linéaires. Elles réalisent une ACP dans l'espace de projection des fonctions ϕ. Connaissant les projections dans cet espace, la difficulté réside dans la reconstruction d'un objet de l'espace des caractéristiques dans l'espace d'entrée en minimisant l'erreur commise dans l'espace de ces caractéristiques.
Soient $x_1, \ldots, x_N$ les données d'entrée centrées. Réaliser une ACP dans l'espace ϕ consiste à trouver les vecteurs propres V et valeurs propres λ de la matrice :

$$D = \frac{1}{N} \sum_i \phi(x_i).\phi(x_i)^t, \; i.e. \; DV = \lambda V. \quad (5)$$

Comme les solutions V s'expriment sous la forme :

$$V = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi(x_i) = \alpha^t.\phi(x). \quad (6)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\lambda \times (\phi(x_i).V) = (\phi(x_i).DV), \; \forall i \in \{1 \ldots N\}. \quad (7)$$

Définissant la matrice K par $K = [\phi(x_i).\phi(x_j)]$, l'équation (7) devient :

$$N\lambda\alpha = K\alpha. \quad (8)$$

Pour calculer les coordonnées dans l'espace ϕ d'un nouveau point x, il faut calculer les valeurs β_i telles que :

$$\beta_i = V^i \times \phi(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^i(\phi(x).\phi(x_i)), \; \forall i \in \{1 \ldots N\}. \quad (9)$$

Soit $\phi(x) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i V^i$. La projection P_k est définie par :

$$P_k \phi(x) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i V^i \quad (10)$$

Deux problèmes standards se posent alors :

- Réduire la dimension de l'espace de représentation pour rendre la représentation plus compacte en minimisant $\parallel \phi(x) - P_k\phi(x) \parallel$.
- Connaissant un point x de l'espace ϕ, existe-il un unique point X de l'espace d'entrée lui correspondant : $x = P_k\phi(X)$.

Dans le cadre général, l'existence et l'unicité de X ne sont pas assurées, car les fonctions ϕ ne sont pas linéaires et bijectives. Dans ce cas, il faut minimiser $\parallel \phi(x) - P_k\phi(z) \parallel$ selon les deux variables k et z [16]. Ces méthodes donnent de très bons résultats mais les fonctions ϕ utilisées sont définies dans un cadre général qui ne tient pas compte des connaissances à priori du domaine. Elles n'assurent que la minimisation de l'erreur de projection dans l'espace des caractéristiques. Enfin, dans le cadre de la céphalométrie, le crâne n'est pas toujours à la même position, ce qui impose un recalage préalable. Dans ce contexte, ce recalage introduit un biais et limite l'intérêt de l'approche. Nous en retiendrons les idées générales en les adaptant à notre application :

– Utiliser une représentation dans un espace de dimension supérieure par une projection ϕ non linéaire afin de réduire la variance de chaque classe.

– Réduire la dimension de l'espace en assurant l'existence d'une unique solution dans l'espace d'origine.

La démarche que nous nous proposons de suivre est la suivante. Dans un premier temps, nous introduisons un référentiel externe commun à toutes les images, qui est le contour exocrânien. Si nous pouvons déterminer ce référentiel sur une image pour laquelle les points sont inconnus, l'approche linéaire est simplement un changement de repère qui assure l'invariance par les transformations affines : c'est la première méthode présentée. Dans le cas de l'approche non linéaire qui est ensuite détaillée, ce repère définit les fonctions ϕ de projection et assure l'inversion. Il est cependant indispensable de s'assurer de l'invariance de $\phi(x)$ aux transformations affines. Notons enfin que la seule différence entre les deux formulations vient des fonctions ϕ qui sont affines (linéaires) dans le premier cas, quelconques dans le second cas.

3 Localisation des points

3.1 Position du problème

Nous disposons d'un ensemble de 424 radiographies expertisées ainsi que des connaissances expertes. Nous allons apprendre notre modèle statistique sur cet ensemble d'apprentissage (*cf.* figure 1). Ceci nous permettra de disposer d'un critère de comparaison entre méthodes : minimiser l'erreur de reconnaissance des formes, *i.e.* minimiser l'erreur entre le repérage statistique d'une radiographie et son repérage expert.

FIG. 1: *Apprentissage d'un modèle statistique.*

Le problème qui se pose maintenant est de savoir quel est le référentiel commun entre toutes nos images. C'est à ce niveau que vont intervenir les connaissances de l'expert. D'après le docteur M.J. Deshayes la position des points céphalométriques utilisés dans sa méthode de tracé céphalométrique est étroitement liée à la dynamique de la boîte crânienne [7]. Le contour de l'os crânien est donc la base du repère commun.
Initialement, nous avons utilisé le contour endocrânien [8] (*cf.* figure 2). Ce contour présente cependant des aspects d'instabilité au niveau de la base du crâne (partie inférieure). Nous nous sommes donc intéressés au contour exocrânien et en particulier à sa détection [9].

FIG. 2: *Définition des contours*

L'approche linéaire a été réalisée grâce à la modélisation par une ellipse et à un changement de repère adéquat. La deuxième idée a été de créer un modèle robuste indépendant de l'origine de l'image, de son orientation et de ses dimensions. Ceci nous a conduit à modifier notre approche non linéaire antérieure [15] en utilisant des invariants non linéaires.
Dans les deux cas, le principe consiste à calculer une représentation moyenne à l'aide du contour exocrânien sur l'ensemble d'apprentissage. La détection du contour sur une nouvelle image permet ensuite de calculer la projection inverse de la représentation moyenne sur cette image et d'estimer ainsi la position des points étudiés.

3.2 Détection du contour exocrânien

Dans le processus de détection du contour exocrânien on distingue trois étapes principales. La première étape consiste en une recherche de deux points appartenant à ce contour. Dans une deuxième étape, une poursuite de contour est effectuée en recherchant le plus court chemin régional entre ces deux points. Le contour exocrânien n'étant pas défini au niveau de la base crânienne, une troisième étape extrapole le contour par une ellipse au niveau de cette base.

Détection de deux points appartenant au contour. Nous cherchons deux points du contour exocrânien sur une radiographie quelconque. Une mise en correspondance par corrélation sur l'image gradient [6] est effectuée à l'aide de deux masques binaires ayant la forme d'arcs de cercle. Ceux-ci sont appris sur un échantillon d'images. Ils modélisent les parties antérieure et frontale du crâne (*cf.* figure 3).

FIG. 3: *Templates utilisés et leur réponse.*

Les points de départ I_1 et I_2 sont les points de plus fort gradient situés à moins de 5 pixels du point de réponse maximale du template, sur l'axe orthogonal à la tangente du modèle (*cf.* figure 3).

Recherche du coutour par plus court chemin. L'étape suivante du traitement consiste en une poursuite de contour entre les deux points I_1 et I_2 dans la partie supérieure du crâne. Ceci correspond à l'etape 1 de la figure 4. Cette poursuite est effectuée sur l'image gradient inversée pour éviter les seuillages inefficaces et peu robustes. La poursuite donne le chemin de plus fort gradient entre I_1 et I_2. La poursuite est réalisée par un schéma itératif, qui cherche le meilleur successeur à chaque itération. Du fait du mauvais rapport signal sur bruit de l'image et de la variabilité de l'anatomie, le voisin immédiat de plus fort gradient n'est pas toujours le point recherché. Nous utilisons une approche régionale pour résoudre ces conflits. Nous recherchons le plus court chemin entre le point C_i et le point D_i défini par $D_i = C_i + k \times T_i$, où T_i est la direction générale de la tangente au chemin. Nous restons lors de cette recherche à l'intérieur du rectangle dont les deux coins opposés sont C_i et D_i. En admettant l'hypothèse que le contour exocrânien est une courbe monotone, le plus court chemin est calculé *itérativement* et rapidement par :

$$C(x,y) = \min \begin{pmatrix} C(pred1(x,y)) + a(T_i) \times I(x,y), \\ C(pred2(x,y)) + b(T_i) \times I(x,y), \\ C(pred3(x,y)) + c(T_i) \times I(x,y) \end{pmatrix} \tag{11}$$

Les fonctions $pred1(x,y)$, $pred2(x,y)$, $pred3(x,y)$ décrivent les prédécesseurs du point (x,y) en fonction de la direction générale de la tangente T_i. Les valeurs des fonctions $a(T_i)$, $b(T_i)$, $c(T_i)$ sont les longueurs de ces chemins (1 ou $\sqrt{2}$). Le point de contour suivant C_{i+1} est alors défini par le point situé à une distance d ($d < k$, paramètre fixé) de C_i sur ce chemin.
La poursuite dans la partie supérieure de la boîte crânienne est terminée lorsque le chemin atteint le point I_2.

FIG. 4: *Trois parties du contour à trouver*

Nous passons ensuite à la poursuite de la partie inférieure du crâne. Ceci correspond aux étapes 2 et 3 de la figure 4. Cette poursuite est assurée par la même méthode, son arrêt est réalisé sur un critère de rugosité.
Nous définissons la rugosité par :

$$K = \Sigma((x_i - x_{\text{lissé}_i})^2 + (y_i - y_{\text{lissé}_i})^2) \tag{12}$$

Le point d'arrêt C_k est celui qui maximise le rapport entre la rugosité de la courbe entre I_1 et C_k et la rugosité entre C_k et C_N où N est fixé.

Extrapolation du contour par une ellipse. L'étape suivante consiste à compléter le contour obtenu par une ellipse. Une conique est représentée par l'ensemble des points (x,y) vérifiant :

$$F(\mathbf{a},\mathbf{x}) = \mathbf{ax} = ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0 \tag{13}$$

avec $\mathbf{a} = [a\ b\ c\ d\ e\ f]$ et $\mathbf{x} = [x^2\ xy\ y^2\ x\ y\ 1]^t$.
D'après [13] la solution est donnée par le vecteur propre associé à l'unique valeur propre négative du système :

$$D^t D\mathbf{a} = S\mathbf{a} = \lambda C\mathbf{a} \tag{14}$$

avec $D = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_N]^t$, C est la matrice exprimant la contrainte $b^2 - 4ac = -1$.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

On a donc :

$$b^2 - 4ac = \mathbf{a}^t C\mathbf{a} = -1. \tag{16}$$

FIG. 5: *Contour crânien sur image numérique $h < l$*

La détection de ce contour est indépendante de la qualité et de la source de l'image ainsi que de la position de la tête dans l'image. Les figures 5, 6 et 7 illustrent les résultats obtenus sur trois images différentes de nature et de taille différentes. Les deux premières correspondent à des images numériques inversées. Ces deux images proviennent de deux cabinets de radiologie différents. La troisième image correspond à une radiographie sur film classique qui a été ensuite scannée.

FIG. 6: *Image numérique $h > l$*

FIG. 7: *Image scannée*

Le contour exocrânien va maintenant servir de point de départ à notre changement de repère. Dans le cadre linéaire, nous avons approximé le contour exocrânien par une ellipse. Dans le cadre de la méthode non-linéaire, ce même contour devient la base pour le passage dans un espace de dimension supérieure.

3.3 Méthode linéaire : approximation par une ellipse

L'idée d'un repère barycentrique est de considérer la forme complexe correspondant au contour exocrânien comme une forme simple déformée. L'origine du nouveau repère est le barycentre G du contour. Les axes du repère sont les axes d'inertie et les homothéties déterminées par le choix du vecteur unitaire.
Pour déterminer l'axe principal d'inertie du contour exocrânien, nous déterminons tous les points de l'intérieur I de ce contour. Nous calculons ensuite les moments centrés d'ordre (0,2), (2,0) et (1,1) par la formule (17) :

$$\mu_{p,q} = \sum_{(x,y)\in I} (x - x_G)^p (y - y_G)^q \tag{17}$$

L'angle θ (entre le grand axe et l'axe (O,x) de l'image) de l'axe principal d'inertie est alors donné par la formule (18) :

$$\tan(2\theta) = \frac{2\mu_{1,1}}{\mu_{0,2} - \mu_{2,0}} \quad (18)$$

Nous déduisons ainsi les directions des deux vecteurs de base. Les coefficients d'homothéties (k_1, k_2) sont donnés par l'intersection de l'axe avec le contour crânien de la forme étudiée dans les directions trouvées.
La figure 8 présente les résultats obtenus. Le contour en noir correspond au contour exocrânien détecté, le contour blanc à l'ellipse qui l'approxime. L'approximation est alors bien valide.
Soit M la matrice de rotation homothétie :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

FIG. 8: *Approximation du contour exocrânien par une ellipse*

Soit $\hat{X}_i$ la moyenne des positions de chaque point céphalométrique obtenue par cette méthode sur l'ensemble d'apprentissage. L'estimation de chaque point céphalométrique est donnée par :

$$X_{estime} = M^{-1}\hat{X} + \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} \quad (20)$$

3.4 Méthode non linéaire

La deuxième méthode que nous proposons dans cet article est une méthode non linéaire. Elle consiste en un passage dans un espace de dimension supérieure.
La première étape de cette méthode permer d'échantillonner le contour endocrânien. 16 points sont régulièrement répartis sur le contour. L'échantillonnage commence au niveau du point Na, qui est un point céphalométrique situé dans la région nasale. Ce point correspond aussi au point d'arrêt de la recherche du plus court chemin sur le critère de rugosité.

Projection dans un espace de caractéritiques. Dans nos travaux antérieurs [15], nous avons présenté une méthode qui effectue un passage dans un espace de dimension supérieure par une projection correspondant aux fonctions ϕ définies au paragraphe 1.3.
Estimer les points sur une nouvelle image implique la détection du contour exocrânien, caractéristique de chaque individu. La matrice A (définie dans la partie 2.1) peut ensuite être calculée et les valeurs estimées des points sont obtenues par projection inverse de leurs valeurs moyennes $\hat{X}$. La figure 9 illustre succintement cette méthode.

FIG. 9: *Méthode par projection*

Soit l'ensemble de vecteurs ζ :

$$\zeta = \left\{ \begin{array}{l} (O_i, \overrightarrow{v_i}) \mid \forall\ (j,k) \in \{1...n\}, j < k, \\ \exists\ i \ tel\ que\ O_i = P_j \ et\ \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{P_iP_k} \end{array} \right\} \quad (21)$$

Les points P_i sont les points caractéristiques extraits de la courbe du contour. Un ensemble de $p = n(n-1)/2$ couples composés d'un point et d'un vecteur est ainsi obtenu. ζ est l'ensemble de tous les vecteurs qui peuvent être formés entre les points caractéristiques. Pour un point M donné de l'image, un ensemble de paramètres $\{\alpha_1, ..., \alpha_p\}$ est défini par l'équation :

$$\alpha_{ij} = \langle \overrightarrow{P_iM} \mid \overrightarrow{P_iP_j} \rangle, \quad (22)$$

avec :

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{ip-1} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Soit X le vecteur correspondant au point M :

$$X = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Ainsi connaissant l'ensemble ζ à chaque point M sont associés ses paramètres α_i grâce à une multiplication matricielle

$$\alpha = AX = \phi(X) \quad (25)$$

Les coordonnées α_i correspondent à la projection et à l'image par ϕ du point M sur chacun des vecteurs construits à partir de l'ensemble ζ. Cependant les caractéristiques α_i ne sont pas invariantes par homothéties, car les α_i sont des produits scalaires.

Nouvel espace de caractéristiques. Pour assurer l'invariance par tranformations affines les coordonnées β, γ et δ d'un point M seront définies à l'aide d'un rapport de surfaces de triangles (*cf.* figure 10).

FIG. 10: *Méthode par calcul barycentrique.*

Les paramètres β, γ et δ du point M (l'image de M par ϕ) vérifient alors l'équation suivante :

$$\beta \times \overrightarrow{MP_i} + \gamma \times \overrightarrow{MP_j} + \delta \times \overrightarrow{MP_k} = \overrightarrow{0} \quad (26)$$

où P_i, P_j et P_k appartiennent à l'ensemble des points issus de l'échantillonnage du contour exocrânien.
Les valeurs de β, γ et δ sont définies comme suit :

$$\beta = \frac{\overline{P_jMP_k}}{\overline{P_iP_jP_k}} \qquad \gamma = \frac{\overline{P_kMP_i}}{\overline{P_iP_jP_k}} \qquad \delta = \frac{\overline{P_iMP_j}}{\overline{P_iP_jP_k}} \quad (27)$$

où $\overline{P_iP_jP_k}$ est l'aire algébrique du triangle $P_iP_jP_k$.

L'aire algébrique du triangle $P_iP_jP_k$ est définie de la manière suivante :

$$\overline{P_iP_jP_k} = \frac{1}{2}\det\left(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_iP_k}\right) \tag{28}$$

Modèle non linéaire : estimation des points céphalométriques sur une image. La méthode, ainsi que la construction du modèle statistique, s'appuie alors sur le calcul des valeurs de β, γ et δ qui sont invariantes par une transformation affine. L'espace formé par les vecteurs ϑ ci-dessous est l'espace de caractéristique utilisé.
Soit ϑ le vecteur représentant les points céphalométriques :

$$\phi(x) = \vartheta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \\ \gamma_p \\ \delta_p \end{bmatrix} = A^{'}X \tag{29}$$

L'ACP est réalisée sur la matrice de variance-covariance des vecteurs ϑ dont seulement les $d^{'}$ composantes les plus informantes sont conservées. Ces composantes correspondent aux valeurs propres les plus fortes et forment une base de vecteurs Φ.
Retrouver les points céphalométriques sur une nouvelle image consiste à résoudre le système $\hat{E}[\vartheta] = A^{'}X$ par moindres carrés pondérés. Le critère à minimiser est alors :

$$J = ||\Phi^t P \hat{E}[\vartheta] - \Phi^t P A^{'} X||^2 \tag{30}$$

où P est une matrice de pondération :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\sigma}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\hat{\sigma}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\hat{\sigma}_{3p}} \end{pmatrix}, \tag{31}$$

avec $\hat{\sigma} = \hat{E}[(\vartheta - \hat{E}[\vartheta])^2]$.
On obtient une estimation de la position d'un point X dans une nouvelle image par :

$$\hat{X} = (A^{'t} P^t \Phi \Phi^t P A^{'})^{-1} A^{'t} P^t \Phi \hat{E}[\vartheta] \tag{32}$$

4 Résultats

Nous disposons d'un ensemble de 424 radiographies expertisées. Un modèle statistique a été appris pour chacune des méthodes décrites. Il faut remarquer que les deux méthodes utilisent le contour exocrânien. Sa détection et sa précision sont donc des données fondamentales pour une utilisation réelle et pour la comparaison entre les deux méthodes. Nous présentons d'abord les résultats sur la détection du contour crânien avant de comparer les méthodes linéaire et non linéaire.

Détection du contour.
Sur l'ensemble des céphalogrammes, les points initiaux I_1 et I_2 du contour exocrânien ont toujours été détectés. Le contour est exact sur 97% des radiographies. La détection et la poursuite de contour proposées présentent des avantages de robustesse (absence de seuils, solution régionale) et de rapidité.

FIG. 11: *Distance entre le repérage expert et le repérage statistique.*

Comparaison des deux méthodes.
La comparaison entre les deux méthodes se fait à l'aide de l'erreur entre le repérage statistique d'une radiographie et son repérage expert. La figure 11 illustre cette idée.

pts	E_x	E_y	σ_x	σ_y
NA	1.8	6.0	1.59	4.97
M	2.1	5.8	1.72	4.84
FM	2.1	5.7	1.66	4.75
SE	2.4	4.0	1.71	2.92
TPS	2.8	3.3	1.97	2.42
CLP	2.6	3.1	1.89	2.32
SSO	3.2	3.0	2.28	2.25
BA	4.0	2.8	3.30	2.15
CT	3.8	2.8	3.10	2.45
OP	5.3	1.9	4.52	1.70
OB	4.7	1.8	3.91	1.61
PTS	3.1	3.8	2.56	3.20
PTI	4.1	4.1	3.74	3.42
BR	4.9	1.0	4.07	0.95
Moyenne	3.4	3.5	3.09	3.43

TAB. 1: *Erreurs moyennes et espérance du repérage avec la méthode linéaire.*

Les résultats obtenus par la méthode linéaire sont présentés dans le tableau 1 tandis que le tableau 2 montre les résultats obtenus par la méthode non linéaire.
Les résultats présentés ci-dessus ont été testés sur l'ensemble de notre base d'images (424). Nous constatons que la méthode non linéaire donne de meilleurs résultats que la méthode linéaire en particulier dans la région nasale (*i.e.* pour les trois premiers points des deux tableaux). Une analyse plus fine des résultats fait apparaître que la précision dans cette région est en partie due à la détection du point initial de l'échantillonnage du contour exocranien, très proche de *Na*. Pour les autres points, la diminution de l'erreur moyenne est moins importante, de l'ordre de 17%. Elle peut être attribuée à la méthode non-linéaire elle-même. La

pts	E_x	E_y	σ_x	σ_y
NA	0.6	1.5	0.51	1.61
M	1.0	1.8	0.81	1.61
FM	1.2	1.8	0.93	1.63
SE	2.1	2.3	1.59	1.77
TPS	2.3	2.1	1.78	1.68
CLP	2.4	2.2	1.68	1.69
SSO	2.7	2.5	1.87	1.97
BA	3.6	2.2	2.66	1.82
CT	3.3	2.0	2.41	1.60
OP	4.6	1.9	3.90	1.61
OB	4.1	1.6	3.46	1.39
PTS	2.4	2.4	1.85	1.80
PTI	3.2	2.4	2.40	1.91
BR	4.4	0.7	3.47	0.63
Moyenne	2.7	2.0	2.60	1.72

TAB. 2: *Erreurs moyennes et espérance du repérage avec la méthode non linéaire*

variance de cette erreur est aussi en forte diminution, illustrant une plus grande robustesse de la méthode.

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé et comparé deux méthodes de localisation statistique de nuages de points. Le modèle est dans les deux cas construit en projetant les données d'entrée dans un espace commun à l'ensemble d'apprentissage. La première méthode utilise une approche linéraire, simple recalage rigide des données. La deuxième méthode utilise une approche non linéaire, projetant les données dans un espace de dimension supérieure à celui d'entrée, invariant par transformations affines. Une ACP est ensuite réalisée dans cet espace pour réduire sa dimension et offrir une représentation compacte et robuste.
Retrouver un modèle sur une image impose de déterminer l'espace commun à l'image et au modèle, *i.e.* le contour exocrânien. La projection du modèle dans une image et l'estimation de la localisation des points est ensuite réalisée par inversion matricielle au sens des moindres carrés.
Les résultats obtenus sur 424 radiographies illustrent la supériorité de l'approche non linéaire, dont les atouts résident essentiellement dans le nouvel espace de projection choisi grâce aux connaissances à priori de l'expert. Les travaux futurs consistent à utiliser cette information approximative pour retrouver les structures osseuses qui définissent anatomiquement chacun des points céphalométriques sur les radiographies.

Remerciements

Les auteurs remercient la société TCI pour les données, la disponibilité et l'aide précieuse qu'elle nous a apportée.

Références

[1] F. L. Bookstein. *Landmark methods for forms without landmarks: Morphometrics of group differences in outline shape.* Medical Image Analysis, pp. 225–244, 1997.

[2] B. Chalmond, S. Girard. *Nonlinear data representation for visual learning.* Rapport de Recherche INRIA, RR-3550, 1998.

[3] T.F. Cootes, C.J. Taylor. *Statistical models of appearance for medical image analysis and computer vision.* Proc. SPIE Medical Imaging, pp 4322-26, 2001.

[4] M. Crétot. *L'image téléradiographique en céphalométrie.* Éditions CDP, 1989.

[5] J. Delaire. *Vers une analyse teleradiographique architecturale et structurale de la face.* Orthodontie Française, Vol. 42, pp. 411-25, 1971.

[6] R. Deriche. *Fast algorithms for low-level vision.* IEEE Transactions on PAMI, Vol. 1(12), pp. 78-88, janvier 1990.

[7] M.J. Deshayes. *Repérages crâniens Cranial Landmarks* Editions CRANEXPLO, 2000.

[8] M. Desvignes, B. Romaniuk, R. Demoment, M. Revenu, M.J. Deshayes. *First Steps toward Location of Landmarks on X-Ray Images* ICPR , Barcelone, Espagne, Vol. 2, pp. 275-278, septembre 2000.

[9] M. Desvignes, B. Romaniuk, J. Robiaille, M. Revenu, M.J. Deshayes. *Détection et modélisation du contour crânien sur des céphalogrammes* GRETSI 2001, Toulouse, France, septembre 2001.

[10] I.L. Dryden, K.V. Madria. *Statistical Shape Analysis.* Eds John Wiley, 1998.

[11] C. Goodall. *Procrustes methods in the statistical analysis of shape.* J. Royal Stat. Soc. B, vol. 53(2), pp. 285-339, 1991.

[12] A. Jain, P. Duin, J. Mao. *Statistical pattern recognition: A review.* IEEE Transactions on PAMI, Vol. 22 (1), pp. 4-37, 2000.

[13] M. Pilu, A. Fitzgibbon, R.B. Fisher. *Ellipse-Specific Direct Least-Square Fitting.* IEEE ICIP, Lausanne, Suisse, Septembre 1996.

[14] R.M. Ricketts. *Planning treatment on the basis of the facial pattern and an estimate of its growth.* Angle Orthod, Vol. 27, pp. 14-37, 1957.

[15] B. Romaniuk, M. Desvignes, J. Robiaille, M. Revenu, M.J. Deshayes. *Recherche d'un référentiel stable pour la reconnaissance des formes statistique.* ORASIS Congrès Francophone de Vision par Ordinateur, Cahors, pp. 445-454, Juin, 2001.

[16] B. Scholkopf, S. Mika, C. Burges, P. Knirsch, K.-R. Muller, G. Ratsch, A. Smola. *Input space vs. feature space in kernel-based methods.* IEEE Trans. Neural Networks, Vol. 10(5), pp. 1000-1017, 1999.

[17] V. Vapnik. *Statistical Learning Theory.* Wiley, 1998.