



**HAL**  
open science

## Rigueur-contraintes : mathématiques-musique

Thierry Paul

► **To cite this version:**

Thierry Paul. Rigueur-contraintes : mathématiques-musique. Gazette des Mathématiciens, 2014, 139, pp.71-77. hal-00867275v2

**HAL Id: hal-00867275**

**<https://hal.science/hal-00867275v2>**

Submitted on 16 Dec 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# RIGUEUR-CONSTRAINTES : MATHÉMATIQUES-MUSIQUE

*par*

Thierry PAUL

---

**Résumé.** — Nous tentons de présenter quelques idées concernant la présence de la notion de rigueur et de contraintes dans le processus de composition musicale, en lien avec l'idée de rigueur en mathématiques. Ces deux propriétés nous semblent bien être présentes dans les deux disciplines, mais à deux endroits opposés de leurs activités créatrices.

## Table des matières

1. Introduction .....	1
2. Composer-Démontrer : rigueur .....	3
3. Action et le prélude qui ne prélude plus .....	4
4. Quasi una fantasia .....	4
5. ... wie die Zeit vergeht ... ..	5
6. Vous avez dit : “Fondées” ? .....	7
7. Romantisme .....	8
Références .....	9

## 1. Introduction

Il est souvent convenu de dire que la musique appartient au sensible et les mathématiques à l'intelligible. Si cette assertion est partiellement vraie, il n'en demeure pas moins que quelque chose rapproche ces deux activités, comme en témoignent les articles sur la musique dans la Gazette ainsi que

---

Ces lignes reprennent et développent un exposé de l'auteur au séminaire mamuphi (organisé par C. Alunni, M. Andreatta et F. Nicolas) le 12 mars 2011 à l'ENS Paris, intitulé “Rigueur, contraintes, action sans interaction”.

le nombre de mathématiciens dans l'histoire qui ont écrit "leur" traité de musique.

Entrevoir la musique à travers le seul prisme des sens, c'est bien sûr oublier que l'on trouve dans l'activité musicale occidentale depuis dix siècles non seulement, au travers de la notation musicale qui date de l'an mil, un exemple spontané de coordonnées cartésiennes, mais aussi dans une pratique effective de la musique fuguée des 17<sup>ième</sup> et 18<sup>ième</sup> siècles les germes de la théorie des groupes. Et ce ne sont là que quelques exemples.

Inversement l'idée fausse et trop souvent répandue, probablement à cause de mauvais souvenirs scolaires, du mathématicien au travail possédant certes un sixième sens, mais aucun des cinq autres, a fait du tort à l'image vraie de la création mathématique, toute baignée de cheminements tortueux et échappant souvent à toute forme de rationalité.

Il est d'ailleurs remarquable de noter que c'est à la même époque, celle de l'après guerre, que se sont cristallisés deux paroxysmes : une certaine "rigueur" musicale présente dans la période "post-sérielle" (une période où l'on composait "avec une règle et un compas" (Stockhausen) et l'on en était arrivé à ne plus faire que de l'"arithmétique obstinée" (Boulez)) d'une part, et d'autre part le structuralisme (d'une partie) des mathématiques des années cinquante. Ce que je voudrais essayer de brièvement discuter dans ce petit texte est la place que prend selon moi en musique et en mathématiques l'idée de rigueur conjointement à celle de contraintes ("on ne peut pas tout faire, ni en musique, ni en mathématiques"), ces deux notions étant, il me semble, non seulement présentes dans les deux activités, mais aussi cruciales en musique qu'elles ne sont fondamentales en mathématiques.

Il convient tout de suite de préciser ce que nous entendrons par musique dans cet article. Il s'agira de ce que l'on appelle communément la musique classique et la musique contemporaine, que l'on définira par l'idée d'une musique complètement écrite, et qui s'exécute fidèlement à la partition. On sait que le contenu de ce qui est écrit dans une partition, et la fidélité de son exécution ont beaucoup varié depuis le moyen-âge : lorsque l'on remonte le temps historique, le premier diminue et la seconde repose de plus en plus sur des conventions et habitudes, bref sur un savoir faire. D'autre part une partition peut, en son sein, autoriser une certaine liberté textuelle d'exécution. C'est le cas par exemple des œuvres ouvertes du 20<sup>ième</sup> siècle. Mais nous considérerons ici le cas où cette ouverture est complètement écrite, et le choix des possibles totalement déterminé.

Pour que la musique puisse s'écrire il lui faut un langage et la musique possède un langage propre, particularité qu'elle partage justement avec les mathématiques. Je pense que le fait de pouvoir développer un langage propre

est une particularité que peu de sciences et peu d'arts partagent. Mais, de plus, posséder un langage aussi codé, à la fois très précis pour les initiés et inintelligible pour les autres (tout le monde ne lit pas la musique, ni les mathématiques, a priori) est pratiquement une caractéristique des deux disciplines. Les deux se développent donc dans un langage, et pour chacune d'elle, ce langage va être à la fois un formidable moteur de création <sup>(1)</sup> et une source de contraintes et de rigueur possibles, et souvent nécessaires.

Ce sont quelques aspects de cette *rigueur en musique versus rigueur en mathématiques* que je voudrais discuter ici, afin de décrire, par ce prisme, certaines homologues, analogies ou oppositions qui me semblent cruciales si l'on veut percevoir les rapports profonds entre musique et mathématiques.

En particulier je voudrais essayer de montrer comment rigueur et contraintes apparaissent à des instants opposés dans les processus de "fabrication" en musique et en mathématiques : au tout début pour la première (et relâchée par la suite) et à la fin pour la seconde (l'appréhension d'un problème nécessitant une liberté souvent peu compatible avec une structure logique préétablie).

## 2. Composer-Démontrer : rigueur

Les compositeurs démontreraient-ils des sonates comme les mathématiciens composeraient des théorèmes ?

La première réponse qui vient à l'esprit est : non. Et même, pour certains esprits : NON !

Mais répondre hâtivement par la négative, c'est oublier comment la musique sérielle et post-sérielle des années cinquante a pu se gorger de structures arithmétiques, comment la musique contemporaine se donne pour chaque œuvre une structure a priori dans laquelle le compositeur va travailler, c'est oublier aussi le carcan tonal, la forme sonate, les règles du contrepoint classique, l'art de composer au 14<sup>ième</sup> siècle qui commençait par établir les rythmes avant d'y superposer les notes, etc. On le voit bien, la musique, la musique écrite entièrement, celle que l'on entend en l'écoutant, naît dans une structure de contraintes, de rigueur. Ce n'est qu'ensuite que vient la partie où le musicien peut tout se permettre.

Et inversement répondre non à la question posée plus haut c'est oublier que lors du "faire" mathématique, lorsque le mathématicien cherche une preuve

---

1. On notera que le langage musical est apparu afin de pouvoir transmettre une tradition musicale orale, tout comme la formalisation du langage mathématique est apparue afin de pouvoir échanger des mathématiques sans ambiguïté. Et dans les deux cas l'écriture est ensuite devenue le terreau de la création. C'est là déjà selon moi une première et forte analogie entre les deux disciplines.

ou l'énoncé possible d'un résultat, il compose plus qu'il ne démontre : il compose avec tout ce qu'il a à sa disposition pour entrevoir un chemin possible. La rigueur vient après.

### 3. Action et le prélude qui ne prélude plus

On *fait* donc des mathématiques tout comme l'on *fait* de la musique.

Pourtant les mathématiques sont souvent présentées comme toutes faites. Les structures apparaissant comme des rocs immuables dont on ne voudrait pas trop dévoiler l'élaboration. Cette présentation, en particulier à l'intention des non-mathématiciens, est dangereuse. Le lecteur de ces lignes a probablement été confronté à la situation dans laquelle on répond à son "je fais des mathématiques" par une incompréhension devant l'idée que les mathématiques ne seraient pas encore finies, terminées. Les rocs seraient déjà tous érigés.

Nous avons ébauché dans [2], et plus généralement dans le cadre du RTP "phenomath" <sup>(2)</sup>, une phénoménologie du "faire" en mathématiques qui, brièvement dit, consiste à placer une ontologie plutôt sur les actions du formalisme que sur les structure vues comme statiques. Que l'on ne s'y trompe pas, il ne s'agit bien sur pas ici de mathématiques appliquées, mais de l'action des mathématiques sur ... rien, rien d'extérieur à elles-même en tous cas. Tout comme les préludes de Chopin opus 28, [4], ne préludent rien, ou plutôt ne se préludent qu'à eux même (sauf le dernier).

Après Chopin, on trouve des centaines de préludes qui ne préludent rien. Ce sont pourtant des préludes. Ils ont gardé de leurs ancêtres qui préludaient des fugues aux 17ième et 18ième siècles, une idée d'action, d'élégance brève et d'inachevé qui sied à merveille aux concepts mathématiques vivants et en perpétuel renouvellement.

### 4. Quasi una fantasia

Un des rocs précédemment mentionnés est certainement le concept de fonction analytique. De même un roc en musique est à coup sûr la forme sonate. L'analogie peut sembler spéculative, mais si on y songe un peu elle l'est moins - que l'on pense par exemple à l'idée de développement vu comme un prolongement analytique des deux thèmes. Mais ce qui va nous intéresser ici est moins de creuser cette analogie que d'y détecter une inversion entre deux dynamiques.

---

2. Réseau Thématique Pluridisciplinaire du CNRS : <http://www.math.polytechnique.fr/~paul/phenomath/>

Il existe aussi des fonctions lisses et des fonctions quasi-analytiques, fonctions lisses “presque” analytiques. Et il existe en musique une forme que l’on nomme fantaisie, échappatoire à la forme sonate. Une fantaisie est bien une œuvre musicale, elle suit les règles de l’harmonie, mais elle ne rentre pas dans la forme sonate rigide : sa série de Taylor diverge, en quelque sorte.

Lorsque Beethoven (et bien d’autres après lui) a composé son opus 27 numéro 1 [1], il l’a appelé “sonata quasi una fantasia”.

Sonata quasi una fantasia - pourquoi pas “fantasia quasi una sonata” ?

Et de la même façon pourquoi ne dit-on pas “fonctions quasi-lisses”. La réponse côté mathématique nous la connaissons : les fonctions quasi-analytiques ne sont pas quasi-lisses, elles sont lisses. Pour pouvoir les appeler fonctions quasi-lisses il faudrait redéfinir la catégorie  $C^\infty$  par une définition exhibant une restriction à des séries de Taylor qui ne convergent pas. Cette définition n’aurait pas de sens<sup>(3)</sup>.

En revanche on pourrait très bien parler de “fantasia quasi una sonata”, pas d’objection fondamentale. Mais le faire voudrait dire que la forme prendrait le dessus sur le fond musical. Au fond une sonata quasi una fantasia est une sonate que l’on voudrait être une fantaisie, de même que l’on voudrait qu’une fonction quasi-analytique soit analytique (voir aussi [7] pour une discussion plus détaillée sur ce point).

Nous tenons là un exemple de positionnement inversé en mathématiques et en musique vis-à-vis du rapport à la rigueur, aux contraintes. Le but du mathématicien est bien la structure rigoureuse renforcée alors que celui du musicien est une forme de musicalité “débraillée” vis-à-vis de l’habit - fourni par la sonate, la forme en général, la tonalité<sup>(4)</sup> - de musique pure et nue. Les deux ont besoin du versant opposé, mais en inversant son entrée en scène, en quelque sorte. Nous reviendrons sur ce point d’opposition dans la dernière section.

## 5. ... wie die Zeit vergeht ...

Je voudrais évoquer maintenant un texte et une attitude que le lecteur ne connaîtra peut-être pas, et qui me semble se rapporter à l’un des moteurs unificateurs des mathématiques : le besoin d’universalité. On trouvera un texte un peu plus détaillé dans [6].

---

3. En tous cas de sens immédiat, car nous savons l’apport à la théorie de la dynamique qu’ont apporté les preuves, par Poincaré, des divergences des séries de perturbation : il s’agit bien là d’exhiber des fonctions qui sont  $C^\infty$  mais pas analytiques.

4. On sait que Schönberg a eu une (merveilleuse) période totalement atonale, mais a dû bien vite la remplacer par la musique sérielle

En 1956 Karlheinz Stockhausen écrit un article, intitulé “... comment passe le temps ...”, sur le temps en musique, le temps dans toutes ses dimensions si l’on peut dire [9]. Je voudrais ici seulement présenter, et encore très brièvement, la motivation de ce magnifique article dans lequel Stockhausen se pose la question de savoir si les différentes échelles de temps présentes dans le processus musical et “musicalement” différenciées a priori, ne peuvent pas revêtir le même statut.

Cet article se place dans un dynamique “années cinquante” du sérialisme généralisé.

Quelques échelles :

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\text{.....}r y t h m e\text{.....}}^{1s} \\
 \underbrace{\text{.....}n o t e\text{.....}}_{\frac{1}{460}s} \\
 \underbrace{\text{...}timbre\text{...}}_{10^{-5}s}
 \end{array}$$

La remarque fondamentale de Stockhausen est que, en musique, on traite ces différentes échelles de manière mathématiquement fort différentes : l’échelle du rythme dans l’arithmétique simple  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$  ... et l’échelle des sons en échelle logarithmique : réaliser un octave consiste à diviser par deux la longueur d’une corde. Quant à l’échelle des timbres, elle nous réserve bien des mystères.

Le pari de Stockhausen est que l’on peut composer en traitant musicalement de la même façon les différentes échelles. C’est là à la fois une contrainte très forte et, dans une certaine conception “romantique” et naïve, non - voire anti - musicale. Et une tentative d’universalisation toute scientifique, particulièrement présente dans les mathématiques qui aiment beaucoup (et c’est même là souvent une source importante de progrès) promener des structures dans différents domaines.

Cet article sera suivi d’un travail de composition extrêmement ardu de son auteur (qui avouera lui-même plus tard que les deux ans nécessaires à la composition de “Gruppen” était une expérience à ne jamais renouveler). Période de composition “à la règle et au compas” pleine de folie arithmétique qui donnera lieu à des œuvres d’une grande complexité, en particulier d’exécution, mais dont l’analyse devient limpide dès que l’on prend connaissance des clés de chacune d’entre-elles.

L’article de Stockhausen a suscité divers types de réactions. une lecture par trop locale y révélant une arithmétique un peu lourde et approximative, voire

fausse. Peu importe : quelques “Klavierstücke”, “Gruppen” découlent de ces réflexions et constituent parmi les plus grands chefs-d’œuvres musicaux du 20<sup>ème</sup> siècle.

## 6. Vous avez dit : “Fondées” ?

Il est inutile ici de décrire la partie du fonctionnement mathématique hors rigueur et hors contraintes que tous les lecteurs de la Gazette connaissent bien pour l’avoir souvent pratiquée. On sait aussi que l’on peut (certains pensent que l’on doit) aussi se demander si, une fois la (ou une certaine) rigueur passée, les énoncés mathématiques sont fondés. Cette vraie question sur les fondements des mathématiques, que l’on peut cependant résoudre et que l’on résout dans les mathématiques “de tous les jours”, n’est pas sans évoquer en musique certains fondements qui frôlent l’idée d’axiomatique : style classique, paradigme sériel, mais aussi nécessité cyclique dans la musique post-franckiste, la liste est longue.

Prenons l’exemple du style classique, celui de la musique du 18<sup>ème</sup> siècle, disons la forme sonate. Il existe bien une forme sonate avec deux thèmes, un développement, des ré-expositions, mais on sait bien qu’il n’existe aucune “vraie” sonate qui soit passée à la postérité et qui satisfasse pleinement les axiomes sonatiques. Mieux : le style classique, au fond, n’a-t-il pas existé a posteriori ? Comme un modèle académique dans lequel ne rentrerait complètement aucun exemple d’œuvre musicale ?

Lorsque A. Boucourechliev se demande ce qu’est la forme sonate, il répond [3] :

“Sonate, que me veux-tu ? Elle veut être habitée.  
L’unité de la sonate, c’est vous.”

Comment résister à la tentation de transcrire cette assertion dans le beau jardin des fondements des mathématiques :

“Axiomatique, que me veux-tu ? Elle veut être habitée.  
L’unité des mathématiques, c’est vous.”

Autrement dit, l’axiomatique fondationnelle veut être habitée par le “faire” mathématique. Sans cette intervention du mathématicien on ne peut conclure, démontrer certaines assertions, ni leur contraire. Mais : habitez l’axiomatique ! , alors vous tombez dans les mathématiques de tous les jours, et vous faites des mathématiques.



Et de la même façon l'axiomatique du style classique ne permet pas à elle seule de créer des sonates, ou plutôt d'en créer d'a priori musicales. Plus précisément l'axiomatique du style classique permet de composer, mais elle ne permet pas de décider si une œuvre est musicale ou pas - comme on ne peut pas démontrer, ni son contraire, la célèbre proposition de Gödel dans l'axiomatique de Peano. La musicalité n'apparaît pas avant que la personnalité du compositeur soit venue habiter le style dans lequel il compose. Tout comme les "vraies" mathématiques (si je peux me permettre ce jeu de mots) apparaissent lorsque le modèle standard vient habiter l'axiomatique de Peano.

Cette petite discussion nous fait entrevoir une partie de ce que sera la conclusion de ces lignes, dans la section suivante : la possibilité d'être musical apparaît bien au lieu où apparaît la possibilité mathématique d'être rigoureux : en dehors d'une axiomatique trop académique.

## 7. Romantisme

[...] la fonction  $w$  soit "choisie égale à 0 sauf pour  $k\epsilon < \eta < k\epsilon + \delta$ ", où " $\delta$  est un infiniment petit", et telle que :

$$\int_{k\epsilon}^{k\epsilon+\delta} w(\eta)d\eta = 1,$$

(Poincaré 1912, [8])

infiniment petits d'ailleurs définis par :

"On dit qu'un nombre variable  $x$  a pour limite un nombre fixe  $a$ , ou tend vers  $a$ , lorsque la valeur absolue de la différence  $x-a$  finit par devenir et "res-ter" plus petite que n'importe quel nombre positif donné à l'avance. Lorsque  $a = 0$ , le nombre  $x$  est dit "un infiniment petit"."

(Goursat 1933, [5])

Avec Poincaré comme avec Goursat, dans ces exemples, on est dans les mathématiques que l'on qualifierait de nos jours de, disons, poétiques. Ce terme n'est certainement pas, loin s'en faut, péjoratif, mais nous n'autorisons plus cette poésie dans les textes écrits (en particulier par nos doctorants).

Il me semble que ces extraits peuvent être mis en opposition - ou plutôt, comme nous allons le voir, en dualité - avec, par exemple, la musique sérielle qui va imposer de composer (à la Pirec en quelque sorte) en n'utilisant que les notes d'une série ordonnée et qui doivent apparaître toujours dans le

même ordre. Ou bien avec les techniques de composition plus modernes utilisant carrés magiques, suites de Fibonacci et autres procédés que l’ordinateur permet de réaliser.

En effet ne nous semble-t-il pas qu’il est aussi peu mathématique, dans l’écrit mathématique contemporain, de parler de *valeur absolue (...)* [qui] *finît par devenir (...)* plus petite, que ne sont musicales à notre oreille les suites de Fibonacci ?

Le grand succès de la création musicale réside dans ce travail effectif nécessairement à l’intérieur de ces contraintes, et soudainement relâché, in fine, dans une dynamique “C’est moi l’Artiste !” qui permet au compositeur de tout remettre en question afin de composer une œuvre musicale.

De même que, tout comme nous travaillons tous les jours avec des infiniment petits qui ne font que “rester plus petits que tout nombre donné à l’avance” et des distributions que nous “choisissons” comme Poincaré le faisait en 1911, en dehors de toute topologie de Fréchet, notre réel plaisir est bien, in fine aussi, de définir nos objets et nos raisonnements en toute rigueur. C’est bien là que réside notre “C’est moi l’Artiste !” à nous. Et le miracle se situe bien dans le fait que de beaux résultats puissent être démontrés rigoureusement.

La rigueur, c’est le romantisme du mathématicien.

## Références

- [1] L. van Beethoven, Sonata quasi una fantasia opus 27 No. 1, Gio. Cappi e Comp., Vienne 1802.
- [2] J. Benoist et T. Paul, “Pour une phénoménologie du formalisme mathématique”, dans “Dynamique du formalisme mathématique”, édité par J. Benoist et T. Paul, Hermann, 2012.
- [3] A. Boucourechliev, “Essai sur Beethoven”, Actes Sud, 1993.
- [4] F. Chopin, Vingt-quatre préludes opus 28, Paris et Leipzig, 1839.
- [5] É. Goursat, **Cours d’analyse mathématique**, Gauthier-Villars, Paris, 1933.
- [6] T. Paul, “Des sons et des quanta”, dans “Mathématique/Musique/Philosophie” (C. Alunni, M. Andreatta et F. Nicolas, eds.), Collection “Musique/Sciences”, IRCAM-Delatour, 2012.
- [7] T. Paul, “Le presque, le non, l’anti et la rigueur”, Actes du Colloque phenomath “Le presque”, La Sorbonne 4 et 6 juillet 2012, à paraître chez Hermann.
- [8] H. Poincaré, “Sur la théorie des quanta”, J. de Physique théorique et appliquée, 5ième série, **2** 5-34, 1912.
- [9] K. Stockhausen, “...wie die Zeit vergeht...”, die Reihe, **3**, 1957. Traduction française “...comment passe le temps...”, Analyse musicale **6**, 1987.