



HAL
open science

Le presque, le non, l'anti et la rigueur

Thierry Paul

► **To cite this version:**

Thierry Paul. Le presque, le non, l'anti et la rigueur. Hermann. Le presque Enjeux croises mathématique-philosophie, Hermann, 2015, Visions des sciences. hal-00867268

HAL Id: hal-00867268

<https://hal.science/hal-00867268v1>

Submitted on 27 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LE PRESQUE, LE NON, L'ANTI ET LA RIGUEUR

par

Thierry PAUL

“En géométrie l'à peu près n'existe pas”

Émile Cantaloube
Cours de CM2 géminé, années 60-70
Sébazac-Concourès⁽¹⁾, Aveyron

Table des matières

1. Introduction	2
2. (presque)Thèse de cet exposé	8
3. Les flots de diPerna-Lions	9
4. Presque solutions	12
5. Topologie du presque : du presque au non	14
6. Quasi una fantasia	14
7. Le presque déconstruit : le non	15
Épilogue	17
Références	18

1. parlant géométrie, la commune de Sébazac-Concourès est la seule commune française non connexe, avec deux composantes, celle de Sébazac et celle de Concourès.

1. Introduction

Je voudrais parler ici du presque qui apparaît en mathématiques non comme résultant d'une approximation (comme en physique), ni d'un manque d'information (statistiques), ni d'un indéterminé (inégalité de Heisenberg), ni même d'un probable qui pourrait être presque sûr.

Ce dont je voudrais parler dans ce petit texte, c'est d'un presque qui apparaît comme modifiant des structures soit parce que l'on n'arrive pas à en établir la véracité ou l'existence, soit parce que l'on s'aperçoit au contraire qu'un résultat est vrai sous des hypothèses moins fortes (ou plus fortes d'ailleurs, différentes en tous cas).

Dans les deux cas le presque est une extension du "exact" et je vais essayer de montrer comment le presque non seulement n'a rien à envier à l'exact, mais qu'il peut lui ravir la vedette parfois : le presque de " \mathcal{X} " sera parfois plus intéressant que " \mathcal{X} " lui-même.

Nous allons d'autre part se retrouver au cœur des mathématiques : le presque, ce presque-là en tout cas, va en fait apparaître comme satellite de la rigueur, joyau des mathématiques. Il est en effet frappant de remarquer, il me semble, que le presque, dans ce sens là comme dans d'autres d'ailleurs, existe surtout en mathématiques, siège de l'exact. Peu de presque en physique, et pratiquement pas en biologie, comme si les sciences vraies, imprécises, avaient du mal à formaliser des presque structures - exception faite de la Mécanique Quantique incorporant un presque probabiliste intrinsèque (et non plus imprécis) qui fait d'elle un véritable tournant épistémologique.

Si l'on se demande pourquoi le presque a cette propension à se réaliser autour de l'exact, on doit se confronter à la structure vraie, au squelette des mathématiques qui est :

hypothèses, résultat **et** preuve.

Dans un énoncé mathématique il y a non pas deux mais en fait trois ingrédients :

- a. Un résultat
- b. Des hypothèses
- c. Une preuve

Bien sûr toutes les mathématiques ne sont pas là, qui peuvent aussi offrir de simples concepts, sans preuve, sans résultat.

L'assertion célèbre :

“Toute définition doit être l'hypothèse d'un théorème”

est certainement trop restrictive, mais elle offre tout de même un moteur sérieux des mathématiques, un **geste** essentiel de celles-ci : la preuve, immaculée de rigueur.

Et c'est dans ce geste, il me semble, que se trouve la véritable dynamique du “presque”.

Ce geste est pourtant, en principe, très rigide : pas de presque, seulement du vrai et du faux.

Sauf que lorsque l'on n'arrive pas à montrer le résultat souhaité, on peut parfois, et ce parfois avec un peu d'habitude peut se tourner en un souvent, montrer le presque-équivalent à ce résultat convoité. Ou bien on peut aussi relâcher un peu les hypothèses de façon à avoir le résultat escompté sous “presque les mêmes hypothèses”.

Ces deux approximations ne sont pas de la même nature, puisque le presque-résultat est en dessous (plus faible), et les presque hypothèses sont au dessus (plus fortes).

On exprime souvent, cependant, cette opposition de valeurs en disant :

On obtient presque le résultat avec quasiment les mêmes hypothèses.

Le presque et le quasi, et Eugène Onéguine. — Regardons le dictionnaire :

presque : pas tout à fait

quasi : à peu près.

On donne souvent, aussi, quasi pour synonyme de presque.

Le quasi serait donc autour tandis que le presque serait d'un côté, d'un côté seulement.

Le presque rien serait donc déjà quelque chose, sous-entendu de positif, et le quasinul serait autour de zéro, sans aucune connotation de positif ou négatif. Le presque associé à un geste, un “vers”, et le quasi serait statique, sans connotation de valeur.

Et l'on entendra :

“C'est “presque le même résultat” (en dessous) que l'on démontre avec “quasiment les mêmes hypothèses” (autour).” C'est du moins ce que sa propre vanité suggère au mathématicien d'avouer⁽²⁾.

1.1. Le presque autour de la preuve. — Combien de mathématiciens n'ont-ils pas clamé avoir “presque démontré” la conjecture de Poincaré ou l'hypothèse de Riemann ?

Qu'est ce qu'une presque preuve ? Je n'en sais rien.

Le presque fait référence (en principe mais finalement peut-être pas), nous y reviendrons plus bas, à une topologie, une idée de voisinage quantifié. Orthogonal à l'idée de la preuve qui est “tout ou rien”.

Et pourtant le mathématicien vit en permanence dans le presque rigoureux, c'est ça qui le fait avancer. Sinon il ne rêve pas, et ne peut imaginer les idées qui a la fin seront les ingrédients de la preuve (voir l'épilogue plus bas).

2. “Pétri de vanité, il avait encore plus de cet espèce d'orgueil qui fait avouer avec la même indifférence les bonnes comme les mauvaises actions, suite d'un sentiment de supériorité peut-être imaginaire”, Eugène Onéguin, A. Pouchkine

Mais lorsqu'il échoue, que la preuve ne marche pas (dans l'hypothèse où il cherche à démontrer un résultat qu'il connaît déjà) alors, en quelque sorte, comme dit Aragon,

il lui reste toujours ce plaisir merveilleux, vitupérer l'époque.

C'est-à-dire vitupérer le résultat, son environnement, et démontrer presque ce qu'il avait l'intention de prouver.

1.2. Le presque résultat. — La preuve apparaît souvent comme un tunnel, dont sort le résultat. Un presque résultat est un résultat affaibli, certes, mais qui sort aussi du bout du tunnel. C'est là son principal mérite : il est rigoureux. C'est-à-dire qu'il est rigoureusement établi.

Le résultat, celui escompté, apparaît souvent comme une intuition. On le croyait vrai parce que il était intuitif : se donner un champ de tangentes gentil va bien nous donner une courbe gentille. Or on sait que ce n'est pas vrai, et que l'intégration d'un champs de vecteur non lipschitzien n'est défini que presque partout. Le presque résultat apparaît **contre** une intuition et il semblerait donc qu'il soit, puisque contrintuitif, boiteux, mal équilibré, mal défini. Mais puisque les mathématiques nous permettent pleinement de considérer ce presque (ici un presque partout) il n'en est rien et le presque résultat nous satisfait.

1.3. Les presque hypothèses. — Mais il est un autre bout de ce tunnel de la preuve : l'entrée dans le tunnel, les hypothèses.

En fait c'est une entrée une fois que tout est fini, que l'on rédige. Mais dans le cours de la démonstration c'est plutôt une sortie. En effet cette disymétrie entre hypothèse (avant) et résultat (après) n'a pas de sens : pendant l'élaboration de la preuve on rentre et on sort de tous les côtés du tunnel.

Et donc comme sortie l'hypothèse a un statut équivalent au résultat. On peut donc l'affaiblir, c'est-à-dire l'augmenter. Le

même exemple que précédemment fonctionne ici encore : sans l’hypothèse Lipschitz le flot ne s’intègre pas, mais avec cette hypothèse supplémentaire, il le fait.

De ce point de vue-là on voit bien que le presque semble bien une approximation d’un objet, d’un être (le résultat escompté), bref d’une ontologie. Ce presque-là s’oppose donc à l’“anti” qui, lui, est ontologique. Essayons de voir cela dans le cas des systèmes presque’intégrables tels que Poincaré les a appréhendés : nous allons apercevoir une suite

presque \rightarrow non \rightarrow anti

qui s’incarnera dans ce cas par

presque intégrable \rightarrow non intégrable \rightarrow chaotique.

Le presque, le non et l’anti. — Le presque est à l’opposé du non, en quelque sorte. Si on est presque, on n’est pas tout à fait mais on n’est pas loin. On a longtemps cru (Laplace, Poincaré jeune) qu’un système presque intégrable était intégrable. Cela voulait dire que si l’on perturbait un peu un système dynamique dont la dynamique est très bien comprise et très gentille, et bien le système restait dans cette même classe. Poincaré a montré (après avoir montré le contraire) qu’il n’en était rien, et qu’un système perturbé perdait son intégrabilité.

Mais Poincaré a fait beaucoup plus. Par un positionnement très particulier face aux résultats négatifs, voir [8, 9] pour plus de détails, il montre que la non convergence des séries de perturbation entraîne l(a possibilité d)e chaos. Plus précisément il montre, depuis l’impossibilité qui est la sienne de prouver leur convergence, leur divergence, et par là-même la possibilité du mouvement chaotique. C’est magique. Seules les mathématiques qui traînent comme un boulet leur rigueur peuvent transformer ce boulet en générateur de nouveaux paradigmes (peut-être la musique a-t-elle eu un tel pouvoir lors de la fin de la tonalité?).

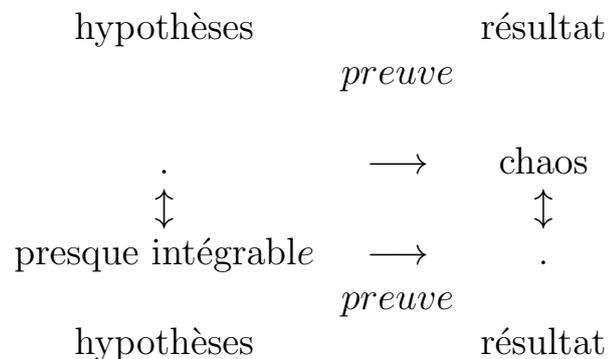
On a donc ainsi un curseur du “presque” à l’“anti” via le “non” : les séries sont tout d’abord presque convergentes (au sens

que si l'on varie un tout petit peu un paramètre elles se mettent à converger), mais elles ne sont plus convergentes (le système n'est plus intégrable) et elles peuvent même devenir divergentes, mettant à nu un nouveau paradigme, celui du chaos, une nouvelle ontologie en fait. Mais nous allons voir, et ce sera la thèse de ce texte, que ce presque, lui aussi, va au fond faire apparaître un nouveau paradigme, une nouvelle ontologie très précise à l'opposé du flou généralement attribué au presque, précision tenue par la rigueur de la preuve caractéristique des mathématiques.

Résumons :

à petite valeur sur le curseur on a les systèmes "presque" intégrables : c'est au fond un presque chez les hypothèses (être intégrable est une définition dont on essaie de tirer des conséquences, des conclusions), puis on a les systèmes non intégrables et en poussant un peu les systèmes chaotiques. Mais "chaotique" est maintenant du côté des résultats (on démontre qu'un système est chaotique). Nous allons voir que le presque peut aussi passer des hypothèses au résultat, en donnant une définition du presque intégrable.

Et au milieu de ce jeu se trouve la preuve, immuable.



2. (presque)Thèse de cet exposé

*Affaiblir des hypothèses c'est en rajouter.
Affaiblir un résultat c'est en enlever.*

Tout est dans cette remarque, au demeurant très “Audiard” (3).

C'est le lien très étroit entre hypothèses et résultat, très étroit et très rigoureux grâce à la preuve, qui donne une incarnation au presque en mathématiques. La preuve, quant à elle, restant immuable, rigide. Et cette rigidité est semblable à celle de la poutre reliant les deux sièges d'une balançoire : si un siège monte l'autre descend, et vice versa. Que la poutre se ramollisse et il n'y a plus de jeu possible.

“À déformation près”, le beau titre d'un presque exposé à ce colloque, suggère que c'est bien parce que les mathématiques définissent en toute rigueur ce qu'est une déformation que tout variété compacte connexe de dimension deux à courbure positive est “presque une sphère”. Et l'on sait combien la preuve de ce vrai résultat, conjecturé par Poincaré, a donné de mal aux mathématiciens.

C'est ce positionnement par rapport à la rigueur qui fait de l'approximation de l'ontologie une ontologie. La seule possibilité du concept ne le pourrait pas, comme c'est le cas en physique par exemple.

De même que le “non” de Poincaré, non à l'ontologie de l'intégrabilité qui se transforme en “oui” de l'ontologie du chaos, passant d'une ontologie à une autre,

3. “Les bénéfices ça s'divise, les années de placard ça s'additionne”, dans “Le cave se rebiffe”

le “presque” peut nous faire passer d’une approximation de l’ontologie du résultat attendu à une ontologie véritable.

C’est bien ce qui se passe, par exemple, dans le cas des systèmes presque’intégrables décrits plus haut. Un système intégrable perturbé perd, strictu sensu, son intégrabilité (en général). Mais il garde cependant un très grand nombre de tores invariants, les fameux tores “KAM”, traces du paradigme intégrable. De plus, plus la perturbation est petite, plus ces tores KAM remplissant entièrement l’espace ambiant. On a donc bien une notion de presque’intégrabilité non plus comme définition, mais comme résultat. J’ai essayé dans [7] d’apercevoir comment cet ensemble de tores KAM constitue une “espace vu des équations différentielles”. Mais ce presque résultat a encore une saveur un peu vague, une saveur d’à peu près. Un à peu près normalisé par cette taille de la perturbation qu’un intervenant extérieur est censé pouvoir bouger comme un curseur. Ce n’est pas un presque absolu, ce “rien, cet impondérable qui fait qu’on croit à l’incroyable” se produisant au “premier regard échangé” avec les mathématiques. Ce presque absolu, infinitésimal, généré par une situation presque, à peu près standard, nous allons le voir sur l’exemple de ces flots presque partout définis, solutions d’une équation à peu près bien posée.

3. Les flots de diPerna-Lions

Intégrer un champ de vecteurs, c’est faire la démarche inverse à celle qui consiste à tracer en tout point d’une courbe son vecteur tangent (voir [7] pour plus de détails).

On se donne un “champ de vecteurs tangents” et on construit la courbe tangente en chaque point : c’est la trajectoire solution.

A première vue il semblerait suffisant pour qu'une trajectoire existe que le vecteur tangent existe. C'est l'intuition que l'on a lorsque l'on trace une courbe. Or il n'en est rien. L'unicité de la solution de la dynamique nécessite plus que cela. Et cela n'est pas seulement une condition que l'on rajoute afin de démontrer le résultat, c'est vraiment une condition nécessaire comme le montre l'exemple du potentiel newtonien $V(x) = -|x|^{1+\theta}$, $0 < \theta < 1$ traité en détail dans [7]. Le champ de vecteurs associé a une singularité à l'origine qui détruit l'unicité de la solution. Mais il est juste de remarquer que si nous partons de $x = 0$ mais avec une vitesse non-nulle cette fois, l'ambiguïté précédente disparaît et l'on a à nouveau unicité de la trajectoire. Le lieu singulier, celui à partir duquel la dynamique n'est pas "bien" définie car possédant le don d'ubiquité, est donc un simple point dans l'espace des phases, espace des positions-vitesses. C'est un tout petit lieu, impossible à dessiner car n'ayant, selon Euclide, pas d'intérieur. En langage moderne on dit que c'est un ensemble de mesure nulle. Partout ailleurs, c'est-à-dire "presque" partout, la dynamique est bien définie, les trajectoires sont uniques, sans ambiguïté.

Cet exemple est caractéristique d'une famille de dynamiques qui sont, justement, définies "presque partout". Passons sur les détails techniques : il se passe pour cette classe de champs de vecteurs ce que nous avons décrit plus haut dans le cas particulier du potentiel $-|x|^{1+\theta}$: la dynamique est bien définie et définie de façon unique "presque partout".

Nous voilà donc au cœur du presque : si l'on tire au hasard une position et vitesse initiales, alors avec probabilité 1 la dynamique sera bien définie. Si l'on songe maintenant à incarner l'espace à partir des trajectoires dynamiques, on voit que l'espace, union des trajectoires, est un espace non plus de points bien rangés les uns à côté des autres, mais véritablement un espace habité par la dynamique singulière, ou plutôt : l'espace est la partie régulière

de cette dynamique qui serait singulière si on la voyait dans l'espace banal tout entier. Nous sommes maintenant face à un tournant épistémologique, paradigmatique même : l'espace dépend de la dynamique qu'il engendre. Non pas seulement du type de dynamique, comme l'était l'espace ordinaire, mais de la dynamique elle-même, deux potentiels différents générant a priori deux "presque partout" différents. Car, si cette dynamique est bien engendrée par l'espace ordinaire, en ce sens que l'équation (au sens large) la définissant (la donnée de l'équation de Newton où bien du champ de vecteurs tangents en chaque point) est bien définie partout, dans *tout* l'espace "ordinaire", les solutions elles-seules sélectionnent la partie régulière de l'espace.

Au fond on pourrait arguer que la situation n'est pas tellement différente de la situation standard : un espace en vaut un autre.

Mais, première différence, cet espace est habité par la dynamique, pas le contraire. Deuxièmement, et de façon plus importante à nos yeux, dans le cas de la dynamique singulière, s'il est vrai que pour presque tous les points de départ la dynamique existe pour tout temps, et donc que l'on doit pouvoir composer les dynamiques avant et après un arrêt quelconque de celle-ci, le fait de s'arrêter et de repartir donne bien lieu à une dynamique totale, composée des dynamiques avant et après l'arrêt, mais qui existe elle aussi seulement "presque partout".

Or ce nouveau "presque partout" n'a rien à voir avec ceux des deux dynamiques précédentes. On voit donc que, non seulement l'espace est défini d'après sa dynamique, mais le label de "bons points" attribué aux points initiaux donnant lieu à une dynamique bien définie est redistribué dès que l'on s'arrête. Si ce fait nous semble difficile à comprendre, c'est qu'il est contrintuitif vu depuis notre conception classique de l'idée d'espace, indépendant de la dynamique qu'il abrite. Cette construction donne une idée d'un espace défini par un survol : il est là mais il est vu de loin, un espace lointain en quelque sorte.

Un espace que l'on ne peut plus véritablement définir comme espace de points, sous-espace de l'espace usuel : un espace du presque partout, un point c'est tout.

4. Presque solutions

Traditionnellement la solution d'une équation algébrique est un nombre (ou un point), celle d'une équation différentielle, comme celles dont nous venons de parler, est une courbe, celle d'une équation aux dérivées partielles (EDP) une fonction définie sur un espace. Mais les traditions se perdent, qui ont vu apparaître les nombres complexes, ces solutions non réelles d'équations bien réelles, ou bien les solutions ambiguës d'équations différentielles, pétries d'ubiquité, dont nous venons de parler. Mais ces solutions restent "traditionnelles" dans le sens qu'il suffit de les placer dans l'équation pour voir qu'elles la satisfont.

Pour lse EDP la situation va être bien plus "tabula rasante" lors de l'avènement du célèbre article de Jean Leray de 1933 [5] sur les solutions des équations de l'hydrodynamique. La notion de solution faible y est introduite, qui change radicalement la façon d'appréhender l'idée de solution. Cette fois-ci on change l'équation, comme on la changera (avant de la retrouver par passage à la limite) pour les solutions de viscosité, et pour les solutions généralisées de (encore) diPerna et Lions on change la solution elle-même, comme on change de variable dans les équations ordinaires.

Solutions faibles. — Une solution au sens classique du terme pourrait être singulière sur un petit sous-ensemble de son ensemble de définition. Afin d'éviter cette singularité on va intégrer l'équation contre une fonction test, le phénomène d'intégration se chargeant de tuer les espace négligeable, sources de problèmes.

On montre alors qu'il existe des solutions de cette, en fait de ces, nouvelles equations obtenues par le balayage de toutes les

fonctions test. On a ainsi filtré les solutions pour ne laisser que la partie régulière. Mais la solution ainsi obtenue est presque partout égale à celle que l'on voulait initialement. On peut donc parler de presque solution.

Solutions de viscosité. — Cette fois-ci afin de palier le manque de résultat de type “existence-unicité” pour une équation donnée, on perturbe celle-ci par un terme à la fois singulier et petit ayant la propriété de redonne de l’“existence-unicité” à la nouvelle équation. L’aspect “singulier” donne assez de force à la perturbation pour changer significativement l’équation du départ en la “existence-unicité” ant. L’aspect petit va quant à lui permettre de suivre la nouvelle (et unique) solution lorsque l’on fait disparaître la perturbation, revenant ainsi à l’équation de départ tout en conservant l’unicité de la solution. C’est un tour de passe-passe, et c’est là aussi l’un presque élevé au niveau infinitésimal : l’équation satisfaite est presque la même, avec un presque infinitésimal souvenir de ce passage perturbatif.

Solutions renormalisées. — Bien que plus récentes les solutions renormalisées découlent d’une action fort bien connue en mathématiques : le changement de variable. Ici, confronté encore une fois à une équation à problème, on montre que l’équation équivalente que satisfait une fonction de l’inconnue de l’équation initiales, a elle toutes les bonnes propriétés que l’on veut. Si pour toutes (disons raisonnablement toutes) les fonctions la nouvelle équation obtenue a “existence-unicité”, alors on dit que la solution initiale est une solution renormalisée de l’équation initiale. C’est aussi une presque solution puisque l’on approche ainsi la vraie équation.

Le presque et le comme si. — Ce qui se passe ici me semble proche de ce que Bachelard décrit dans “La philosophie du non” [1] comme l’étape où la physique est passée du “c’est” au “c’est comme si” et enfin au “pourquoi pas”. Les solutions faibles,

de viscosité et renormalisées que nous venons d'entrevoir donne une idée d'une solution d'une EDP "comme si" elle était solution d'autre chose, d'une autre chose proche mais tout de même différent. Le "pourquoi pas" va plus loin bien sûr. et nous donnera peut-être bientôt de bien nouvelles perspectives sur la théorie des EDP.

5. Topologie du presque : du presque au non

Il existe des fonctions dont toutes les dérivées existent en un point, on les appelle C^∞ ou lisse. Et puis il y a celles dont le développement de Taylor converge, c'est-à-dire qui sont définies par la suite de leurs dérivées. On les appelle analytiques. Et puis il a des fonctions que l'on appelle *quasianalytiques*.

Mais alors, pourquoi les appelle-t-on quasianalytiques et non pas quasilisses ? Et bien parce que la topologie de l'analytique est plus fine que celle du lisse : une fonction analytique est lisse, et le contraire est faux. On ne peut donc qu'être quasianalytique.

Et pourtant ne dit-on pas qu'une fonction n'est que C^∞ si on sait qu'elle n'est pas analytique ? Ne pourrait donc pas dire qu'une fonction est C^∞ si elle a toutes ses dérivées qui existent mais qu'elle n'est pas analytique ? On aurait donc bien ainsi des fonctions quailisses, probablement les mêmes d'ailleurs que les quasianalytiques d'avant. Mais il faudrait pour cela penser aux mathématiques en action et non pas figées et non ambiguës. Le mathématicien ne peut s'y résoudre, mais d'autres le peuvent comme nous allons le voir maintenant. Faut-il s'en inspirer ?

6. Quasi una fantasia

En musique on trouve des formes très rigoureuses (bien que ce terme-là conduise rapidement à l'académisme). L'exemple qui a illuminé deux siècles de musique est celui de la forme sonate : deux thèmes, réexposition, développement, coda etc. : la sonate

c'est l'analyticité en musique. Puis il y a des formes qui n'en sont pas, au titre évocateur, par exemple, de fantaisie. C'est un aspect lisse, C^∞ . Tout est lisse et spontanée dans une fantaisie.

Et puis l'on trouve, chez Beethoven et plus tard, des mouvements de sonates "quasi una fantasia". Et non pas des fantaisies "quasi una sonata". Pourtant la structure est vers la sonate, tout comme elle est vers l'analytique. Pourquoi cette inversion par rapport aux maths ? Et bien justement parce que la topologie est elle aussi inversée.

En musique on va rigoureux d'abord puis on relâche, et le fait musical propre est le moins rigoureux. Alors qu'en mathématiques on est fantaisiste au début et rigoureux à la fin (voir [6]). Et si l'on garde la forme sonate, même lorsqu'au cours des ages on en a vidé le contenu, c'est bien pour l'auditeur qui va redigérer tout ça et n'y voir que du bleu.

"Sonate, que me veux-tu ? Elle veut être habitée. L'unité de la sonate, c'est vous." [2]

7. Le presque déconstruit : le non

Un système presque intégrable est une petite (c'est l'aspect presque) perturbation d'un système intégrable, c'est une définition vague. Ce qui n'est pas vague est le résultat : il y a un grand nombre de tores KAM conservés, donc on reste presque intégrable. Mais on peut lire aussi ce résultat d'une façon qui aurait intrigué et chagriné Laplace : un certains nombre de tores sont détruits. Le système est donc, en quelque sorte et par un abus d'expression, presque non intégrable. Mais on voit là la tentation de faire grossir ce presque afin d'être de moins en moins intégrable, ou plus précisément, de plus en plus non intégrable. Mettons le doigt dans l'engrenage : lorsque le presque devient très grand, alors non seulement on n'est plus intégrable du tout, mais on peut à l'opposé devenir chaotique, c'est-à-dire anti-intégrable.

Mais alors le presque n'est plus presque, il a été transfiguré par le passage au travers du non.

Cette symétrie de saut de mouton nous montre bien comment le non est le bout du presque.

Mais c'est un bout tout déchiqueté que le presque doit nous offrir pour que nous puissions apercevoir le non. Il faut épuiser le presque, le comprendre souvent mot par mot, voir ses forces et ses faiblesses, étaler devant soi ses composantes, pour qu'enfin, parfois et pas à tout le monde, apparaisse le non, fruit de la déconstruction du presque.

Épilogue

“Il est bien entendu que l’art n’est qu’un délicieux mensonge, le plus charmant de tous les mensonges. Et que les faux bijoux sont bien plus beaux que les vrais” [4]. Comment ne pas citer Jankélevitch dans un texte sur le presque. Qui nous amène à la question suivante.

Qu’est-ce que la rigueur en mathématiques ?

C’est une question bien sûr fascinante, qui nous conduit inexorablement vers “qu’est ce que (ce qui joue le rôle de) la rigueur en dehors des mathématiques”.

La rigueur mathématique n’est certainement pas une construction logique “remontant” aux fondements, qui n’existent pas d’ailleurs.

Pas plus qu’une structure logique hors fondements : une preuve est acceptée comme vraie si un certain nombre de mathématiciens disent ainsi, après tout.

De façon moins cynique, la rigueur ne serait-elle pas (aussi, surtout ?) cette singularité des mathématiques qui justement permet d’incarner le “presque” et le “non”, voire l’“anti” ?

Ne serait-ce pas cette fantastique dynamique qui permet de contrôler les “tenants et aboutissants” d’un raisonnement dans leurs variations, (presque) infinitésimales et parfois extrêmes, jusqu’au négatif, voire au contraire ?

La rigueur n’est-elle pas le plus court chemin entre le “vrai” et le “presque”, entre le “oui” et le “non”, celui qui passe par la déconstruction du “à peu près” et du “négatif”, qui définit le positif du “moins fois moins”, l’ontologie du “moins fois presque rien” ?

La rigueur, c’est aussi et peut-être avant tout un geste.

Références

- [1] G. Bachelard, “La philosophie du non”, Essai d’une philosophie du nouvel esprit scientifique. Paris : Les Presses universitaires de France, 1966,
- [2] A. Boucourechliev, “Essai sur Beethoven”, Actes Sud, 1993.
- [3] J. Benoist et T. Paul, “Pour une phénoménologie du formalisme mathématique”, dans “Dynamique du formalisme mathématique”, édité par J. Benoist et T. Paul, Hermann, 2012.
- [4] V. Jankélévitch, “Ravel”, Solfèges, Seuil, 1970.
- [5] J. Leray, “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace”, Acta Math. 63 (1934), p. 193-248.
- [6] T. Paul, “Rigueur-contraintes : mathématique-musique”, en préparation.
- [7] T. Paul, “Le Vierge, le Vivace et le Bel aujourd’hui”, dans “Dynamique du formalisme mathématique”, édité par J. Benoist et T. Paul, Hermann, 2012.
- [8] T. Paul, “Poincaré face au négatif : une méthodologie ?”, Matapli **98** 37-52, 2012.
- [9] T. Paul, “Poincaré et la déconstruction du négatif”, à paraître dans “Les mutations de l’écriture”, Presse de la Sorbonne, 2013.