HAL
open science

Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur P_2(C)

Jean-Marc Drézet

To cite this version:

Jean-Marc Drézet. Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur P_2(C). Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1987, 380, pp.14-58. hal-00864252

HAL Id: hal-00864252

https://hal.science/hal-00864252v1

Submitted on 20 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FIBRÉS EXCEPTIONNELS ET VARIÉTÉS DE MODULES DE FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$

JEAN–MARC DRÉZET

Sommaire

1. Introduction 1
2. Préliminaires 4
3. Conditions d'existence des faisceaux stables 10
4. Modules de Kronecker 12
5. Modules de Kronecker et faisceaux semi-stables 19
6. Recherche des variétés de modules de dimension donnée 30

Références 40

1. Introduction

Soient r, c_1, c_2 des entiers, avec $r \geq 1$, $M(r, c_1, c_2)$ la variété de modules des faisceaux algébriques cohérents semi-stables sur $\mathbb{P}_2$, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, $M_s(r, c_1, c_2)$ l'ouvert de $M(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux stables. On dit que $M(r, c_1, c_2)$ est *exceptionnelle* si $M_s(r, c_1, c_2)$ est de dimension nulle. Dans ce cas $M(r, c_1, c_2)$ est réduite à un point qui est une classe d'isomorphisme de fibrés vectoriels homogènes. Les fibrés vectoriels d'une telle classe sont dits *exceptionnels*. Ils jouent un rôle fondamental dans la détermination des entiers r, c_1, c_2 tels que $M(r, c_1, c_2)$ soit non vide (cf. [5]).

Les fibrés exceptionnels ont été construits dans [3] où ils sont utilisés pour définir des suites spectrales de faisceaux dont on se servira ici pour étudier certaines variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$.

On commencera par donner une variante d'un résultat de [5]. Si E est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, de rang $r \geq 1$, de classes de Chern c_1, c_2 on pose $\mu(E) = \dfrac{c_1}{r}$, qu'on appelle la *pente* de E, et

$$\Delta(E) \;=\; \frac{1}{r}\big(c_2 - \frac{r-1}{2r}c_1^2\big) \;=\; \Delta(r, c_1, c_2)\ ,$$

qu'on appelle le *discriminant* de E.

Si F est un fibré exceptionnel, on note x_F la solution inférieure à 1 de l'équation $X^2 - 3\,\mathrm{rg}(F)X + 1 = 0$.

D'après [5], un fibré exceptionnel est défini à isomorphisme près par sa pente. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des pentes des fibrés exceptionnels. Si $\alpha \in \mathcal{E}$, soit E_α un fibré exceptionnel de pente α. Posons

$$\Delta_\alpha = \Delta(E_\alpha), \quad r_\alpha = \mathrm{rg}(E_\alpha), \quad x_\alpha = \frac{x_{E_\alpha}}{r_\alpha}, \quad I_\alpha =]\alpha - x_\alpha, \alpha + x_\alpha[\cap \mathbb{Q} \ .$$

On note P le polynôme $\frac{1}{2}(X^2 + 3X + 2)$. Alors on a

Théorème 1 : 1 – *La famille* $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{E}}$ *est une partition de* $\mathbb{Q}$.

2 – *L'application* $\delta : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *définie sur chaque intervalle* I_α, *par*

$$\delta(\mu) \ = \ P(-|\mu - \alpha|) - \Delta_\alpha$$

possède la propriété suivante : pour tous entiers r, c_1, c_2 *avec* $r \geq 1$, *la variété de modules* $M(r, c_1, c_2)$ *est de dimension positive si et seulement si on a*

$$\delta(\frac{c_1}{r}) \ \leq \ \Delta(r, c_1, c_2) \ .$$

3 – *L'application* δ *est la seule à posséder la propriété précédente.*

Si $M(r, c_1, c_2)$ est une variété de modules de dimension positive, il existe donc un fibré exceptionnel $F \simeq E_\alpha$, unique à isomorphisme près, tel que

$$\left| \frac{c_1}{r} - \alpha \right| \ < \ x_\alpha \ .$$

On dit que ce fibré exceptionnel F est *associé* à $M(r, c_1, c_2)$. On pose alors

$$h(M(r, c_1, c_2)) \ = \ r.r_\alpha \big(\Delta(r, c_1, c_2) - \delta(\frac{c_1}{r}) \big) \ .$$

C'est un entier positif ou nul, qu'on appelle la *hauteur* de $M(r, c_1, c_2)$.

On étudiera essentiellement ici les variétés de modules de hauteur nulle. Ce sont les plus simples à étudier, et il semble qu'elles aient des propriétes bien particulières.

Soit $M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de hauteur nulle. On supposera dans ce qui suit que $\alpha - x_\alpha < \frac{c_1}{r} \leq \alpha$ (le cas $\alpha < \frac{c_1}{r} < \alpha + x_\alpha$ est dual du précédent).

On distingue dans [3] des triplets particuliers de fibrés exceptionnels appelés *triades*. Il existe une telle triade, de la forme (E, G, E_α). D'après [3] il existe des entiers m, n positifs tels que tout faisceau semi-stable $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}_2$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 soit isomorphe au conoyau d'un morphisme injectif (comme morphisme de faisceaux) $E \otimes \mathbb{C}^m \to G \otimes \mathbb{C}^n$ (cf. 2.2). Posons $q = \dim(\mathrm{Hom}(E, G))$ (en fait $q = 3r_\alpha$). Alors un morphisme comme le précédent provient d'une application linéaire

$$f : \mathbb{C}^m \otimes \mathrm{Hom}(E, G)^* \longrightarrow \mathbb{C}^n \ .$$

Si H, K sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, on note $L(H, K)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications linéaires de H dans K.

Soit $N(q, m, n)$ (resp. $N_s(q, m, n)$) le quotient de l'ouvert des points semi-stables (resp. stables) de l'espace projectif $\mathbb{P}(L(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^q, \mathbb{C}^n))$ par le groupe algébrique réductif $\mathrm{SL}(m) \times \mathrm{SL}(n)$. En associant à V l'application f on prouve le

Théorème 2 : *Il existe un isomorphisme naturel* $M(r, c_1, c_2) \simeq N(3r_\alpha, m, n)$ *induisant un isomorphisme entre les ouverts de points stables.*

Ce résultat est démontré au chapitre 5. L'étude des variétés $N(q, m, n)$ est l'objet du chapitre 4. On peut alors en déduire des propriétés des variétés de modules de hauteur nulle :

a) Suites de variétés de modules de hauteur nulle isomorphes – (chapitre 5, 8-). 0n part du résultat suivant, démontré au chapitre 4 :

Théorème 3 : *Il existe un isomorphisme naturel* $N(q, m, n) \simeq N(q, n, qn - m)$ *induisant un isomorphisme entre les ouverts de points stables.*

Ceci permet, à l'aide du théorème 2, de définir une autre variété de modules de hauteur nulle $M(r', c_1', c_2')$ isomorphe à $M(r, c_1, c_2)$, telle que

$$\alpha - x_\alpha \ < \ \frac{c_1'}{r'} \ < \ \frac{c_1}{r} \ \leq \ \alpha \ .$$

Elle est indépendante du choix de (E, G) (pourvu que (E, G, E_α) soit une triade). On notera

$$M(r', c_1', c_2') \ = \wedge^+(M(r, c_1, c_2)) \ .$$

Ce procédé peut être itéré et permet de définir les variétés de modules de hauteur nulle $\wedge^{+p}(M(r, c_1, c_2))$ pour tout entier $p > 0$, toutes distinctes et isomorphes à $M(r, c_1, c_2)$. La suite des pentes des faisceaux correspondants converge vers $\alpha - x_\alpha$. On dit que la variété de modules $M(r, c_1, c_2)$ est *initiale* s'il n'existe pas de variété de modules de hauteur nulle M'' telle que $M(r, c_1, c_2) = \wedge^+(M'')$. Pour que $M(r, c_1, c_2)$ soit initiale, on verra qu'il faut et il suffit que $\alpha - \dfrac{c_1}{r} < \dfrac{1}{3r_\alpha^2}$. Dans le cas général, il existe une unique variété de modules initiale M' telle qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $M(r, c_1, c_2) = \wedge^{+p}(M')$. Des exemples de variétés de modules isomorphes obtenues par ce moyen sont donnés en Appendice.

b) Recherche des variétés de modules de dimension donnée – (chapitre 6). On s'intéresse maintenant aux variétés de modules de hauteur nulle dont les faisceaux correspondants ont une pente comprise entre -1 et 0. Si $M(r, c_1, c_2)$ est une d'entre elles, on a vu qu'il en existe une infinité qui lui sont isomorphes. Cependant on a le

Théorème 4 : *Soit d un entier positif. Il existe au plus un nombre fini de variétés de modules de hauteur nulle initiales de dimension d, et dont la pente des faisceaux correspondants est comprise entre -1 et 0.*

En ce qui concerne les variétés de modules de hauteur non nulle, on a le

Théorème 5 : *Soit d un entier positif. Il existe au plus un nombre fini de variétés de modules de hauteur non nulle de dimension d, et dont la pente des faisceaux correspondants est comprise entre -1 et 0.*

La démonstration des théorèmes 4 et 5 fournira des algorithmes permettant de trouver toutes les variétés de modules de dimension donnée. En Appendice on donne la liste de celles qui sont de dimension au plus 10.

En se servant de la détermination des variétés de modules de dimension 2 on démontrera au chapitre 6, C, le

Théorème 6 : *Soit M une variété de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$, de dimension positive, M_s l'ouvert des points stables de M. Alors, si M n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}_5$, $M\backslash M_s$ est de codimension au moins 2.*

Précisons que les démonstrations des théorèmes 4 et 5 sont purement arithmétiques. En particulier, celle du théorème 4 repose sur l'étude de la formule donnant la dimension de $N(q,m,n)$.

c) Groupe de Picard des variétés de modules de hauteur nulle – La description des variétés de modules de hauteur nulle donnée par le théorème 2 permet de prouver le

Théorème 7 : *Soit M une variété de modules de hauteur nulle, M^0 l'ouvert de ses points lisses. Alors on a* $\mathrm{Pic}(M^0) \simeq \mathbb{Z}$.

En fait, on a le même résultat en remplaçant M par $N(q,m,n)$ (proposition 23, ceci est valable pour tout $q \geq 3$). Le théorème 2 permet donc de conclure. Le théorème 7 est complèté dans [4], où on montre que toute variété de modules est localement factorielle. Donc le théorème 7 donne en fait $\mathrm{Pic}(M)$. La particularité des variétés de modules de hauteur nulle est illustrée par le fait que si M est une variété de modules de hauteur non nulle, on a $\mathrm{Pic}(M) \simeq \mathbb{Z}^2$ (cf. [4]).

Je remercie J. Le Potier pour l'aide qu'il m'a apportée dans la réalisation de ce travail.

2. Préliminaires

2.1 – Rappels et formulaire. Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. On dit que E est *semi-stable* (resp. *stable*) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau propre F de E on a $\mu(E) \geq \mu(F)$, et en cas d'égalité $\Delta(E) \leq \Delta(F)$ (resp. $<$). Cette notion de stabilité est celle de D. Gieseker [6] reprise par M. Maruyama [11].

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. Le théorème de Riemann-Roch prend la forme suivante, si $\mathrm{rg}(E) > 0$:

$$\chi(E) \;=\; \mathrm{rg}(E)(P(\mu(E)) - \Delta(E)) \;.$$

Si E, F sont des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, on pose

$$\chi(E,F) \;=\; \sum_{0\leq i\leq 2} (-1)^i \dim(\mathrm{Ext}^i(E,F)) \;.$$

On a si $\mathrm{rg}(E)\,\mathrm{rg}(F) > 0$:

$$\chi(E,F) \;=\; \mathrm{rg}(E)\,\mathrm{rg}(F)\big(P(\mu(F)-\mu(E)) - \Delta(E) - \Delta(F)\big)$$

(proposition (1.1) de [5]).

Pour $i = 0, 1, 2$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^i(E,F) \;\simeq\; \mathrm{Ext}^{2-i}(F, E(-3))^*$$

(proposition (1.2) de [5]).

2.2 – Fibrés exceptionnels (cf. [3] et [5]). Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres rationnels diadiques. On définit dans [5] une bijection croissante $\epsilon : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. Si (α, β) est un couple de nombres rationnels tel que $3 + \alpha - \beta \neq 0$, on pose

$$\alpha.\beta \;=\; \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3+\alpha-\beta} \;.$$

L'application ϵ est définie de manière unique par les relations

1 – On a $\epsilon(n) = n$ pour tout entier n.

2 – On a $\epsilon\left(\dfrac{2p+1}{2^{q+1}}\right) = \epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right).\epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^q}\right)$ pour tous entiers p, q avec $q \geq 1$.

Si α est un élément de $\mathcal{E}$, r_α est le plus petit entier $r > 0$ tel que $r\alpha$ soit entier, et

$$\Delta_\alpha \;=\; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r_\alpha^2}\right) \;.$$

Suite spectrale de Beilinson généralisée. On introduit dans [3] des triplets particuliers de fibrés exceptionnels appelés *triades*. Ce sont les triplets (E, G, F) tels que $\mu(E), \mu(G), \mu(F))$ soit de la forme $(\alpha, \alpha.\beta, \beta)$, $(\beta - 3, \alpha, \alpha.\beta)$ ou $(\alpha.\beta, \beta, \alpha + 3)$. avec $\alpha = \epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right)$, $\beta = \epsilon\left(\dfrac{p+1}{2^q}\right)$.

Si (E, G, F) est une triade, le morphisme canonique de fibrés

$$\mathrm{ev}^* : G \longrightarrow F \otimes \mathrm{Hom}(G,F)^*$$

est injectif et son conoyau est un fibré exceptionnel S. De même, le morphisme canonique de fibrés

$$\mathrm{ev} : E \otimes \mathrm{Hom}(E,G) \longrightarrow G$$

est surjectif, et son noyau est isomorphe à $S(-3)$. On a des isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(E,G) \simeq \mathrm{Hom}(S, E(3))^* \;, \quad \mathrm{Hom}(G,F) \simeq \mathrm{Hom}(F,S)^* \;,$$

d'où on déduit une résolution de la diagonale Δ de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$

$$0 \longrightarrow E \boxtimes E^*(-3) \longrightarrow G \boxtimes S^* \longrightarrow F \boxtimes F^* \xrightarrow{\;\mathrm{trace}\;} \mathcal{O}_\Delta \;.$$

Soit V un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$. On déduit de la résolution précédente une suite spectrale $E_r^{p,q}$ de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$, convergeant vers V en degré 0 et vers 0 en tout autre degré, de terme E_1

$$E_1^{p,q} \ = \ E_p \otimes H^q(V \otimes F_p) \ ,$$

avec $E_{-2} = E$, $F_{-2} = E^*(-3)$, $E_{-1} = G$, $F_{-1} = S^*$, $E_0 = F$, $F_0 = F^*$, et $E_i = F_i = 0$ si $i \neq 0, -1, -2$. On en déduit un complexe associé à V :

$$E \otimes \mathrm{Ext}^1(V, E)^* \xrightarrow{A_V} G \otimes \mathrm{Ext}^1(S, V) \xrightarrow{B_V} F \otimes \mathrm{Ext}^1(F, V),$$

(avec $A_V = d_1^{-2,1}$, $B_V = d_1^{-1,1}$). Si $\mathrm{Hom}(F, V) = \mathrm{Hom}(V, E) = 0$, la suite spectrale est dégénérée, donc le morphisme de faisceaux A_V est injectif, B_V est surjectif, et $\ker(B_V)/\operatorname{im}(A_V)$ est isomorphe à V.

0n utilisera les propriétés suivantes : les morphismes canoniques

$$S \otimes \mathrm{Hom}(S, F) \longrightarrow F \ , \quad \mathrm{Hom}(F, E(3)) \longrightarrow E(3)$$

sont surjectifs et on a les égalités

$$\chi(G, F) = 3\,\mathrm{rg}(E),\ \chi(F, G) = 0,\ \chi(E, F) = 3\,\mathrm{rg}(S),\ \chi(F, E) = 0,$$
$$\mathrm{rg}(E)^2 + \mathrm{rg}(S)^2 + \mathrm{rg}(F)^2 = 3\,\mathrm{rg}(E)\,\mathrm{rg}(S)\,\mathrm{rg}(F),\ \mathrm{rg}(G) + \mathrm{rg}(S) = 3\,\mathrm{rg}(E)\,\mathrm{rg}(F),$$
$$\dim(\mathrm{Hom}(E, G)) = 3\,\mathrm{rg}(F),\ \dim(\mathrm{Hom}(E, F)) = 3\,\mathrm{rg}(S),\ \dim(\mathrm{Hom}(G, F)) = 3\,\mathrm{rg}(E).$$

Stabilité. Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$, avec $\alpha < \beta$. Alors, pour tout point x de $\mathbb{P}_2$, le morphisme canonique

$$\mathrm{ev}_x : E_{\alpha,x} \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta) \longrightarrow E_{\beta,x}$$

possède la propriété suivante : si H est un sous-espace vectoriel de $E_{\alpha,x}$ et si $K = \mathrm{ev}_x(H \otimes \mathrm{Hom}(E_\alpha, E_\beta))$, on a

$$\frac{\dim(H)}{r_\alpha} \ \leq \ \frac{\dim(K)}{r_\beta} \ ,$$

l'inégalité étant stricte si H est propre. On verra dans le chapitre 4 que cela signifie que ev_x est stable sous l'action de $\mathrm{SL}(E_{\alpha,x}) \times \mathrm{SL}(E_{\beta_x})$ (cf. 2.4).

2.3 – Complexes. Soit

$$K^\bullet : \cdots \longrightarrow K^i \longrightarrow K^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

un complexe fini de morphismes de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}_2$. On définit comme dans [5] :

$$\mathrm{rg}(K^\bullet) = \sum_i (-1)^i \,\mathrm{rg}(K^i), \quad c_1(K^\bullet) = \sum_i (-1)^i c_1(K_i), \quad \chi(K^\bullet) = \sum_i (-1)^i \chi(K^i),$$

et $\mu(K^\bullet) = \dfrac{c_1(K^\bullet)}{\mathrm{rg}(K^\bullet)}$ si $\mathrm{rg}(K^\bullet) \neq 0$.

Si $K'^\bullet$ est un autre complexe fini, on pose $c_1(K^\bullet, K'^\bullet) = c_1(\mathrm{Hom}^\bullet(K^\bullet, K'^\bullet))$. Si V est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$, on notera aussi V le complexe égal à V en degré 0 et à 0 en tous les autres degrés.

On s'intéresse à des complexes particuliers, du type

$$K^\bullet : 0 \longrightarrow E \otimes \mathbb{C}^m \longrightarrow G \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow F \otimes \mathbb{C}^p \longrightarrow 0 \ ,$$

(E, G, F) étant une triade (le terme $G \otimes \mathbb{C}^n$ étant en degré 0). Soit S le fibré exceptionnel conoyau du morphisme canonique $\mathrm{ev}^* : G \to F \otimes \mathrm{Hom}(G, F)^*$. On a alors le

Lemme 8 : *On a* $c_1(F, K^\bullet) = \mathrm{rg}(S)m - \mathrm{rg}(E)n$, $c_1(E, K^\bullet) = \mathrm{rg}(F)n - \mathrm{rg}(S)p$, *et* $c_1(G, K^\bullet) = \mathrm{rg}(F)m - \mathrm{rg}(E)p$.

Démonstration. Puisque $c_1(F \otimes F^*) = c_1(E \otimes E^*) = c_1(G \otimes G^*) = 0$, il suffit de prouver les égalités $c_1(F, G) = -\mathrm{rg}(E)$, $c_1(G, E) = -\mathrm{rg}(F)$, $c_1(F, E) = -\mathrm{rg}(S)$. Démontrons la première. On a $\chi(F, G) = 0$ d'après 2-, donc d'après 1-, on a $\chi(G, F) = -3c_1(F, G)$. Il suffit donc d'utiliser le fait que d'après 2- on a $\chi(G, F) = 3\,\mathrm{rg}(E)$. Les démonstrations des deux autres égalités sont analogues. Ceci démontre le lemme 8. □

Lemme 9 : *Soient m, n des entiers positifs, et*

$$K^\bullet : \; E \otimes \mathbb{C}^m \xrightarrow{A} G \otimes \mathbb{C}^n$$

un complexe de rang $r > 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \qquad x_F < \frac{m}{n} \leq \frac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)} \ ,$$

$$(2) \quad \mu(F) - \frac{x_F}{\mathrm{rg}(F)} < \mu(K^\bullet) \leq \mu(F) \ .$$

Démonstration. On a d'après le lemme 8, $\mu(F) - \mu(K^\bullet) = \dfrac{\mathrm{rg}(E)n - \mathrm{rg}(S)m}{\mathrm{rg}(F)r}$, donc $\mu(K^\bullet) \leq \mu(F)$ équivaut à $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)}$.

L'inégalité $\mu(F) - \mu(K^\bullet) < \dfrac{x_F}{\mathrm{rg}(F)}$ équivaut à $\dfrac{\mathrm{rg}(E)n - \mathrm{rg}(S)m}{\mathrm{rg}(G)n - \mathrm{rg}(E)m} < x_F$, c'est à dire $\dfrac{m}{n}(\mathrm{rg}(E)x_F - \mathrm{rg}(S)) < \mathrm{rg}(G)x_F - \mathrm{rg}(E)$. On a $x_F < \dfrac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)}$, car

$$\left(\frac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)}\right)^2 - 3\,\mathrm{rg}(F)\frac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)} + 1 = -\left(\frac{\mathrm{rg}(F)}{\mathrm{rg}(S)}\right)^2 < 0 \ ,$$

d'après 2-. Il en découle que $\mu(F) - \mu(K^\bullet) < \dfrac{x_F}{\mathrm{rg}(F)}$ équivaut à $\dfrac{m}{n} > \dfrac{\mathrm{rg}(E) - \mathrm{rg}(G)x_F}{\mathrm{rg}(S) - \mathrm{rg}(E)x_F}$, car $\mathrm{rg}(G) + \mathrm{rg}(S) = 3\,\mathrm{rg}(E)\,\mathrm{rg}(F)$ d'après 2-. Ceci achève la démonstration du lemme 9. □

Lemme 10 : *Soient*

$$K^\bullet : \; 0 \longrightarrow E \otimes \mathbb{C}^m \xrightarrow{A} G \otimes \mathbb{C}^n \xrightarrow{B} F \otimes \mathbb{C}^p \longrightarrow 0 \ ,$$

$$K'^\bullet : \; 0 \longrightarrow E \otimes \mathbb{C}^{m'} \xrightarrow{A'} G \otimes \mathbb{C}^{n'} \xrightarrow{B'} F \otimes \mathbb{C}^{p'} \longrightarrow 0 \ ,$$

des complexes, les morphismes de faisceaux A, A' étant injectifs, B, B' surjectifs, et soient $V = \ker(B)/\operatorname{im}(A)$, $V' = \ker(B')/\operatorname{im}(A')$. Alors on a des isomorphismes canoniques

$$H^q(\mathrm{Hom}^\bullet(K^\bullet, K'^\bullet)) \simeq \mathrm{Ext}^q(V, V') \ .$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 23 de [10]. On considère la suite spectrale de terme E_2

$$E_2^{p,q} = H^p(H^q(\mathbb{P}_2, \mathcal{H}om^\bullet(K^\bullet, K'^\bullet))) \ ,$$

d'aboutissement $H^{p+q}(V, V'))$. On a $E_2^{p,q} = 0$ pour $q \neq 0$: ceci découle du fait que d'après [3] et [5] on a $\mathrm{Ext}^i(C, C') = 0$ pour $i > 0$, chaque fois que C est l'un des fibrés E, G, F, ainsi que C'. La suite spectrale dégénère donc et donne le lemme 10. □

2.4 – Géométrie invariante. (cf. Mumford-Fogarty [12], Newstead [13]).

Soit X une vaxiété algébrique sur laquelle opère un groupe algébrique réductif G. Un *bon quotient* de X par G est un morphisme de variétés algébriques $\pi : X \to M$ tel que

1) π est surjectif et affine.
2) Si U est un ouvert affine de M, on a $\mathcal{O}_M(U)) = \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$, $\mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$ désignant l'espace des sections G-invariantes de $\mathcal{O}_X$ sur $\pi^{-1}(U)$.
3) Si W_1, W_2 sont des fermés disjoints G-invariants de X, $\pi(W_1)$ et $\pi(W_2)$ sont des fermés disjoints de M.

Le morphisme π possède alors la propriété universelle suivante : si $\phi : X \to Y$ est un morphisme G-invariant de variétés algébriques, il existe un unique morphisme $\phi' : M \to Y$ tel que $\phi = \phi' \circ \pi$. On en déduit l'unicité de M et π à isomorphisme près. Notation : $M = X/\!\!/G$.

Si X est intègre (resp. normale); M l'est aussi. On dit que π est un *quotient géométrique* si ses fibres sont les orbites de X, et si la dimension de ces orbites est celle de G.

On appelle *linéarisation* de l'action de G sur X la donnée d'une immersion fermée $X \to \mathbb{P}_n$, et d'une action de G sur $\mathbb{P}_n$ définie par une representation $G \to \mathrm{GL}(n+1)$ induisant l'action de G sur X.

On suppose dans tout ce ce qui suit que l'action de G sur X est linéarisée et on pose $L_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)_{|X}$. On dit qu'un point x de X est, relativement à cette linéarisation, *semi-stable* s'il existe un entier $p > 0$ et une section G-invariante u de L_0^p, telle que $u(x) \neq 0$. Le point x est dit *stable* si de plus on a $\dim(Gx) = \dim(G)$, s'il existe une section u comme précédemment et qu'en plus l'action de G sur l'ouvert X_u des points où u ne s'annule pas soit fermée (c'est à dire que les orbites des points fermés de X soient fermées dans X_u). Soit X^{ss} (resp. X^s) l'ensemble des points semi-stables (resp. stables) de X. Ce sont des ouverts de X, qui peuvent être vides. On a alors le

Théorème 11 : a) *Il existe un bon quotient $f : X^{ss} \to M$, et M est une variété projective.*

b) *L'ensemble $f(X^s) = M_s$ est un ouvert de M, et la restriction de $f : X^s \to M_s$ est un quotient géométrique.*

c) *Si x_1, x_2 sont des points fermés de X^{ss}, on a $f(x_1) = f(x_2)$ si et seulement si*

$$\overline{Gx_1} \cap \overline{Gx_2} \cap X^{ss} \neq \emptyset.$$

Si x est un point fermé de X^{ss}, x est stable si et seulement si $\dim(Gx) = \dim(G)$ et si Gx est fermé dans X^{ss}.

Nous utiliserons un critère numérique pour déterminer X^{ss} et X^s dans les cas concrets. On appelle *sous-groupe à un paramètre* de G un morphisme de groupes non trivial $c : \mathbb{C}^* \to G$. On peut montrer qu'il existe une base $(e_0, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ et des entiers $r_0, \ldots, r_n$ tels que $r_0 \leq \cdots \leq r_n$, et que pour tout t dans $\mathbb{C}^*$ on ait $c(t)(e_i) = t^{r_i} e_i$ pour $0 \leq i \leq n$.

Soient x un point de X et $x_0, \ldots, x_n$ les composantes dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$ d'un point $\widehat{x}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ au dessus de x. On pose

$$\mu(x, c) \ = \ \mathrm{Max}(\{-r_i ; x_i \neq 0\}) \ .$$

C'est aussi le plus petit entier μ tel que le morphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ t &\longmapsto t^{\mu} c(t) \widehat{x} \end{aligned}$$

soit prolongeable en un morphisme $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^{n+1}$. On a alors le

Théorème 12 : *Un point x de X est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre c de G on a $\mu(x, c) \geq 0$ (resp. > 0).*

2.5 – Groupe de Picard d'un quotient. Le résultat suivant provient de [9] (prop. 4) :

Proposition 13 : *Soit G un groupe algébrique réductif connexe opérant librement sur une variété algébrique lisse irréductible X. On suppose qu'il existe un quotient géométrique $\pi : X \to M$. Alors on a une suite exacte de groupes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^*(M) \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}^*(X) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X)) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Pic}(M) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}(X).$$

Le groupe $\mathrm{Mor}(G, \mathcal{O}^*(X))$ est celui des *morphismes croisés*, c'est à dire des morphismes $\chi : G \times X \to \mathbb{C}^*$ tels qu'on ait, pour tous $g, g' \in G$, $x \in X$, $\chi(gg', x) = \chi(g, g'x)\chi(g', x)$. Le morphisme ϕ associe à la fonction régulière inversible f le morphisme croisé défini par $\phi(f)(g, x) = \dfrac{f(gx)}{f(x)}$. D'un morphisme croisé χ on déduit un G-fibré en droites L sur X, dont le fibré en droites sous-jacent est le fibré trivial, l'action de G étant

$$\begin{aligned} G \times (X \times \mathbb{C}) &\longrightarrow X \times \mathbb{C} \\ (g, (x, t)) &\longmapsto (gx, \chi(g, x)t). \end{aligned}$$

Il existe alors un quotient géométrique L/G, qui est un fibré en droites algébrique sur M. C'est $\psi(x)$.

Soit λ un caractère de G. 0n peut le voir comme un morphisme croisé $\chi(g,x)=\lambda(g))$. Donc le groupe $\mathrm{Char}(G)$ des caractères de G est un sous-groupe de $\mathrm{Mor}(G,\mathcal{O}^*(X))$.

Proposition 14 : *On suppose que toute fonction régulière inversible sur G est le produit d'une constante par un caractère. Alors on a* $\mathrm{Mor}(G,\mathcal{O}^*(X))=\mathrm{Char}(G)$.

Démonstration. Soit χ un morphisme croisé. Alors pour tout point x de X il existe un caractère λ_x de G et un scalaire a_x tels que $\chi(g,x)=a_x\lambda_x(g)$ pour tout $g\in G$. On a, pour tous $g,g'\in G$ et $x\in X$

$$a_x\lambda_x(gg')=\chi(gg',x)=\chi(g,g'x)\chi(g',x)=a_{g'x}\lambda_{g'x}(g)a_x\lambda_x(g')\ ,$$

d'où on déduit $\lambda_x(g)=a_{g'x}\lambda_{g'x}(g)$. En faisant $g=e$ (l'élément neutre de G), on voit que $a_{g'x}=1$, donc $a_x=1$ pour tout $x\in X$. Maintenant remarquons que $\mathrm{Char}(G)$ est au plus dénombrable (prop. 10.7 de [2]), donc pour tout $g\in G$ la fonction régulière sur X, $x\mapsto\chi(g,x)=\lambda_x(g)$, prend au plus une quantité dénombrable de valeurs, donc est constante. Donc λ_x est indépendant de x, ce qui démontre la proposition 14. □

3. Conditions d'existence des faisceaux stables

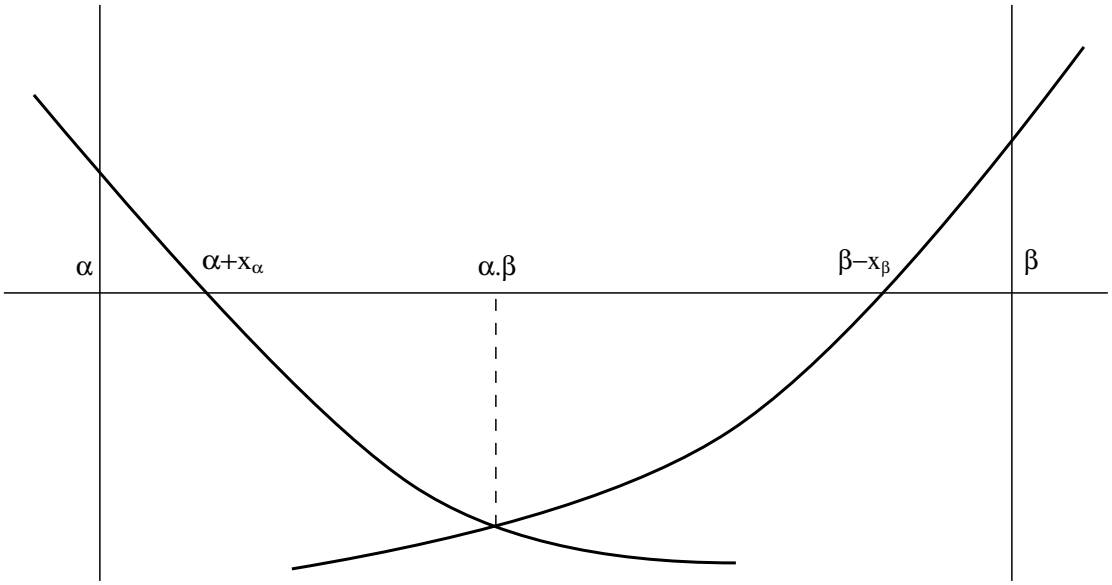
On démontre ici le théorème 1. Soit μ un nombre rationnel. ll faut d'abord trouver un γ dans $\mathcal{E}$ tel que $\mu\in]\gamma-x_\gamma,\gamma+x_\gamma[$. Soit r le dénominateur de μ, c'est à dire le plus petit entier $n>0$ tel que $n\mu$ soit entier. D'après [5], il existe des éléments α,β de $\mathcal{E}$ tels que $\alpha\le\mu\le\beta$, $r_\alpha\le r$, $r_\beta\le r$, et que $]\alpha,\beta[$ ne contienne aucun $\lambda\in\mathcal{E}$ tel que $r_\lambda\le r$. D'après le lemme (5.7) de [5] il existe des entiers p,q avec $q\ge 0$, tels que $\alpha=\epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)$, $\beta=\epsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right)$. On a $\alpha.\beta\neq\mu$ et $r_{\alpha.\beta}>r$, donc

$$|\mu-\alpha.\beta|\ \ge\ \frac{1}{rr_{\alpha.\beta}}\ \ge\ \frac{1}{r^2_{\alpha.\beta}}\ .$$

On a $\alpha<\alpha.\beta<\beta$, donc il suffit de prouver que

$$(*)\quad \alpha.\beta-\frac{1}{r^2_{\alpha.\beta}}\ <\ \alpha+x_\alpha,\quad \beta-x_\beta<\alpha.\beta+\frac{1}{r^2_{\alpha.\beta}}\ .$$

On prendra alors $\gamma=\alpha$ si $\mu<\alpha.\beta$ et $\gamma=\beta$ si $\mu>\alpha.\beta$. Les équations $P(\alpha-X)=\Delta_\alpha+\frac{1}{2}$ et $P(X-\beta)=\Delta_\beta+\frac{1}{2}$ ont chacune une solution, respectivement t',t'', avec $\alpha\le t'\le\alpha.\beta$, $\alpha.\beta\le t''\le\beta$. On a en fait $t'=\alpha+x_\alpha$, $t''=\beta-x_\beta$ (cf. figure ci-dessous, où on a représenté les deux courbes d'équations $P(\alpha-X)=\Delta_\alpha+\frac{1}{2}$ et $P(X-\beta)=\Delta_\beta+\frac{1}{2}$).



D'après la démonstration de la proposition (5.4) de [5], on a

$$|\alpha.\beta - t'| \ < \ \frac{1}{2r^2_{\alpha.\beta}} \quad \text{et} \quad |t'' - \alpha.\beta| \ < \ \frac{1}{2r^2_{\alpha.\beta}} \ ,$$

inégalités d'où on déduit (*).

Il faut maintenant montrer que les intervalles I_α sont deux à deux disjoints. Soient $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{E}$, avec $\alpha_0 < \beta_0$. On peut écrire $\alpha_0 = \epsilon\left(\frac{p}{2^q}\right)$, $\beta_0 = \epsilon\left(\frac{p+k}{2^q}\right)$, avec p, q, k entiers, $q \leq 0$, $k > 0$. On a, si $\lambda = \epsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)$, $\chi(E_\lambda, E_{\alpha_0}) = 0$ d'après 2.2, donc le point de coordonnées $(\lambda, \Delta_\lambda)$ se trouve sur la parabole d'équation $P(\alpha_0 - X) - \Delta_{\alpha_0} = Y$, et comme $\Delta_\lambda < \frac{1}{2}$, on a $\lambda > \alpha_0 + x_{\alpha_0}$. De même, si $\nu = \epsilon\left(\frac{2p+2k-1}{2^{q+1}}\right)$, on a $\nu < \beta_0 - x_{\beta_0}$. Donc, puisque $\lambda \leq \nu$, on a $\alpha_0 + x_{\alpha_0} < \beta_0 - x_{\beta_0}$, ce qui prouve que I_{α_0} et I_{β_0} sont disjoints. Ceci démontre la première partie du théorème 1.

Prouvons maintenant la seconde partie du théorème 1, c'est à dire que si r, c_1, c_2 sont des entiers, avec $r \geq 1$, et si $\mu = \frac{c_1}{r} \in I_\alpha$, la variété de modules $M(r, c_1, c_2)$ est de dimension positive si et seulement si

$$(**) \quad \Delta(r, c_1, c_2) \ \geq \ P(-|\mu - \alpha|) - \Delta_\alpha \ .$$

D'après le théorème C de [5], $M(r, c_1, c_2)$ est de dimension positive si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

$$(C) \qquad \text{pour tout } \beta \in \mathcal{E} \text{ tel que } |\mu - \beta| \leq 1 \text{ on a } \quad \Delta(r, c_1, c_2) \geq P(-|\mu - \beta|) - \Delta_\beta \ .$$

Puisque $x_\alpha < 1$, il est clair d'après (C) que si $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$, l'inégalité $(**)$ est vérifiée. Réciproquement, supposons que $(**)$ soit vraie. ll faut montrer que (C) est satisfaite. L'inégalité $(**)$ implique $\Delta(r, c_1, c_2) > \frac{1}{2}$. Il suffit donc de prouver que si β est un élément de $\mathcal{E}$ distinct

de α tel que $|\mu-\beta|\leq 1$, on a $P(-|\mu-\beta|)-\Delta_\beta<\frac{1}{2}$. Cela découle du fait que le lieu des $x\in]\mu-1,\mu+1[$ tels que $P(-|x-\beta|)-\Delta_\beta\geq\frac{1}{2}$ est précisément $I_\beta\cap]\mu-1,\mu+1[$, qui ne rencontre pas I_α.

Démontrons maintenant la troisième partie du théorème 1. Soit $\delta':\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ une autre fonction possédant la même propriété que δ, c'est à dire que si r,c_1,c_2 sont des entiers, avec $r\geq 1$, la variété $M(r,c_1,c_2)$ est de dimension positive si et seulement si $\Delta(r,c_1,c_2)\geq\delta'(\frac{c_1}{r})$. Soient $\mu\in\mathbb{Q}$, et $r>0$ un entier tel que $r\mu$ soit entier. Il existe un entier c_2 tel que, si $c_1=r\mu$, on ait $\dim(M(r,c_1,c_2))>0$, tandis que $M(r,c_1,c_2-1)$ soit vide ou fini. Alors les nombres $\delta(\mu)$ et $\delta'(\mu)$ sont compris entre $\Delta(r,c_1,c_2-1)$ et $\Delta(r,c_1,c_2)$. Donc

$$|\delta(\mu)-\delta'(\mu)|\ \leq\Delta(r,c_1,c_2)-\Delta(r,c_1,c_2-1)=\frac{1}{r}\ ,$$

et comme r peut être choisi arbitrairement grand, on a $\delta(\mu)=\delta'(\mu)$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

4. Modules de Kronecker

4.1 – Modules de Kronecker semi-stables. Soient H_0,L,H_1 des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, avec $\dim(L)\geq 3$. Soit $W=L(H_0\otimes L,H_1)$, sur lequel agit le groupe algébrique réductif $G_0=(\mathrm{GL}(H_0)\times\mathrm{GL}(H_1))/\mathbb{C}^*$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} G_0\times W & \longrightarrow & W \\ ((g_1,g_2),f) & \longmapsto & g_2\circ f\circ g_1^{-1}. \end{array}$$

On déduit de ce qui précède une action de $\mathrm{SL}(H_0)\times\mathrm{SL}(H_1)$ sur $\mathbb{P}(W)$, munie d'une linéarisation évidente. Suivant Hulek ([8]) les éléments de W seront appelés *L-modules de Kronecker*, ou s'il n'y a pas d'ambiguité, modules de Kronecker. Un module de Kronecker non nul sera dit *semi-stable* (resp. *stable*) si son image dans $\mathbb{P}(W)$ l'est (cf. 2.4). Soit W^{ss} (resp. W^s) l'ouvert de W constitué des modules de Kronecker semi-stables (resp. stables).

Proposition 15 : *Soit $\tau:H_0\otimes L\to H_1$ un module de Kronecker non nul. Alors τ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tous sous-espaces vectoriels H_0',H_1' de H_0,H_1 respectivement, tels que $H_0'\neq\{0\}$, $H_1'\neq H_1$, et $\tau(H_0'\otimes L)\subset H_1'$, on a*

$$\frac{\dim(H_1')}{\dim(H_0')}\ \geq\ \frac{\dim(H_1)}{\dim(H_0)}\quad(\text{resp.}>)\ .$$

(cf. proposition 3.2.3 de [8]).

Démonstration. Posons $m=\dim(H_0)$, $n=\dim(H_1)$. On supposera que $m<n$ (le cas $m>n$ étant analogue et le cas $m=n$ ayant été traité par Hulek). Un sous-groupe à un paramètre c de $SL(H_0)\times\mathrm{SL}(H_1)$ est constitué de deux morphismes de groupes $c_i:\mathbb{C}^*\to\mathrm{SL}(H_i)$, $i=0,1$,

dont un au moins est non trivial. Relativement à des bases convenables de H_0, H_1 on peut écrire

$$c_1(t) \;=\; \begin{pmatrix} t^{-r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t^{-r_2} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & t^{-r_m} \end{pmatrix} \;,\quad c_2(t) \;=\; \begin{pmatrix} t^{s_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t^{s_2} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & t^{s_n} \end{pmatrix} \;,$$

les r_i, s_j étant des entiers tels que

$$r_1 \leq \cdots \leq r_m \;,\quad s_1 \leq \cdots \leq s_n \;,\quad r_1 + \cdots + r_m = s_1 + \cdots + s_n = 0 \;.$$

On peut voir τ comme un matrice (ϕ_{ij}) d'éléments de L^*. On a alors

$$\mu(c, \mathbb{C}\tau) \;=\; \max(\{-r_i - s_j ; \phi_{ij} \neq 0\}) \;.$$

Supposons que $\mu(c, \mathbb{C}\tau) < 0$ (resp. ≤ 0). Alors on a

$$r_i + s_j \leq 0 \text{ (resp. } < 0) \implies \phi_{ij} = 0 \;.$$

Il faut montrer qu'il existe des entiers i_0, j_0 tels que $1 \leq i_0 \leq m$, $1 \leq j_0 \leq n$, $ni_0 > m(n - j_0)$ (resp. $\geq$) et $r_{i_0} + s_{j_0} \leq 0$ (resp. $<$). Le cas ou tous les s_j sont nuls étant trivial, on supposera que ce n'est pas le cas. Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x. Alors on a

$$ni > m(n-j) \iff j > \left[\frac{n}{m}(m-i)\right] \quad (\text{resp. } ni \geq m(n-j) \iff -j \leq \left[-\frac{n}{m}(m-i)\right]) \;.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{i=1}^{m} (r_i + s_{\left[\frac{n}{m}(m-i)\right]+1}) \;\leq\; 0 \quad (\text{resp. } \sum_{i=1}^{m} (r_i + s_{-\left[-\frac{n}{m}(m-i)\right]}) \;<\; 0) \;.$$

Puisque la somme des r_i est nulle, il suffit de prouver que

$$\sum_{i=1}^{m} s_{\left[\frac{n}{m}(m-i)\right]+1} \;\leq\; 0 \quad (\text{resp. } \sum_{i=1}^{m} s_{-\left[-\frac{n}{m}(m-i)\right]} \;<\; 0) \;.$$

La suite (s_j) est une combinaison linéaire à coefficients rationnels positifs de suites (s'_j) de la forme

$$s'_j = -s \;\text{ si }\; j \leq n - s \;,\quad s'_j = n - s \;\text{ si }\; j > n - s \;,$$

s étant un entier tel que $0 < s < n$. Il suffit donc de prouver les inégalités précédentes avec (s'_j) à la place de (s_j). On a

$$\left[\frac{n}{m}(m-i)\right] + 1 \leq n - s \iff i > \left[\frac{m}{n}s\right]$$

$$\left(\text{resp. } -\left[-\frac{n}{m}(m-i)\right] \geq n - s + 1 \iff i < -\left[-\frac{m}{n}s\right]\right) \;.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} s'_{\left[\frac{n}{m}(m-i)\right]+1} \;&=\; -s\left(m - \left[\frac{m}{n}s\right]\right) + (n-s)\left[\frac{m}{n}s\right] \\ &=\; n(\left[\frac{m}{n}s\right] - \frac{m}{n}s) \;\leq 0 \;, \end{aligned}$$

$$\left(\text{resp. } \sum_{i=1}^{m} s_{-\left[-\frac{n}{m}(m-i)\right]} \;=\; n\left(-\frac{m}{n}s - \left[-\frac{m}{n}s\right]\right) - 1 \;<\; 0\right) \;.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe des sous-espaces vectoriels H'_0, H'_1 de H_0, H_1 respectivement, tels que $H'_0 \neq \{0\}$, $\tau(H'_0 \otimes L) \subset H'_1$ et $\dim(H'_0)n - \dim(H'_1)m > 0$ (resp. ≥ 0). Soient $(e_1, \ldots, e_m)$ une base de H_0, $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de H_1, telles que si $m' = \dim(H'_0)$, $n' = \dim(H'_1)$, $(e_1, \ldots, e_{m'})$ (resp. $(f_1, \ldots, f_{n'})$) soit une base de H'_0 (resp. H'_1). Soit c le sous-groupe à un paramètre de G, défini dans les bases (e_i), (f_j) par les suites

$$\begin{aligned} r_i &= -n(m-m') \quad \text{si} \quad i \leq m' \ , \\ &= nm' \quad \text{si} \quad i > m' \ , \\ s_j &= -mn' \quad \text{si} \quad j \leq n-n' \ , \\ &= m(n-n') \quad \text{si} \quad j > n-n' \ . \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} r_i + s_j &= m'n - mn' \quad \text{si} \quad i > m', j \leq n-n' \quad \text{ou} \quad i \leq m', j > n-n' \ , \\ &= -mn + m'n - mn' \quad \text{si} \quad i \leq m', j \leq n-n' \ , \\ &= mn - mn' + m'n \quad \text{si} \quad i > m', j > n-n' \ . \end{aligned}$$

On a $\phi_{ij} = 0$ si $i \leq m'$, $j \leq n-n'$, et comme $m'n - mn' > 0$ (resp. ≥ 0) on a $r_i + s_j > 0$ (resp. ≥ 0) si $\phi_{ij} \neq 0$. Donc $\mu(c, \mathbb{C}\tau) < 0$ (resp. ≤ 0). Ceci achève la démonstration de la proposition 15. □

On pose $N(L, H_0, H_1) = W^{ss}/\!\!/G_0$, $N_s(L, H_0, H_1) = W^s/G_0$, qui est un ouvert de $N(L, H_0, H_1)$. En fait ces quotients ne dépendent à isomorphisme près que des dimensions de L, H_0, H_1. Si $m = \dim(H_0)$, $n = \dim(H_1)$, $q = \dim(L)$, on notera plus simplement
$N(q, m, n) = N(L, H_0, H_1)$, $N_s(q, m, n) = N_s(L, H_0, H_1)$.

On appelle *morphisme* d'un module de Kronecker $t : H_0 \otimes L \to H_1$ dans un autre $t' : H'_0 \otimes L \to H'_1$ un couple (f_0, f_1) d'applications linéaires, $f_0 : H_0 \to H'_0$, $f_1 : H_1 \to H'_1$, tel que $f_1 \circ t = t' \circ (f_0 \otimes I_L)$. On dit que (f_0, f_1) est un *isomorphisme* si f_0 et f_1 sont bijectives.

On appelle *sous-module de Kronecker* de t un module de Kronecker $t" : H''_0 \otimes L \to H''_1$, H''_0 (resp. H''_1) étant un sous-espace vectoriel de H_0 (resp. H_1) tel que $t(H''_0 \otimes L) \subset H''_1$, t'' étant la restriction de t. On définit de même un *module de Kronecker quotient* de t. Le *noyau* (resp. *conoyau*) de (f_0, f_1) est le sous-module de Kronecker (resp. module de Kronecker quotient) de t, $\ker(f_0) \otimes L \to \ker(f_1)$ (resp. $\operatorname{coker}(f_0) \otimes L \to \operatorname{coker}(f_1)$).

Soit μ un nombre rationnel positif. Avec les notions précédentes, il est immédiat que les modules de Kronecker semi-stables $H_0 \otimes L \to H_1$, L étant fixe, H_0, H_1 variables mais astreints à la condition $\dim(H_0) = \mu \dim(H_1)$, constituent une catégorie abélienne artinienne et noetherienne notée $C_{L,\mu}$. On peut donc définir pour tout module de Kronecker semi-stable t le gradué de t, noté $\mathrm{Gr}(t)$, qui est la classe d'isomorphisme d'une somme directe de modules de Kronecker stables. Soient $\pi : W^{ss} \to N(L, H_0, H_1)$ le morphisme quotient, t un point de W^{ss}. Alors $\pi^{-1}(\pi(t))$ est constitué des modules de Kronecker semi-stables $H_0 \otimes L \to H_1$ ayant le même gradué que t.

4.2 – Périodicité. Soit $t : H_0 \otimes L \to H_1$ un module de Kronecker non nul. On suppose que H_0 et H_1 sont non nuls et que

$$\frac{1}{\dim(L)} < \frac{\dim(H_0)}{\dim(H_1)} < \dim(L) .$$

Lemme 16 : *Si t est semi-stable, l'application t est surjective.*

Démonstration. Soit H_1' l'image de t, supposée distincte de H_1. Alors on a $t(H_0 \otimes L) \subset H_1'$ et

$$\frac{\dim(H_1')}{\dim(H_0)} < \frac{\dim(H_1)}{\dim(H_0)} ,$$

ce qui contredit la semi-stabilité de t d'après la proposition 15. Ceci démontre le lemme 16. □

On note $A(t)$ le L^*-module de Kronecker $\ker(t) \otimes L^* \to H_0$ restriction de l'application canonique $(H_0 \otimes L) \otimes L^* \to H_0$.

Si $t' : H_0' \otimes L \to H_1'$ est un sous-module de Kronecker de t, on pose

$$m(t', t) = \dim(H_1')\dim(H_0) - \dim(H_0')\dim(H_1)$$

Alors t est semi-stable (resp. stable) si et seulement si, pour tout sous-module de Kronecker $t' : H_0' \otimes L \to H_1'$ de t, avec $H_0' \neq \{0\}$, $H_1' \neq H_1$, on a $m(t', t) \geq 0$ (resp. > 0).

Proposition 17 : *Soit $t : H_0 \otimes L \to H_1$ un module de Kronecker surjectif. Alors $A(t)$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si t l'est.*

Démonstration. Soient $t' : H_0' \otimes L \to H_1'$ un sous-module de Kronecker de t, et $K = \ker(t) \cap (H_0' \otimes L)$. Alors on a $A(t)(K \otimes L^*) \subset H_0'$. Soit $t_0 : K \otimes L^* \to H_0'$ la restriction de $A(t)$. On a $\dim(K) \geq \dim(H_0')\dim(L) - \dim(H_1')$, donc

$$\begin{aligned} m(t_0, A(t)) &= \dim(H_0')\dim(\ker(t)) - \dim(K)\dim(H_0) \\ &\leq \dim(H_1')\dim(H_0) - \dim(H_1)\dim(H_0') = m(t', t). \end{aligned}$$

Supposons t non semi-stable (resp. non stable). Alors on peut choisir t' de telle sorte que $m(t', t) < 0$ (resp. ≤ 0), et $H_1' \neq H_1$. On a $H_0' \neq H_0$, car sinon $H_1' = H_1$, t étant surjectif. Donc $A(t)$ n'est pas semi-stable (resp. stable).

Réciproquement, soit $t_0 : K_0 \otimes L^* \to H_0''$ un sous-module de Kronecker de A(t). On pose $H_1'' = t(H_0'' \otimes L)$. Alors on a $\dim(H_1'') \leq \dim(L)\dim(H_0'') - \dim(K_0)$, car $K_0 \subset \ker(t)$. Soit $t'' : H_0'' \otimes L \to H_1''$ la restriction de t. Alors on a

$$\begin{aligned} m(t'', t) &= \dim(H_1'')\dim(H_0) - \dim(H_0'')\dim(H_1) \\ &\leq \dim(H_0'')\dim(\ker(t)) - \dim(H_0)\dim(K_0) = m(t_0, A(t)). \end{aligned}$$

On en déduit comme précédemment que si $A(t)$ n'est pas semi-stable (resp. stable), t ne l'est pas. Ceci achève la démonstration de la proposition 17. □

Soit $t : H_0 \otimes L \to H_1$ un module de Kronecker, et $\bar{t} : H_0 \to L^* \otimes H_1$ l'application linéaire déduite de t.

Lemme 18 : *Si t est semi-stable, l'application $\bar{t}$ est injective.*

(La démonstration est analogue à celle du lemme 16).

On note $B(t)$ le L^*-module de Kronecker $H_1 \otimes L^* \to \mathrm{coker}(\bar{t})$ (l'application quotient).

Lemme 19 : a) *Soit t un module de Kronecker surjectif. Alors l'application $A(t)$ est injective, et $B(A(t))$ est isomorphe à t.*

b) *Soit t un module de Kronecker tel que $\bar{t}$ soit injective. Alors $B(t)$ est surjectif, et $A(B(t))$ est isomorphe à t.*

Démonstration. On ne démontrera que a), b) étant analogue. L'application $\overline{A(t)}$ n'est autre que l'inclusion $\ker(t) \to H_0 \otimes L$, et l'isomorphisme $\mathrm{coker}(\overline{A(t)}) \simeq H_1$ découlant de la surjectivité de t identifie $B(A(t))$ et t. Ceci démontre le lemme 19. □

On en déduit avec la proposition 17 la

Proposition 20 : *Soit t un module de Kronecker tel que $\bar{t}$ soit infective. Alors $B(t)$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si t l'est.*

Sur W^{ss} existe un *module de Kronecker universel* : c'est le morphisme de fibrés vectoriels sur W^{ss}

$$T : \mathcal{O} \otimes H_0 \otimes L \longrightarrow \mathcal{O} \otimes H_1$$

qui, en tout point t de W^{ss} est egal à t. Ce morphisme est surjectif d'après le lemme 16. Son noyau E_0 est un fibré vectoriel sur W^{ss}. Soit K un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tel que $\dim(K) = \mathrm{rg}(E_0)$. Soit t un point de W^{ss}. Il existe un voisinage U de t, et une trivialisation $\Phi : \mathcal{O}_U \otimes K \simeq E_0 | U$. On définit un morphisme

$$F_\Phi : U \longrightarrow N(L^*, K, H_0)$$

en associant au point t de U le module de Kronecker $A(t) \circ (\Phi_t \otimes I_{L^*})$. Ce morphisme étant indépendant de la trivialisation Φ, les différents morphismes de ce type se recollent et définissent $F : W^{ss} \to N(L^*, K, H_0)$. Ce morphisme est G-invariant, donc on en déduit par passage au quotient

$$f : N(L, H_0, H_1) \to N(L^*, K, H_0) \ .$$

En utilisant l'opérateur B on définit de même un morphisme

$$g : N(L^*, K, H_0) \longrightarrow N(L, H_0, H_1) \ .$$

En fait f et g sont inverses l'un de l'autre d'après le lemme 19. On en déduit la

Proposition 21 : *Si $qm - n > 0$, on a un isomorphisme $N(q, m, n) \simeq N(q, qm - n, m)$, induisant un isomorphisme $N_s(q, m, n) \simeq N_s(q, qm - n, m)$.*

Soit $x_q = \frac{1}{2}(q - \sqrt{q^2-4})$ la solution inférieure à 1 de l'équation $X^2 - qX + 1 = 0$.

Si $N_s(q,m,n)$ est non vide, sa dimension est égale à $qmn - m^2 - n^2 + 1$, donc si $\dim(N_s(q,m,n)) > 0$ on a $qmn - m^2 - n^2 \geq 0$, ce qui entraine que

$$x_q \leq \frac{m}{n} \leq \frac{1}{x_q} .$$

Les inégalités sont strictes car x_q est irrationnel. On peut montrer que la réciproque est vraie, c'est à dire que si m, n sont des entiers positifs satisfaisant aux inégalités précédentes, la variété $N_s(q,m,n)$ est de dimension positive (on n'utilisera pas cette propriété par la suite), et que pour tous m, n positifs, si $\dim(N(q,m,n)) > 0$, alors $N_s(q,m,n) \neq \emptyset$. Ces inégalités entrainent aussi que $qm - n > 0$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

Soient m_0, n_0 des entiers positifs tels que $x_q < \frac{m_0}{n_0} < \frac{1}{x_q}$. On définit m_i, n_i pour tout entier i par les relations

$$m_{i+1} = n_i, \quad n_{i+1} = qn_i - m_i .$$

la suite $\left(\frac{m_i}{n_i}\right)_{i\geq 0}$ est strictement décroissante et converge vers x_q, et la suite $\left(\frac{m_{-i}}{n_{-i}}\right)_{i\geq 0}$ est strictement croissante et converge vers $\frac{1}{x_q}$. Toutes les variétés $N(q,m_i,n_i)$ sont isomorphes à $N(q,m_0,n_0)$.

4.3 – Dualité.

Proposition 22 : *On a un isomorphisme canonique* $N(q,m,n) \simeq N(q,n,m)$, *induisant un isomorphisme* $N_s(q,m,n) \simeq N_s(q,n,m)$.

Ces isomorphismes proviennent simplement de l'isomorphisme canonique $L(H_0 \otimes L, H_1) \simeq L(H_1^* \otimes L, H_0^*)$.

4.4 – Groupe de Picard. Soient m, n des entiers tels que $\dim((N(q,m,n)) > 0$, $N^0(q,m,n)$ l'ouvert des points lisses de $N(q,m,n)$. Il contient $N_s(q,m,n)$.

Proposition 23 : *On a* $\mathrm{Pic}(N^0(q,m,n)) \simeq \mathbb{Z}$.

Pour le démontrer on utilisera les résultats de 2.5. Le groupe G_0 vérifie les hypothèses de la proposition 14. On a donc $\mathrm{Mor}(G_0, \mathcal{O}^*(N_s(q,m,n))) \simeq \mathrm{Char}(G_0) \simeq \mathbb{Z}$. D'après la proposition 13 on a une suite exacte

$$\mathcal{O}^*(W^s) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pic}(N_s(q,m,n)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(W^s) .$$

Il suffit donc qu'on aie $\mathcal{O}^*(W^s) = \mathbb{C}^*$, $\mathrm{Pic}(W^s) = 0$ et $\mathrm{codim}_{N(q,m,n)}(N(q,m,n)\backslash N_s(q,m,n) \geq 2$ pour que $\mathrm{Pic}(N^0(q,m,n)) \simeq \mathbb{Z}$. Soit $Z = L(H_0 \otimes L, H_1)\backslash W^s$. Pour que les égalités et l'inégalité précédentes soient satisfaites, il suffit que Z soit de codimension au moins 2 dans $W = L(H_0 \otimes L, H_1)$.

Lemme 24 : *Soient z, z' les solutions de l'équation $2X^2 - qX + 1 = 0$, avec $z < z'$. Alors, si $z < \frac{m}{n} < z'$, ou si $m \neq 2$ dans le cas où $z' = \frac{m}{n}$, on a $\operatorname{codim}(Z) \geq 2$.*

Démonstration. Soit S l'ensemble des couples (p,k) d'entiers tels que $0 < p \leq m$, $0 \leq k < n$, $\frac{p}{k} \geq \frac{m}{n}$. Soient

$$\{0\} = H_0^0 \subset H_0^1 \subset \cdots \subset H_0^m = H_0, \quad \{0\} = H_1^0 \subset H_1^1 \subset \cdots \subset H_1^n = H_1$$

des filtrations de H_0, H_1 par des sous-espaoes vectoriels avec $\dim(H_0^i) = i$ et $\dim(H_1^j) = j$. Pour tout $(p,k) \in S$, soit $Y_{p,k}$ l'espace vectoriel des modules de Kronecker $t : H_0 \otimes L \to H_1$ tels que $t(H_1^p \otimes L) \subset H_1^k$. On a $\dim(Y_{pk}) = q(pk + n(m-p))$, donc, en utilisant le fait que le sous-groupe de G_0 envoyant H_0^p (resp. H_1^k) sur lui-même est de dimension $p^2 + m(m-p) + k^2 + k(n-k) - 1$, on obtient

$$\dim(G_0 Y_{pk}) \ \leq q(pk + n(m-p)) + m^2 + n^2 - p^2 - m(m-p) - k^2 - n(n-k) \ .$$

D'où $\operatorname{codim}_W(G_0 Y_{pk}) \geq qnp - qpk + p^2 + k^2 - mp - nk$. Posons
$h(p.k) = qnp - qpk + p^2 + k^2 - mp - nk$.

On a $k \leq k\frac{qm}{n} \leq qp$, d'où $\frac{\partial h}{\partial k}(p,k) = 2k - qp - n < 0$, donc $h(p,k)$ est une fonction décroissante de k (p étant fixé et (p,k) dans S). Posons $f(X) = -X^2 + qX - 1$, et $k_0 = \frac{pn}{m}$, de telle sorte que $k \leq k_0$ si $(p,k) \in S$. Alors on a

$$h(p,k_0) \ = \ \frac{n^2}{m^2} p(m-p) f(\frac{m}{n}) \ .$$

Puisque $z' \leq \frac{m}{n} \leq z$, on a $f(\frac{m}{n}) \geq \left(\frac{m}{n}\right)^2$, donc $h(p,k_0) \geq p(m-p)$. Montrons maintenant que $h(p,k) \geq 2$. On a

$$h(m,k) = (qm-k)(n-k) \geq qm - k > qm - n \geq 1 \ ,$$

donc $h(m,k) \geq 2$. Supposons maintenant que $p < m$. Alors $m \geq 2$. On a
$h(p,k) \geq h(p,k_0) \geq p(m-p) \geq m-1$, avec une inégalité stricte si $z' \neq \frac{m}{n}$. Si $z' = \frac{m}{n}$, on a $m \neq 2$ par hypothèse, donc $m - 1 \geq 2$. Dans tous les cas on a donc $h(p,k) \geq 2$.

On a donc montré que $\operatorname{codim}_W(G_0 Y_{pk}) \geq 2$, et comme Z est la réunion des Y_{pk} qui sont en nombre fini, on a $\operatorname{codim}_W(Z) \geq 2$. Ceci démontre le lemme 24. □

On va montrer qu'on peut presque toujours se ramener au cas où les hypothèses du lemme 24 sont satisfaites.

D'après la proposition 21, pour tout nombre réel x tel que $x_q < x < \frac{1}{x_q}$ il existe des entiers m', n' tels que $N_s(q,m',n')$ soit isomorphe à $N_s(q,m,n)$ et que $\frac{1}{q-x} < \frac{m'}{n'} \leq x$. On va montrer que $x_q < z < z' < \frac{1}{x_q}$ et $\frac{1}{q-z'} \geq z$. Les premières inégalités sont immédiates, car si $y = z$

ou z', on a $y^2 - qy + 1 = -y^2 < 0$. D'autre part. on a $z \leq \dfrac{3}{2q}$, puisque

$$2\left(\frac{3}{2q}\right)^2 - q\frac{3}{2q} + 1 \;=\; \frac{\dfrac{9}{q^2} - 1}{2} \;\leq 0\ ,$$

car $q \geq 3$. Donc, puisque $zz' = \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{q - z'} \geq z$. Remarquons qu'on a égalité si et seulement si $q = 3$.

On pent donc supposer que $z < \dfrac{m}{n} \leq z'$, les inégalités étant strictes si $q \neq 3$. Si $q \neq 3$ on déduit la proposition 23 du lemme 24. Supposons que $q = 3$. Dans ce cas la proposition 23 est vraie sauf peut-être si $\dfrac{m}{n} = z'$ et $m = 2$. Dans ce cas on a $(m, n) = (2, 2)$ et la proposition 23 découle du

Lemme 25 : *On a un isomorphisme* $N(3, 2, 2) \simeq \mathbb{P}_5$.

Ce résultat sera démontré dans 5.7.

5. Modules de Kronecker et faisceaux semi-stables

5.1 – Variétés de modules de hauteur nulle. Soit $M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$, de dimension positive. Soit $F = E_\alpha$ le fibré exceptionnel associé à $M(r, c_1, c_2)$, c'est à dire que α est l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que $|\mu - \alpha| < x_\alpha$, avec $\mu = \dfrac{c_1}{r}$. On a donc $\delta(\mu) = P(-|\mu - \alpha|) - \Delta_\alpha \leq \Delta(r, c_1, c_2)$. Si V est un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, le nombre rationnel

$$h(M(r, c_1, c_2)) \;=\; rr_\alpha(\Delta(r, c_1, c_2) - \delta(\mu))$$

est égal à $-\chi(V, E_\alpha)$ ou à $-\chi(E_\alpha, V)$, d'après 2. C'est donc un entier, qu'on appelle la *hauteur* de $M(r, c_1, c_2)$.

La variété $M(r, c_1, c_2)$ est donc de hauteur nulle si et seulement si on a $\Delta(r, c_1, c_2) = \delta(\mu)$.

5.2 – Module de Kronecker associé à un faisceau. On utilise ici les résultats de 2.2. Soit $M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de hauteur nulle, de fibré exceptionnel associé $F = E_\alpha$. Soient (E, G, F) une triade, V un faisceau cohérent semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Soit S le conoyau du morphisme canonique injectif de fibrés $G \to F \otimes \mathrm{Hom}(G, F)^*$. On suppose que $\mu = \dfrac{c_1}{r} \leq \alpha$. Alors les entiers $m = -\chi(V, E)$, $n = -\chi(S, V)$ sont positifs et indépendants du choix de V, et V est isomorphe au conoyau d'un morphisme injectif de

faisceaux, canoniquement associé à V

$$\begin{array}{ccc} A_V : E \otimes \mathrm{Ext}^1(V,E)^* & \longrightarrow & G \otimes \mathrm{Ext}^1(S,V) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ E \otimes \mathbb{C}^m & & G \otimes \mathbb{C}^n \end{array}$$

Cela découle du fait que le troisième terme de la monade (A_V, B_V) dont la cohomologie est isomorphe à V d'après 2.2 est nul : $\mathrm{Ext}^1(F,V) = \{0\}$ car $\chi(F,V) = 0$ (ceci équivaut à $\delta(\mu) = \Delta(r, c_1, c_2)$). On déduit de A_V un $\mathrm{Hom}(E,G)^*$-module de Kronecker

$$\begin{array}{ccc} t_V : \mathrm{Ext}^1(V,E)^* \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^* & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(S,V) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{C}^m \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^* & & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Réciproquement, tout module de Kronecker $t : \mathbb{C}^m \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^* \to \mathbb{C}^n$ definit un morphisme de faisceaux $a_t : E \otimes \mathbb{C}^m \to G \otimes \mathbb{C}^n$, dont le conoyau sera noté V_t. On notera de la même façon a_t et le complexe de faisceaux $K^\bullet$ qu'il définit, avec $K^{-1} = E \otimes \mathbb{C}^m$ et $K^0 = G \otimes \mathbb{C}^n$. La proposition 15 prend la forme suivante :

Lemme 26 : *Le module de Kronecker t est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout sous-module de Kronecker propre t' de t on a $c_1(a_{t'}, a_t) \geq 0$ (resp. > 0).*

Démonstration. (Cf. 2.3 pour les notations.) En effet, si $t' : \mathbb{C}^{m'} \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^* \to \mathbb{C}^{n'}$, on a

$$c_1(a_{t'}, a_t) \ = m'nc_1(E,G) - mn'c_1(G,E) \ = c_1(E,G)(mn' - m'n) \ ,$$

et le lemme 26 découle du fait que $c_1(E,G) > 0$, puisque $\mu(E) < \mu(G)$. □

D'après le lemme 9 les entiers m, n vérifient les inégalités

$$x_F \ < \ \frac{m}{n} \ \leq \ \frac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)} \ .$$

La démonstration du théorème 2 repose sur le résultat suivant :

Proposition 27 : *Soient m, n des entiers positifs vérifiant les inégalités*

$$x_F \ < \ \frac{m}{n} \ \leq \ \frac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)} \ .$$

Soit $t : \mathbb{C}^m \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^* \to \mathbb{C}^n$ un $\mathrm{Hom}(E,G)^*$-module de Kronecker. Alors le morphisme de fibrés vectoriels a_t est injectif sauf en au plus un nombre fini de points et V_t est semi-stable (resp. stable) si et seulement si t est semi-stable (resp. stable).

(Dans le cas où $F = \mathcal{O}$, $E = \wedge^2 Q^*$, $G = Q^*$, ce résultat est un cas particulier de la proposition (2.2) de [5].)

On ne démontreta que l'assertion concernant les modules de Kronecker et faisceaux semi-stables, l'autre assertion étant analogue. On procèdera en trois étapes (avec $\mu = \mu(a_t)$) en montrant que :

(i) Si a_t est injectif sauf en au plus un nombre fini de points et si V_t n'est pas semi-stable, alors t n'est pas semi-stable.
(ii) Si t est semi-stable, le morphisme de fibrés a_t est injectif si $\mu < \alpha$, et si $\mu = \alpha$, il est injectif sauf en au plus un nombre fini de points.
(iii) Si a_t est injectif sauf en au plus un nombre fini de points et si t n'est pas semi-stable, alors V_t n'est pas semi-stable.

5.3 – Démonstration de (i). Supposons que a_t soit injectif sauf en au plus un nombre fini de points et V_t non semi-stable. Montrons d'abord que V_t est sans torsion. Le sous-faiseeau de torsion T de V_t est concentré en un nombre fini de points. Il suffit donc de montrer que $h^0(V_t \otimes F^*) = 0$. Cela découle de la suite exacte

$$0 \longrightarrow E \otimes \mathbb{C}^m \xrightarrow{a_t} G \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow V_t \longrightarrow 0$$

et des égalités $\mathrm{Ext}^1(F, E) = \mathrm{Hom}(F, G) = \{0\}$.

Pour tout faisceau cohérent U sur $\mathbb{P}_2$, on note P_U le polynôme de Hilbert de U. D'après le lemme 9 on a $\alpha - x_\alpha < \mu(V_t) \leq \alpha$, et $\chi(F, V_t) = 0$ d'après la suite exacte précédente et les égalités $\chi(F, G) = \chi(F, E) = 0$. On a donc $\delta(\mu) = \Delta(V_t)$. Il en découle en particulier que si $\mu = \alpha$, on a $\Delta(V_t) > \Delta_\alpha$. Par conséquent on a toujours, en posant $r = \mathrm{rg}(V_t)$

$$\frac{P_{V_t}(X)}{r} < \frac{P_F(X)}{r_\alpha} \quad \text{pour } X \gg 0 \ .$$

On va montrer que t n'est pas semi-stable. Pour cela prouvons qu'il existe un sous-faisceau U de V, possédant les propriétés suivantes :

– on a $\mu(U) \geq \mu$ et $\dfrac{\chi(U)}{\mathrm{rg}(U)} > \dfrac{\chi(V_t)}{r}$ en cas d'égalité, ou ce qui revient au même $\dfrac{P_U(X)}{\mathrm{rg}(U)} > \dfrac{P_{V_t}(X)}{r}$ pour $X \gg 0$.
– on a $\mathrm{Hom}(F, V_t/U) = \{0\}$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition (3.2) (2) de [5]. Soit

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_p = V_t$$

la *filtration de Harder-Narasimhan* de V_t, c'est à dire que pour $1 \leq i \leq p$, V_i/V_{i-1} est l'unique sous-faisceau V' de V_t/V_{i-1} tel que pour tout sous-faisceau propre V'' de V_t/V_{i-1}, on ait $\mu(V'') \leq \mu(V')$, que $\Delta(V'') \geq \Delta(V')$ si $\mu(V'') = \mu(V')$, et que si $\mu(V'') = \mu(V')$, $\Delta(V'') = \Delta(V')$, on ait $\mathrm{rg}(V'') \leq \mathrm{rg}(V')$ (cf. [5], 2.2). Il existe alors un plus petit entier j tel que pour $i > j$ on ait

$$\frac{P_{V_t/V_{i-1}}(X)}{\mathrm{rg}(V_t/V_{i-1})} \leq \frac{P_{V_t}(X)}{r} \quad \text{pour } X \gg 0 \ .$$

Il suffit alors de prendre $U = V_j$. En effet, pour $i > j$, V_i/V_{i-1} est semi-stable, et on a

$$\frac{P_{V_i/V_{i-1}}(X)}{\mathrm{rg}(V_i/V_{i-1})} \leq \frac{P_F(X)}{r_\alpha} \quad \text{pour } X \gg 0 \ .$$

Donc on a $\mathrm{Hom}(F, V_t/V_j) = \{0\}$. D'après le choix de j on a

$$\frac{P_{V_j}(X)}{\mathrm{rg}(V_j)} > \frac{P_{V_t}(X)}{r} \quad \text{pour } X \gg 0 \ .$$

Le faisceau V_t possède donc bien les propriétés voulues. Remarquons que la suite exacte $0 \to U \to V_t \to V_t/U \to 0$ entraine que $h^1(F^* \otimes U) = 0$. On a aussi $\mathrm{Hom}(S, V_t/U) = \mathrm{Hom}(E(3), V_t/U) = \{0\}$, car d'après 2.2 les morphismes canoniques $F \otimes \mathrm{Hom}(F, S) \to F$ et $F \otimes \mathrm{Hom}(F, E(3)) \to E(3)$ sont surjectifs. Il en découle que le module de Kronecker t_U est un sous-module de Kronecker de t :

$$\begin{array}{ccc} E \otimes \mathrm{Ext}^1(U, E)^* & \xrightarrow{A_U} & G \otimes \mathrm{Ext}^1(S, U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \otimes \mathrm{Ext}^1(V_t, E)^* & \xrightarrow{A_{V_t}} & G \otimes \mathrm{Ext}^1(S, V_t) \end{array}$$

Donc A_U est injectif (comme morphisme de faisceaux). Soit U_0 le conoyau de A_U. D'après la suite spectrale de Beilinson généralisée (cf. 2.2), et le fait que $h^0(F^* \otimes U) = h^1(F^* \otimes U) = 0$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow U_0 \longrightarrow U \longrightarrow U' \longrightarrow 0 \ ,$$

U' étant le noyau du morphisme

$$d_1^{-2,2} : H^2(E^*(-3) \otimes U) \otimes E \longrightarrow H^2(S^* \otimes U) \otimes G \ .$$

On a alors $c_1(a_{t_U}, a_t) = c_1(U, V_t) - c_1(U', V_t)$. Si $U' \neq 0$, on a $\mu(U') \leq \mu(E) < \mu$ (la premiere inégalité découlant de la stabilité de E et la seconde du fait que $\mu(E) < \alpha - x_\alpha$). Donc $c_1(U', V_t) > 0$, d'où $c_1(a_{t_U}, a_t) < c_1(U, V_t) \leq 0$. Si $U' = 0$, on a $U = U_0$, et encore $c_1(a_{t_U}, a_t) < 0$ si $\mu(U) > \mu$. On ne peut pas avoir $\mu(U) = \mu$ car alors on aurait $\Delta(U) = \delta(\mu) = \Delta(V_t)$, et $\dfrac{P_U(X)}{\mathrm{rg}(U)} = \dfrac{P_{V_t}(X)}{r}$, ce qui est faux. Dans tous les cas on a donc $c_1(a_{t_U}, a_t) < 0$, ce qui prouve que t n'est pas semi-stable. On a donc prouvé (i).

5.4. Démonstration de (ii). Soit (f_i) une base de $\mathrm{Hom}(E, G)$. On peut écrire $t = \sum_i f_i \otimes \phi_i$, avec ϕ_i dans $L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$. Pour tout $x \in \mathbb{P}_2$, et tous $u \in \mathbb{C}^m$, $e \in E_x$, on a $a_{t,x}(e \otimes u) = \sum_i f_{i,x}(e) \otimes \phi_i(u)$.

Supposons $a_{t,x}$ non injective et soit $\sum_{j=1}^{p} e_j \otimes u_j$ un élément non nul de $\ker(a_{t,x})$ (avec $e_j \in E_x$, $u_j \in \mathbb{C}^m$ pour $1 \leq j \leq p$). On peut supposer que les familles (e_j) et (u_j) sont libres. On a donc $\sum_{i,j} f_{i,x}(e_j) \otimes \phi_i(u_j) = 0$.

Lemme 28 : (J. Le Potier). *Soient H, K des $\mathbb{C}$-espaces vecloriels, k un entier positif, $v_1, \ldots, v_k \in H$, $w_1, \ldots, w_k \in K$, H' (resp. K') le sous-espace vectoriel de H (resp. K) engendré par les v_i (resp. les w_i). Alors, si $\sum_{i=1}^{k} v_i \otimes w_i = 0$, on a $\dim(H') + \dim(K') \leq k$.*

Démonstration. Cela découle du complexe

$$0 \longrightarrow K'^* \xrightarrow{a} \mathbb{C}^k \xrightarrow{b} H' \longrightarrow 0$$

avec

$$a : \psi \mapsto (\psi(w_i)), \quad b : (\lambda_i) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i,$$

où a est injective et b surjective. □

On pose

$$H'_0 = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{C}u_j, \quad H'_1 = \sum_{i,j} \mathbb{C}\phi_i(u_j), \quad E' = \sum_{j=1^p} \mathbb{C}e_j, \quad G' = \sum_{i,j} f_{i,x}(e_j) \ .$$

D'après le lemme 28 on a

$$(0) \qquad \dim(G') + \dim(H'_1) \ \leq 3r_\alpha p \ .$$

Soit R' le noyau du morphisme canonique $E' \otimes \mathrm{Hom}(E, G) \to G'$. C'est un sous-espace vectoriel de R_x, R désignant le noyau du morphisme canonique $E \otimes \mathrm{Hom}(E, G) \to G$. D'après 2.2, R est isomorphe à $S(-3)$. Considérons le $\mathrm{Hom}(R, E)$-module de Kronecker canonique

$$ev_x : R_x \otimes \mathrm{Hom}(R, E) \longrightarrow E_x \ .$$

Il est stable d'après 2.2, donc puisque $ev_x(R' \otimes \mathrm{Hom}(R, E)) \subset E'$ (car $\mathrm{Hom}(R, E) \simeq \mathrm{Hom}(E, G)^*$), on a

$$\frac{\dim(R')}{p} \ \leq \ \frac{\mathrm{rg}(S)}{\mathrm{rg}(E)} \ ,$$

l'inégalité étant stricte sauf si $R' = R_x$ et $E' = E_x$. D'après la définition de E' on a $\dim(R') \geq 3r_\alpha p - \dim(G')$, d'où

$$3r_\alpha - \frac{\dim(G')}{p} \ \leq \ \frac{\dim(R')}{p} \ \leq \ \frac{\mathrm{rg}(S)}{\mathrm{rg}(E)} \ .$$

D'après le lemme 8, puisque $\mu \leq \alpha$ on a

$$\frac{n}{m} \ \geq \ \frac{\mathrm{rg}(S)}{\mathrm{rg}(E)} \ ,$$

donc

$$3r_\alpha - \frac{\dim(G')}{p} \ \leq \ \frac{n}{m} \ .$$

On en déduit à l'aide de l'inégalité (0) que

$$\frac{\dim(H'_1)}{p} \ \leq \ \frac{n}{m} \ ,$$

l'inégalité étant stricte $\dfrac{n}{m} \neq \dfrac{\mathrm{rg}(S)}{\mathrm{rg}(E)}$. Dans ce cas le résultat précédent contredit la semi-stabilité de t, donc a_{tx} est injective.

Supposons que $\dfrac{n}{m} = \dfrac{\mathrm{rg}(S)}{\mathrm{rg}(E)}$, c'est à dire $\mu = \alpha$. On va montrer que les points x de $\mathbb{P}_2$ tels que $a_{t,x}$ soit non injective sont en nombre fini. D'après ce qui précède, si $a_{t,x}$ n'est pas injective, on en déduit un sous-module de Kronecker

$$t' : H'_0 \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^* \longrightarrow H'_1$$

de t tel que $\dfrac{\dim(H'_1)}{\dim(H'_0)} = \dfrac{n}{m}$. Si t'' est un sous-module de Kronecker de t, l'ensemble des points x de $\mathbb{P}_2$ tels que $a_{t,x}$ soit non injective est contenu dans la réunion des ensembles analogues correspondant à t'' et t/t''. Il suffit donc de considérer le cas où t est stable. On a alors $m = \mathrm{rg}(E)$, $n = \mathrm{rg}(S)$, $t' = t$. On a un complexe

$$0 \longrightarrow H'^*_1 \xrightarrow{A} E_x \otimes \mathrm{Hom}(E,G) \xrightarrow{ev} G_x \longrightarrow 0$$

où A est le morphisme injectif

$$\psi \longmapsto \sum_{i,j} \psi(\phi_i(u_j))e_j \otimes f_i \ .$$

Cette suite est exacte car $\dim(R_x) = n$. On en déduit une identification de $\mathbb{C}^n$ et R_x, et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_x^* \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^* & \xrightarrow{\ {}^tA\ } & R_x^* \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h\otimes I_{\mathrm{Hom}(E,G)^*}} & & \Big\| \\ \mathbb{C}^m \otimes \mathrm{Hom}(E,G)^* & \xrightarrow{\ t\ } & \mathbb{C}^n \end{array}$$

où $h : e^j \mapsto u_j$, (e^j) désiguant la base duale de (e_j). Il en découle qu'on peut supposer que a_t est le morphisme

$$\Phi_{|\mathbb{P}_2\times\{x\}} : E \otimes E_x^* \longrightarrow G \otimes R_x^* \ ,$$

Φ étant le morphisme de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$

$$E \boxtimes E^* \longrightarrow G \boxtimes S^*(3) = E \boxtimes R^*$$

déduit de la résolution canonique de la diagonale de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ (cf. 2.2). Par consequent $a_{t,x}$ est injectif en dehors de x. Ceci démontre (ii).

Remarques. On déduit de ce qui précède les résultats suivants : soit $M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de hauteur nulle de fibré exceptionnel associé $F = E_\alpha$, $\mu = \dfrac{c_1}{r}$. Alors

1 – Si $\mu \neq \alpha$, tout faisceau semi-stable sur $\mathbb{P}_2$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, est localement libre.

2 – Si $\mu = \alpha$, il existe un entier k tel que $r = r_\alpha^2 k$, $c_1 = r_\alpha^2 \alpha k$. Un faisceau semi-stable sur $\mathbb{P}_2$, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 est non localement libre en au plus k points. Si $k = 1$, c'est à dire $r = r_\alpha^2$, $c_1 = r_\alpha^2 \alpha$, un faisceau semi-stable V de rang r et de classes de Chern c_1, c_2 est non localement libre en au plus un point. Si V n'est pas libre en x, il est isomorphe au noyau du morphisme canonique $F \otimes F_x^* \to \mathbb{C}_x$ ($\mathbb{C}_x$ désignant le faisceau cohérent concentré en

x de fibre $\mathbb{C}$ en ce point). Dans ce cas d'ailleurs, la sous-variété de $M(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux non localement libres est isomorphe à $\mathbb{P}_2$.

Exemples : Si $\alpha = 0$, on a $F = \mathcal{O}$. La variété de modules $M(1, 0, 1)$ est isomorphe à $\mathbb{P}_2$. Á un point x de $\mathbb{P}_2$ correspond le faisceau noyau du morphisme canonique $\mathcal{O} \to \mathbb{C}_x$, c'est à dire le faisceau d'idéaux du point x.

Si $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on a $F = Q^*$. La variété de modules $M(4, -2, 4)$ est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}_5$ des coniques de l'espace projectif dual $\mathbb{P}_2^*$ (cela découle du théorème 2). La sous-variété correspondant aux faisceaux non localement libres est constituée des droites doubles de $\mathbb{P}_2$. Cette sous-variété est bien isomorphe à $\mathbb{P}_2$. Au point x de $\mathbb{P}_2$ correspond le noyau du morphisme canonique $Q^* \otimes Q_x \to \mathbb{C}_x$.

5.5 – Démonstration de (iii). Supposons a_t injectif sauf en au plus un nombre fini de points et t non semi-stable. Soit t' un sous-module de Kronecker maximal de t, c'est à dire que $m(t', t) < 0$ et t ne contient pas de sous-module de Kronecker ayant cette propriété et contenant strictement t'. Alors $a_{t'}$ est injectif, puisque a_t l'est. Il est aisé de voir que $t'' = t/t'$ est stable. Montrons que $a_{t''}$ est injectif (comme morphisme de faisceaux). Si $a_{t'',x}$ n'est pas injective, on en déduit d'après la démonstration de (ii) un sous-module de Kronecker $t_0^{''}$ de t'' tel que $m(t_0^{''}, t) \leq 0$. Un calcul simple montre que cela entraine que $m(t_0^{''}, t'') \leq 0$, ce qui contredit la stabilité de t''. Puisque $a_{t''}$ est injectif, $V_{t'}$ est un sous-faisceau de V_t et il contredit la semi-stabilité de V_t. Ceci démontre (iii) et achève la démonstration de la proposition 27.

5.6 – Démonstration du théorème 2. Il s'agit de prouver que $M(r, c_1, c_2)$ est isomorphe à $N(3r_\alpha, m, n)$ (les notations sont celles de 5.2). Pour cela on utilise la propriété uuiverselle caractérisant $M(r, c_1, c_2)$ à isomorphisme près.

Soient X une variété algébrique, U un faisceau cohérent sur $X \times \mathbb{P}_2$, plat sur X, tel que pour tout point fermé s de X, $U_s = U_{|\{s\}\times\mathbb{P}_2}$ soit semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Soient p_1, p_2 les projections $X \times \mathbb{P}_2 \to X$ et $X \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$. Les faisceaux

$$F_0 \;=\; R^1 p_{1*}(U \otimes p_2^*(E^*(-3))), \quad F_1 \;=\; R^1 p_{1*}(U \otimes p_2^*(S^*))$$

sont localement libres et on a un morphisme canonique

$$\Theta : F_0 \otimes \mathrm{Hom}(E, G)^* \longrightarrow F_1$$

tel que, pour tout point fermé s de X on ait $\Theta_s = t_{U_s}$.

Si $x \in X$, il existe un voisinage X_x de x et des trivialisations $F_{0|X_x} \simeq \mathcal{O}_{X_x} \otimes \mathbb{C}^m$, $F_{1|X_x} \simeq \mathcal{O}_{X_x} \otimes \mathbb{C}^n$. On en déduit à l'aide de la proposition 27 un morphisme $\lambda_x : X_x \to W^{ss}$. Soit $\pi : W^{ss} \to N(3r_\alpha, m, n)$ le morphisme quotient. Alors les morphismes $\pi \circ \lambda_x$ se "recollent" pour définir un morphisme

$$\phi_U : X \longrightarrow N(3r_\alpha, m, n)$$

dépendant fonctoriellement de U, c'est à dire que si $f : T \to X$ est un morphisme de variétés algébriques, on a $\phi_{(f\times I_{\mathbb{P}_2})^*(U)} = \phi_U \circ f$. De plus ϕ_U ne dépend que de la classe d'isomorphisme de U, et ne change pas si on remplace U par $U \otimes p_1^*(L)$ (L étant un fibré en droites sur X).

Il suffit de montrer que si M_0 est une variété algébrique telle qu'on ait défini un morphisme $\psi_U : X \to M_0$ (pour tous X et U) dépendant fonctoriellement de U, il existe un morphisrne unique $N(3r_\alpha, m, n) \to M_0$ tel que $\eta \circ \phi_U = \psi_U$ pour tout U. En effet, cette propriété caractérise $M(r, c_1, c_2)$ à isomorphisme près. Pour cela on considère le module de Kronecker universel sur W^{ss} :

$$T : \mathcal{O}_{W^{ss}} \otimes \mathbb{C}^m \otimes \mathrm{Hom}(E, G)^* \longrightarrow \mathcal{O}_{W^{ss}} \otimes \mathbb{C}^n$$

dont le conoyau est un faisceau cohérent V (conformément à la notation de 5.2, on a $V_t = \mathrm{coker}(a_t)$). D'après la proposition 27, c'est une famille de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$. Le morphisme induit $\psi_V : W^{ss} \to M_0$ est G_0-invariant d'après la dépendance fonctorielle de ψ_U en U, donc ψ_V induit un morphisme $N(3r_\alpha, m, n) \to M_0$. Montrons maintenant que $\eta \circ \phi_U = \psi_U$. Par fonctorialité de ϕ_U et ψ_U, il suffit de prouver l'assertion suivante : si $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$ conoyau d'un morphisme injectif de faisceaux $f : E \otimes \mathbb{C}^m \to G \otimes \mathbb{C}^n$, le module de Kronecker $\mathbb{C}^m \otimes \mathrm{Hom}(E, G) \to \mathbb{C}^n$ deduit de f est isomorphe à $t_{\mathcal{E}}$. Cela découle du lemme 10.

L'unicité de η découle de la surjectivité de ϕ_V.

La "naturalité" de l'isomorphisme $M(r, c_1, c_2) \simeq N(3r_\alpha, m, n)$ vient du fait qu'il est défini par le morphisme canonique $W^{ss} \to M(r, c_1, c_2)$ induit par V. Il induit un isomorphisme entre les ouverts de points stables d'après la proposition 27. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

5.7 – Démonstration du lemme 25. Il s'agit de prouver que $N(3, 2, 2)$ est isomorphe à $\mathbb{P}_5$. En prenant (E, G, F) égal à $(\wedge^2 Q^*, Q^*, \mathcal{O})$ on voit que d'après le théorème 2, $N(3, 2, 2)$ est isomorphe à $M(2, 0, 2)$.

Soit L un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3. À tout L-module de Kronecker $t : \mathbb{C}^2 \otimes L \to \mathbb{C}^2$ on associe son *déterminant* $d(t)$ qui est l'élément de $S^2 L^*$ défini par : pour tout $y \in L \backslash \{0\}$, $d(t)(y.y) = det(t_{|\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}y})$. Ou encore, si on identifie t à une matrice $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ de formes linéaires sur L, on a $d(t) = XT - YZ$. Il est immédiat que t est semi-stable si et seulement si $d(t) \neq 0$. On en déduit un morphisme $(\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2))$-invariant $W^{ss} \to \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 L^*)$, d'où un morphisme

$$\Psi : N(3, 2, 2) \longrightarrow \mathbb{P}_5 \ .$$

Identifions $\mathbb{P}_5$ et l'espace des coniques de l'espace projectif $\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}_2$. Soit U l'ouvert des coniques non dégénérées. D'après Barth ([1], 6) Ψ induit un isomorphisme $N_s(3, 2, 2) \simeq U$. Donc Ψ est un isomorphisme birationnel. Supposons que Ψ ne soit pas un isomorphisme. D'après le théorème 2 de [14] (chap. 2, 4), il existe une hypersurface fermée Y de $N(3, 2, 2)$ contenue dans $Y_0 = N(3, 2, 2) \backslash N_s(3, 2, 2)$ telle que $\Psi(Y)$ soit de codimension au moins 2 dans $\mathbb{P}_5$. Mais ceci est impossible car $\Psi(Y_0) = \mathbb{P}_5 \backslash U$ et on va voir que Y_0 est irréductible, donc $Y = Y_0$ et $\Psi(Y) = \mathbb{P}_5 \backslash U$, qui est de codimension 1.

Il reste donc à montrer que Y_0 est irréductible. On considère la famille T de modules de Kronecker paramétrée par $(L^* \backslash \{0\})^2$ par

$$T_{(X,Y)} \ = \ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

pour tout $(X,Y) \in (L^*\backslash\{0\})^2$. On peut voir ainsi $(L^*\backslash\{0\})^2$ comme une sous-variété fermée de W^{ss} et $\pi((L^*\backslash\{0\})^2) = Y_0$, ce qui prouve que ce dernier est irréductible. Ceci achéve la démonstration du lemme 25.

Étude des variétés $N(3,m,n)$ canoniquement isomorphes à $N(3,2,2)$ – Les résultats obtenus ici sont utilisés dans [4]. Soit $(m_i,n_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ la suite de couples d'entiers définie par : $m_0 = n_0 = 2$, et $m_{i+1} = n_i$, $n_{i+1} = 3n_i - m_i$ pour tout entier i. Toutes les variétés $N(3,m_i,n_i)$ sont isomorphes à $\mathbb{P}_5$ (cf. 4.2). Les formules précédentes montrent que pour tout entier i, on a $\mathrm{pgcd}(m_i,n_i) = 2$. On fixe maintenant l'entier i. Soit λ_i le caractère de $G_0(i) = (\mathrm{GL}(m_i)\times\mathrm{GL}(n_i))/\mathbb{C}^*$ défini par

$$\lambda(\mathbb{C}^*(g_1,g_2)) \;=\; \det(g_1)^{-\frac{n_i}{2}}\det(g_2)^{\frac{m_i}{2}}\ .$$

On va décrire l'isomorphisme canonique $\pi_i : N(3,m_i,n_i) \to \mathbb{P}_5$. Pour tout entier k on pose $L_k = L$ si k est pair, et $L_k = L^*$ sinon. Soit $W_i = \mathbb{L}(\mathbb{C}^{m_i}\otimes L_i, \mathbb{C}^{n_i})$. Il existe une suite $(E_j^{(i)})_{j\in\mathbb{Z}}$ de fibrés vectoriels sur W_i^{ss} et des morphismes $f_j^{(i)} : E_j\otimes L_{j-i} \to E_{j+1}$, définis par :

- $E_i^{(i)} = \mathcal{O}_{W_i^{ss}}\otimes\mathbb{C}^{m_i}$, $E_{i+1}^{(i)} = \mathcal{O}_{W_i^{ss}}\otimes\mathbb{C}^{n_i}$.
- $f_i^{(i)}$ est le module de Kronecker universel.
- Pour tout entier j, $f_j^{(i)}$ est surjectif, et $E_{j-1}^{(i)} \simeq \ker(f_j^{(i)})$, $f_{j-1}^{(i)}$ étant la restriction à $\ker(f_j^{(i)})\otimes L_{j-i-1}$ du morphisme canonique $(E_j\otimes L_{j-i})\otimes L_{j-i-1} \to E_j$.
- Pour tout entier j, le morphisme $g_j : E_j^{(i)} \to E_{j+1}^{(i)}\otimes L_{j-i+1}$ déduit de $f_j^{(i)}$ est injectif, $\mathrm{coker}(g_j) \simeq E_{j+2}^{(i)}$, et $f_{j+1}^{(i)}$ est la projection $E_{j+1}^{(i)}\otimes L_{j-i+1} \to \mathrm{coker}(g_j)$.

On a alors, pour tout entier j, $\mathrm{rg}(E_j^{(i)}) = m_j$, en particulier $E_0^{(i)}$ et $E_1^{(i)}$ sont de rang 2. Les fibrés $E_j^{(i)}$ sont munis d'une action naturelle de $G_0(i)$, et les $f_j^{(i)}$ sont des $G_0(i)$-morphismes. On a un isomorphisme de $G_0(i)$-fibrés en droites

$$det\big((E_j^{(i)})^*\otimes E_{j+1}^{(i)}\big) \;\simeq\; det\big((E_i^{(i)})^*\otimes E_{i+1}^{(i)}\big)\ .$$

Ce $G_0(i)$-fibré en droites est associé au caractère λ_i^2 de $G_0(i)$. Soit

$$\phi_i : \mathcal{O}_{W_i^{ss}}\otimes S^2L \longrightarrow \wedge^2(E_0^{(i)})^*\otimes\wedge^2E_1^{(i)}$$

le morphisme déduit de $f_0^{(i)}$. Alors π_i est induit par le morphisme $\Psi_i : W_i^{ss} \to \mathbb{P}_5 = P(S^2L)$ qui associe au module de Kronecker t l'hyperplan noyau de $\phi_{i,t}$.

Notons que le $G_0(i)$-fibré en droites $D_i = \wedge^2(E_0^{(i)})^*\otimes\wedge^2E_1^{(i)}$ possède des sections $G_0(i)$-invariantes (les éléments de S^2L). Le caractère associé à D_i n'est autre que λ. En fait, D_i est $G_0(i)$-isomorphe à $\Psi_i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1))$.

5.8 – Propriétés des variétés de modules de hauteur nulle. Si $M(r,c_1,c_2)$ est une variété de modules de hauteur nulle de fibré exceptionnel associé $F = E_\alpha$ telle que $\mu = \dfrac{c_1}{r} \le \alpha$, et si V est un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, on a vu que les entiers $m = -\chi(V,E)$, $n = -\chi(S,V)$ sont indépendants de V, que $M(r,c_1,c_2)$ est isomorphe à $N(3r_\alpha,m,n)$, et qu'on a $x_F < \dfrac{m}{n} \le \dfrac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)}$. La réciproque est vraie : soient m',n' des

entiers positifs tels que $x_F < \dfrac{m'}{n'} \leq \dfrac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)}$. Alors (m', n') correspond à une variété de modules $M(r', c'_1, c'_2)$ de hauteur nulle, de fibré exceptionnel associé F, avec $\dfrac{c'_1}{r'} \leq \alpha$. C'est une conséquence du lemme 9.

Posons $m_1 = n$, $n_1 = 3r_\alpha n - m$. On a

$$x_F \ < \frac{m_1}{n_1} \ < \ \frac{m}{n} \ \leq \ \alpha \ ,$$

donc (m_1, n_1) correspond à une variété de modules de hauteur nulle $M(r', c'_1, c'_2)$. Posons $\mu_1 = \dfrac{c'_1}{r'}$.

Lemme 29 : *On a* $\mu_1 = \alpha - \dfrac{1}{r_\alpha^2(\mu - \alpha + 3)}$.

Démonstration. On pose, pour tout nombre réel x distinct de $\dfrac{\mathrm{rg}(G)}{\mathrm{rg}(E)}$,

$$\lambda(x) \ = \ \frac{c_1(G) - c_1(E)x}{\mathrm{rg}(G) - \mathrm{rg}(E)x} \ .$$

D'après les égalités de 2.2, on a $\lambda(x_F) = \alpha - x_\alpha$. On a de même $\lambda\left(\dfrac{1}{x_F}\right) = \alpha - \dfrac{1}{x_F r_\alpha}$, et aussi

$$\lambda\left(\frac{m}{n}\right) \ = \ \mu, \quad \lambda\left(\frac{1}{3r_\alpha - \dfrac{m}{n}}\right) \ = \ \mu_1 \ .$$

Les points fixes de l'homographie $x \mapsto \dfrac{1}{3r_\alpha - x}$ sont x_F et $\dfrac{1}{x_F}$. Donc le birapport $\left[x_F, \dfrac{1}{x_F}, t, \dfrac{1}{3r_\alpha - t}\right]$ est indépendant du nombre réel $t \neq 3r_\alpha$. En faisant $t = 0$, on voit qu'i1 vaut $\dfrac{1}{x_F^2}$. On a donc

$$\left[\lambda(x_F), \lambda\left(\frac{1}{x_F}\right), \lambda\left(\frac{m}{n}\right), \lambda\left(\frac{1}{3r_\alpha - \dfrac{m}{n}}\right)\right] \ = \ \frac{1}{x_F^2} \ = \ \left[\alpha - x_\alpha, \alpha - \frac{1}{x_F r_\alpha}, \mu, \mu_1\right] \ ,$$

c'est à dire

$$A \ = \ \frac{\mu - \alpha - x_\alpha}{\mu - \alpha - \dfrac{1}{x_F r_\alpha}} \ = \ \frac{1}{x_F^2} \frac{\mu_1 - \alpha - x_\alpha}{\mu_1 - \alpha - \dfrac{1}{x_F r_\alpha}} \ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mu_1 - \alpha &= \frac{1}{r_\alpha}\frac{A-1}{Ax_F - \dfrac{1}{x_F}} \\
&= \frac{1}{r_\alpha^2}\frac{-x_F + \dfrac{1}{x_F}}{\left(x_F - \dfrac{1}{x_F}\right)(\mu-\alpha) + \dfrac{\dfrac{1}{x_F^2} - x_F^2}{r_\alpha}} \\
&= -\frac{1}{r_\alpha^2}\frac{1}{\mu-\alpha+3}\ ,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme 29. □

L'isomorphisme naturel $\Theta : N(3r_\alpha, m, n) \to M(r, c_1, c_2)$ préserve les graduations. Cela signifie la chose suivante : soit $t \in W^{ss}$, somme directe de modules de Kronecker stables : $t = t_1 \oplus \cdots \oplus t_k$. Notons V_i le faisceau stable défini par t_i. Alors le faisceau semi-stable $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ est associé au point $\Theta(\pi(t))$ de $M(r, c_1, c_2)$, et les gradués dans la filtration de Jordan-Hölder de V sont les V_i.

Il en découle que si $\chi = r\big(P(\mu) - \Delta(r, c_1, c_2)\big)$ (c'est la caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux de rang r et de classes de Chern c_1, c_2), on a

$$\mathrm{pgcd}(m, n) \ = \ \mathrm{pgcd}(r, c_1, \chi)\ ,$$

car le terme de gauche est le nombre maximal de termes dans une somme directe de modules de Kronecker dans W^{ss}, tandis que celui de gauche est le nombre maximal de termes dans le gradué de Jordan-Hölder d'un faisceau semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1, c_2.

On en déduit avec le lemme 29 que les entiers r', c_1', c_2' sont parfaitement définis, c'est à dire qu'ils ne dépendent pas du choix des fibrés exceptionnels E et G tels que (E, G, F) soit une triade. On notera

$$M(r', c_1', c_2') \ = \ \wedge^+(M(r, c_1, c_2))\ .$$

Pour tout entier $p > 0$ on définit par récurrence :

$$\wedge^{+(p+1)}(M(r, c_1, c_2)) \ = \ \wedge^+(\wedge^{+p}(M(r, c_1, c_2))\ .$$

Soit μ_p la pente des faisceaux semi-stables associés à $\wedge^{+p}(M(r, c_1, c_2))$. La suite $(\mu_p)_{p\geq 1}$ est strictement décroissante et converge vers $\alpha - x_\alpha$.

Définition : On dit que $M(r, c_1, c_2)$ est une variété de modules *initiale* s'il n'existe pas de variété de modules M' telle que $M(r, c_1, c_2) = \wedge^+(M')$. Pour que $M(r, c_1, c_2)$ soit initiale il faut et il suffit d'après le lemme 29 que

$$\alpha - \frac{1}{3r_\alpha^2} \ < \ \frac{c_1}{r} \ \leq \ \alpha\ .$$

En utilisant la proposition 22 on construit aussi une autre suite infinie de variétés de modules isomorphes à $M(r, c_1, c_2)$. Mais il peut arriver que cette suite soit identique à la précédente.

En considérant les variétés de modules de hauteur nulle telles que $\alpha \leq \mu < \alpha + x_\alpha$, on définit encore deux suites de variétés de modules isomorphes à $M(r, c_1, c_2)$. Des exemples de telles suites sont donnés en Appendice.

5.9 – Démonstration du théorème 7. C'est une conséquence immediate du théorème 2 et de la proposition 23.

6. Recherche des variétés de modules de dimension donnée

6.1 – Démonstration du théorème 4

Le théorème 4 est une conséquence du résultat suivant, qui aide à déterminer les variétés de modules de hauteur nulle de dimension donnée :

Proposition 30 : *Soit $F = E_\alpha$ un fibré exceptionnel, $M_0 = M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de hauteur nulle de fibré exceptionnel associé F. Alors*

a) *Si M_0 n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}_{3r_\alpha - 1}$, on a*

$$\dim(M_0) \ > \ 3r_\alpha - 1 \ .$$

b) *Si M_0 est initiale et de dimension d, on a*

$$r_\alpha \sqrt{d-1} \ \leq r < \ 3r_\alpha^2 \sqrt{d-1} \ .$$

On déterminera également toutes les variétés de modules de hauteur nulle, de fibré exceptionnel F et isomorphes à $\mathbb{P}_{3r_\alpha - 1}$. En fait, si M_0 est une telle variété, et si $N(3r_\alpha, m, n)$ est la varieté qui lui est associée, alors (m, n) est un terme de la suite $(m_i, n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, définie par $(m_0, n_0) = (1, 1)$ et $(m_{i+1}, n_{i+1}) = (n_i, 3r_\alpha n_i - m_i)$ pour tout entier i.

Il faut bien sûr, pour déterminer les variétés de modules de hauteur nulle de dimension d, connaitre d'après a) les fibrés exceptionnels E_α tels que $r_\alpha \leq \dfrac{d+1}{3}$. On peut pour cela utiliser le résultat suivant (proposition (5.5) (3) de [5]) : si p, q sont des entiers avec $q \geq 0$, et si $\beta = \epsilon\left(\dfrac{p}{2^q}\right)$, alors on a $r_\beta \geq 2^q$. Ceci limite le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$ à considérer.

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration de la proposition 30. D'après 5 il existe des entiers m, n tels que $M_0 \simeq N(3r_\alpha, m, n)$, et on peut choisir $\dfrac{m}{n}$ aussi proche de x_F ou $\dfrac{1}{x_F}$ qu'on le veut. On a

$$d \ = \ \dim(M_0) \ = \ 3r_\alpha mn - m^2 - n^2 + 1 \ ,$$

donc

$$(1) \qquad 1 - d \ = \ X^2 - pY^2 \ ,$$

avec $p = 9r_\alpha^2 - 4$, $X = \dfrac{3r_\alpha}{2}n - m$, $Y = \dfrac{n}{2}$.

L'égalité (1) donne une approximation de $\sqrt{p}$ par le nombre rationnel $\left|\dfrac{X}{Y}\right|$. L'entier p n'est pas un carré, car $p \bmod 3$ n'en est pas un dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Les meilleures approximations rationnelles de $\sqrt{p}$ sont donc données par la *fraction continue* de $\sqrt{p}$.

6.1.1 – Fractions continues. (cf. Hardy-Wright [7]). Soit δ un nombre réel irrationnel. On définit une suite $(a_i)_{i\geq 0}$ d'entiers, et une suite $(\delta_i)_{i\geq 0}$ de nombres réels non nuls, par

$$\delta_0 = \delta - [\delta] \ , \quad a_0 = [\delta] \ , \quad a_{n+1} = \left[\frac{1}{\delta_n}\right] \ , \quad \delta_{n+1} = \frac{1}{\delta_n} - a_{n+1} \ ,$$

pour tout entier $n \geq 0$ (pour tout réel x, $[x]$ désigne la partie entière de x). La suite $(a_i)_{i\geq 0}$ s'appelle la *fraction continue* associée à δ. On définit de plus deux suites $(p_i)_{i\geq 0}$ et $(q_i)_{i\geq 0}$ d'entiers par les relations

$$p_0 = a_0 \ , \quad p_1 = a_0 a_1 + 1 \ , \quad q_0 = 1 \ , \quad q_1 = a_1 \ ,$$
$$p_{n+1} = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \ , \quad q_{n+1} = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

pour $n \geq 2$. Le rationnel $\dfrac{p_n}{q_n}$ s'appelle le *n-iéme quotient* de δ. La suite $\left(\dfrac{p_i}{q_i}\right)$ converge vers δ, el si p, q sont des entiers, avec $q \neq 0$, tels que

$$\left|\frac{p}{q} - \delta\right| \ < \ \frac{1}{2q^2} \ ,$$

il existe un entier $i \geq 0$ tel que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p_i}{q_i}$.

6.1.2 – Démonstration de a) dans le cas où r_α est impair. De (1) on déduit

$$\left|\frac{X}{Y}\right| - \sqrt{p} \ = \ \frac{1-d}{\sqrt{p} + \left|\dfrac{X}{Y}\right|}\frac{1}{Y^2} \ . \tag{2}$$

On peut supposer que n est pair : si n est impair et m pair, on utilise l'isomorphisme $N(3r_\alpha, m, n) \simeq N(3r_\alpha, n, m)$, et si n et m sont impairs on a $N(3r_\alpha, m, n) \simeq N(3r_\alpha, n, 3r_\alpha n - m)$, et $3r_\alpha n - m$ est pair. Puisque n est pair, X et Y sont des entiers. Tout en gardant n pair, on peut supposer $\dfrac{m}{n}$ aussi proche qu'on le veut de x_F ou $\dfrac{1}{x_F}$. Il en découle qu'on peut supposer $\left|\dfrac{X}{Y}\right|$ aussi proche de $\sqrt{p}$ qu'on le veut. D'après (2), si $\left|\dfrac{X}{Y}\right|$ tend vers $\sqrt{p}$, on a

$$\left|\left|\frac{X}{Y}\right| - \sqrt{p}\right| \ \sim \ \left|\frac{1-d}{\sqrt{p}}\frac{1}{2Y^2}\right| \ .$$

Supposons que $d \leq 3r_\alpha - 1$. Alors on a $\dfrac{d-1}{\sqrt{p}} < 1$. On peut donc supposer que

$$\left|\left|\frac{X}{Y}\right| - \sqrt{p}\right| \ < \ \frac{1}{2Y^2} \ .$$

Par conséquent $\left|\dfrac{X}{Y}\right|$ est un quotient de $\sqrt{p}$. Soit $(a_i)_{i\geq 0}$ la fraction continue de $\sqrt{p}$, $\left(\dfrac{p_i}{q_i}\right)_{i\geq 0}$ la suite de ses quotients. Supposons que $r_\alpha > 1$.

Lemme 31 : **(i)** *On a* $a_0 = 3r_\alpha - 1$. *La suite* $(a_i)_{i\geq 1}$ *est périodique, de période 6, et on a*

$$(a_i)_{1\leq i\leq 6} \ = \ \left(1, \frac{3r_\alpha - 3}{2}, 2, \frac{3r_\alpha - 3}{2}, 1, 6r_\alpha - 2\right) \ .$$

(ii) *On a, pour tout* $i \geq 1$

$$p_{i+6} + q_{i+6}\sqrt{p} \ = \ \left(\frac{3r_\alpha}{2} + \frac{\sqrt{p}}{2}\right)^3 (p_i + q_i\sqrt{p}) \ .$$

(iii) *La suite* $(p_i^2 - pq_i^2)_{i\geq 1}$ *est périodique, de période 6, et on a*

$$(p_i^2 - pq_i^2)_{1\leq i\leq 6} \ = \ (4, 2 - 3r_\alpha, 4, 5 - 6r_\alpha, 1, 5 - 6r_\alpha) \ .$$

Démonstration. (i) On a $a_0 = [\sqrt{p}] = 3r_\alpha - 1$. Pour prouver (i), on remarque que si

$$X \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3r_\alpha - 3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3r_\alpha - 3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6r_\alpha - 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

et

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ = \ X \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{p} - a_0} \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

alors on a

$$\frac{a}{b} \ = \ \frac{1}{\sqrt{p} - a_0} \ .$$

(ii) Soient

$$N_0 \ = \ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}r_\alpha & p/2 \\ 1/2 & \frac{3}{2}r_\alpha \end{pmatrix} \ , \qquad N \ = \ N_0^3 \ = \begin{pmatrix} U & V \\ W & U \end{pmatrix} \ .$$

Il faut montrer que pour tout $i \geq 1$, on a

$$(1) \qquad N \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} p_{i+6} \\ q_{i+6} \end{pmatrix} \ .$$

Un calcul direct montre que c'est vrai pour $i = 1$. Supposons que ce soit vrai pour i et montrons que

$$(2) \qquad N \begin{pmatrix} p_{i+1} \\ q_{i+1} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} p_{i+7} \\ q_{i+7} \end{pmatrix} \ .$$

On a

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} p_{i+7} & q_{i+7} \\ p_{i+6} & q_{i+6} \end{pmatrix} = X' \begin{pmatrix} p_{i+1} & q_{i+1} \\ p_i & q_i \end{pmatrix} ,$$

X' étant une des six matrices obtenues en permutant cycliquement les facteurs du produit donnant X dans la démonstration de (i). Posons

$$X' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} .$$

D'après (3) l'équation (2) équivaut à

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} U-A & V \\ W & U-A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{i+1} \\ q_{i+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix} .$$

De (1) et (3) on déduit que

$$\begin{pmatrix} U-D & V \\ W & U-D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} p_{i+1} \\ q_{i+1} \end{pmatrix} ,$$

et (4) découle du fait que $C \neq 0$ et

$$\begin{pmatrix} U-A & V \\ W & U-A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U-D & V \\ W & U-D \end{pmatrix} = BC \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Pour voir que $C \neq 0$, on remarque que dans le cas contraire les valeurs propres de X' seraient rationnelles, ce qui est faux car l'une d'entre elles admet un développement en fraction continue infini. L'égalité précédente, compte tenu du fait que $\det(X') = \det(N) = 1$, se réduit à $\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(X')$. Pour le démontrer, on remarque que $\mathrm{Tr}(X') = \mathrm{Tr}(X)$, et un calcul direct montre que $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(N) = 27r_\alpha^3 - 9r_\alpha$.

L'assertion (iii) découle de (ii) et d'un calcul direct de $p_i^2 - pq_i^2$, pour $1 \leq i \leq 6$.

Le lemme 31 est donc démontré. □

Il existe un entier i tel que $\left|\dfrac{X}{Y}\right| = \dfrac{p_i}{q_i}$. On supposera que $X > 0$, l'autre cas étant analogue. Soit $t = \dfrac{X}{p_i}$, c'est un entier car p_i et q_i sont premiers entre eux. On a $1 - d = (2 - 3r_\alpha)t^2$, et comme $d \leq 3r_\alpha - 1$, on a $t = 1$, $d = 3r_\alpha - 1$, $X = p_i$, $Y = q_i$. L'entier i est d'après la lemme 31,(iii) de la forme $i = 6j + 2$, avec j entier. Il faut maintenant prouver que M_0 est isomorphe à $\mathbb{P}_{3r_\alpha - 1}$. Soit $(m_k, n_k)_{k \geq 0}$ la suite de couples d'entiers definie par $m_0 = n_0 = 1$ et $m_{k+1} = n_k$, $n_{k+1} = 3r_\alpha n_k - m_k$ si $k \geq 0$. On a pour tout k

$$N(3r_\alpha, m_k, n_k) \simeq N(3r_\alpha, 1, 1) \simeq \mathbb{P}_{3r_\alpha - 1} .$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe un entier $k_0 \geq 0$ tel que $(m, n) = (m_{k_0}, n_{k_0})$. Soit $(m'_k, n'_k)_{k \geq 0}$ la suite de couples d'entiers définie par les équations

$$p_k = \frac{3r_\alpha}{2} n'_k - m'_k , \quad q_k = \frac{n'_k}{2} .$$

Il suffit de montrer que pout tout $k \geq 0$ on a $(m'_{6k+2}, n'_{6k+2}) = (m_{3k+1}, n_{3k+1})$. On procède par récurrence sur k. Le cas $k = 0$ se traite par un calcul direct. Supposons que

$(m'_{6k+2}, n'_{6k+2}) = (m_{3k+1}, n_{3k+1})$. D'après le lemme 31,(ii) on a

$$p_{6(k+1)+2} + q_{6(k+1)+2}\sqrt{p} \;=\; \left(\frac{3}{2}r_\alpha + \frac{\sqrt{p}}{2}\right)^3 (p_{6k+2} + q_{6k+2}\sqrt{p}) \;,$$

ce qui entraine

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} m'_{6(k+1)+2} \\ n'_{6(k+1)+2}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3r_\alpha & 9r_\alpha^2 - 1 \\ 1 - 9r_\alpha^2 & 27r_\alpha^2 - 6r_\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m'_{6k+2} \\ n'_{6k+2}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3r_\alpha\end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} m_{3k+1} \\ n_{3k+1}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{3(k+1)+1} \\ n_{3(k+1)+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ce qui prouve a) dans le cas on r_α est impair et différent de 1.

Le cas où $r_\alpha = 1$ se traite de manière analogue, le lemme 31 étant modifié comme suit : $(a_i)_{i\geq 1}$ est constante ($a_i = 4$ pour $i \geq 1$), $(p_i^2 - pq_i^2)_{i\geq 1}$ est périodique de période 2 (on a $p_i^2 - pq_i^2 = (-1)^{i+1}$ pour tout i), et

$$p_{i+2} + q_{i+2}\sqrt{5} \;=\; (9 + 4\sqrt{5})(p_i + q_i\sqrt{5}) \qquad \text{si } i \geq 1 \;.$$

6.1.3 – Le cas où r_α est pair. On ne peut plus supposer ici que n est pair. Considérons la transformation

$$\begin{aligned} T : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (v, 3r_\alpha v - u). \end{aligned}$$

Alors, si $(m_i, n_i) = T^i(m, n)$ pour tout entier i, on a $N(3r_\alpha, m_i, n_i) \simeq N(3r_\alpha, m, n)$. Deux cas se présentent : il existe une infinité d'indices i tels que m_i ou n_i soient pairs, on bien il en existe une infinité tels que m_i et n_i soient impairs.

Supposons qu'on soit dans le premier cas. D'après la proposition 22 on peut se ramener au cas où il existe une infinité d'entiers i tels que n_i soit pair. On peut donc choisir m et n, avec n pair et $\dfrac{m}{n}$ aussi proche qu'on le veut de x_F ou $\dfrac{1}{x_F}$. Puisque n est pair, X et Y sont des entiers. Pour démontrer a), on procède comme dans 6.1.2, le lemme 31 étant modifié comrne suit : $(a_i)_{i\geq 1}$, est périodique, de période 4, avec $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, \dfrac{3r_\alpha - 4}{2}, 1, 6r_\alpha - 2)$, $(p_i^2 - pq_i^2)_{i\geq 1}$ est périodique de période 4, avec $(p_i^2 - pq_i^2)_{1\leq i\leq 4} = (4, -6r_\alpha + 5, 1, -6r_\alpha + 5)$, et on a

$$p_{i+4} + q_{i+4}\sqrt{p} \;=\; \left(\frac{9}{2}r_\alpha^2 - 1 + \frac{3}{2}r_\alpha\sqrt{p}\right)(p_i + q_i\sqrt{p})$$

si $i \geq 1$. On en conclut que le premier cas ne peut pas se produire si $d \geq 3r_\alpha - 1$.

Supposons qu'on soit dans le second cas, c'est à dire qu'il existe une infinité d'entiers i tels que m_i et n_i soient impairs.

Lemme 32 : *On a* $r_\alpha \equiv 2 \bmod 4$.

Démonstration. Il existe des entiers s, t, avec $t \geq 0$, tels que $\alpha = \epsilon\left(\frac{s}{2^t}\right)$. On démontrera le lemme 32 par récurrence sur t. C'est évident si $t = 1$. Supposons que ce soit vrai pour $t-1$, et supposons s impair. Posons

$$\alpha' \;=\; \epsilon\left(\frac{s-1}{2^t}\right) \;,\quad \beta \;=\; \epsilon\left(\frac{s+1}{2^t}\right) \;.$$

On a d'après 2.2, $r_{\alpha'}^2 + r_\alpha^2 + r_\beta^2 = 3r_{\alpha'}r_\alpha r_\beta$. Supposons que $r_\alpha \equiv 0 \bmod 4$. On a alors $r_{\alpha'}^2 + r_\beta^2 \equiv 0 \bmod 4$, d'où on déduit que $r_{\alpha'}$ et r_β sont pairs. Posons $r_\alpha = 4u$, $r_{\alpha'} = 2v$, $r_\beta = 2w$. Alors on a $12uvw = 4u^2 + v^2 + w^2$, d'où $v^2 + w^2 \equiv 0 \bmod 4$, d'où on déduit que v et w sont pairs. Donc $r_{\alpha'}$ et r'_β sont divisibles par 4. Ceci est faux d'après l'hypothèse de récurrence. Donc $r_\alpha \equiv 2 \bmod 4$, ce qui démontre le lemme 32. □

On peut donc écrire $r_\alpha = 4k+2$, et $p = 16(9k^2+9k+2)$. Posons $p' = \frac{p}{16}$, $X' = \frac{X}{2}$, $Y' = 2Y$. L'égalité (1) s'écrit

$$X'^2 - p'Y'^2 \;=\; \frac{1-d}{4} \;.$$

On a donc

$$\left|\frac{X'}{Y'}\right| - \sqrt{p'} \;=\; \frac{1-d}{2\left(\sqrt{p'} + \left|\frac{X'}{Y'}\right|\right)}\frac{1}{2Y'^2} \;.$$

Comme précédemment, on peut supposer que $\left|\frac{X'}{Y'}\right|$ est aussi proche qu'on le veut de $\sqrt{p'}$. Quand $\left|\frac{X'}{Y'}\right|$ tend vers $\sqrt{p'}$, on a

$$\left|\left|\frac{X'}{Y'}\right| - \sqrt{p'}\right| \;\sim\; \left|\frac{1-d}{4\sqrt{p'}}\frac{1}{2Y'^2}\right| \;.$$

Si $d \leq 3r_\alpha - 1$, on a $\frac{d-1}{4\sqrt{p'}} < 1$, et on procède comme précédemment en considérant la fraction continue de $\sqrt{p'}$.

6.1.4 – Démonstration de b). Soient $\Delta = \Delta(r, c_1, c_2)$, $\mu = \frac{c_1}{r}$. on peut supposer que $\mu \leq \alpha$. On a, puisque M_0 est de hauteur nulle,

$$\Delta \;=\; P(\mu-\alpha) - \Delta_\alpha \;=\; \frac{1}{2}(\mu-\alpha)(\mu-\alpha+3) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2r_\alpha^2} \;,$$

d'où

$$d-1 \;=\; r^2(2\Delta - 1) \;=\; r^2\left((\mu-\alpha)(\mu-\alpha+3) + \frac{1}{r_\alpha^2}\right) \;.$$

Puisque M_0 est initiale, on a $-\frac{1}{3r_\alpha^2} < \mu - \alpha \leq 0$, donc

$$-\left(3 - \frac{1}{3r_\alpha^2}\right)\frac{1}{3r_\alpha^2} \;<\; (\mu-\alpha)(\mu-\alpha+3) \;\leq\; 0 \;,$$

d'où

$$\frac{r^2}{9r_\alpha^4} \ < \ d-1 \ \leq \ \frac{r^2}{r_\alpha^2} \ .$$

On en déduit immédiatement b).

6.1.5 – Le cas $d = 2$. D'après la proposition 30, on a $r_\alpha = 1$ et $d = 3r_\alpha - 1$, donc M_0 est isomorphe à $\mathbb{P}_2$.

6.2 – Démonstration du théorème 5

Il découle du résultat suivant d'où on déduit aussi le moyen de déterminer pratiquement les variétés de modules de hauteur non nulle de dimension donnée.

Proposition 33 : *Soit $M_0 = M(r, c_1, c_2)$ une variété de modules de hauteur $h > 0$ de fibré exceptionnel associé $F = E_\alpha$. Soit $\mu = \frac{c_1}{r}$. Alors, si $d = \dim(M_0)$, on a*

a) $r_\alpha \ < \frac{(d+1)^2}{12}$,

b) $h \ < \ \frac{(x_F^2+1)(d-1)}{6}$ *si $\mu \neq \alpha$, et sinon* $h \ < \ \frac{d-1}{2}$.

c) $r \ < \ \frac{r_\alpha(d-1)}{2h}$.

Démonstration. Démontrons d'abord c). Posons $\Delta = \Delta(r, c_1, c_2)$. On peut supposer que $\mu \leq \alpha$. On a alors $h = r_\alpha r(\Delta + \Delta_\alpha - P(\mu - \alpha))$, et $d - 1 = r^2(2\Delta - 1)$, d'où

$$h \ = \ r_\alpha r \left(\frac{d-1}{2r^2} - \frac{1}{2r_\alpha^2} - \frac{(\mu-\alpha)(\mu-\alpha+3)}{2} \right) \ .$$

Puisque $0 \leq \alpha - \mu < x_\alpha$, on a

$$-\frac{1}{2r_\alpha^2} \ < \ \frac{(\mu-\alpha)(\mu-\alpha+3)}{2} \ \leq \ 0 \ ,$$

d'où on déduit immédiatement c).

Démontrons maintenant b). Supposons que $\mu \neq \alpha$. On a d'après c), $h < \frac{r_\alpha(d-1)}{2r}$, donc il suffit de montrer que

$$r \ \geq \frac{3r_\alpha}{x_F^2+1} \ = \ \frac{1}{x_F} \ .$$

On a $\alpha - x_\alpha < \mu \leq \alpha$, et $\alpha - \mu$ est est un nombre rationnel de la forme $\frac{A}{r_\alpha r}$, avec $A \geq 1$, donc $\frac{1}{r_\alpha r} \leq x_\alpha$, c'est à dire $r \geq \frac{1}{x_F}$

Si $\mu = \alpha$, il faut montrer que $r \geq r_\alpha$, ce qui découle du fait que r_α et αr_α sont premiers entre eux.

Démontrons mainlenant a). Soit V un faisceau semi-stable sur $\mathbb{P}_2$ de rang r et de classes de Chern c_1, c_2. Soient $m = -\chi(V, E)$, $n = -\chi(S, V)$. Ces entiers ne dépendent que de r, c_1, c_2. Alors V est isomorphe à la cohomologie d'une monade du type

$$0 \longrightarrow E \otimes \mathbb{C}^m \xrightarrow{f} G \otimes \mathbb{C}^n \longrightarrow F \otimes \mathbb{C}^h \longrightarrow 0$$

d'après 2.2. Compte tenu du fait que $\dim(\mathrm{Hom}(E, G)) = 3r_\alpha$, $\dim(\mathrm{Hom}(G, F)) = 3\,\mathrm{rg}(E)$ et $\dim(\mathrm{Hom}(E, F)) = 3\,\mathrm{rg}(S)$, on a

$$d \;=\; 3r_\alpha mn + 3\,\mathrm{rg}(E)nh - 3rg(S)mh - m^2 - n^2 - h^2 + 1$$

(pour le voir on procède comme dans le cas des monades habituelles, cf. proposition (2.6) de [5]). Montrons qu'on a

$$(5) \qquad x_F \;<\; \frac{m}{n} \;\leq\; \frac{\mathrm{rg}(E)}{\mathrm{rg}(S)}\ .$$

Soient $r' = \mathrm{rg}(\mathrm{coker}(f))$, $\mu' = \mu(\mathrm{coker}(f))$. Alors on a

$$\alpha - \mu \;=\; \frac{\alpha - \mu'}{1 - \dfrac{hr_\alpha}{r'}}\ ,$$

donc on a $0 \leq \alpha - \mu' < x_\alpha$, et d'après le lemme 9 ceci équivaut à (5).

On a donc $d \geq 3r_\alpha mn - m^2 - n^2 + 1 - h^2$. D'après 2. et (3) on a

$$3r_\alpha mn - m^2 - n^2 + 1 \;\geq\; 3r_\alpha - 1\ ,$$

d'où $d \geq 3r_\alpha - h^2$, et $r_\alpha \leq \dfrac{d + h^2}{3}$. On en déduit a), compte tenu du fait qu'on a d'après b), $h < \dfrac{d-1}{2}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 33. □

Exemple : Si $d = 2$, on trouve $r_\alpha \leq \dfrac{9}{12}$, ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de variété de modules de hauteur non nulle de dimension 2.

6.3 – Démonstration du théorème 6

Soient r, c_1, c_2 des entiers, avec $r \geq 1$. On suppose que $\dim(M(r, c_1, c_2)) > 0$. Soient X une variété algébrique lisse, V un faisceau cohérent sur $X \times \mathbb{P}_2$, plat sur X. On suppose que pour tout point fermé x de X, V_x est semi-stable, de rang r et de classes de Chern c_1, c_2, et que le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaïra-Spencer $\omega_x : T_xX \to \mathrm{Ext}^1(V_x, V_x)$ est surjectif (pour un rappel des définitions et des compléments sur ω_x, voir [5], 1.6). On note X_s l'ouvert des points x de X tels que V_x soit stable. Le théorème 6 découle du résultat suivant :

Proposition 34 : *Si $M(r, c_1, c_2)$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}_5$, on a* $\mathrm{codim}_X(X \backslash X_x) \geq 2$.

Démonstration. Soient $\mu = \dfrac{c_1}{r}$, $\Delta = \Delta(r, c_1, c_2)$, Γ l'ensemble des suites $(r_1, \ldots, r_k)$, $k > 1$, d'entiers positifs de somme r telles que pour $1 \leq i \leq r$, μ et $r_i\left(P\left(\dfrac{c_1}{r}\right) - \Delta\right)$ soient des

entiers. D'après la démonstration du théorème (4.10) de [5], on a

$$\operatorname{codim}_X(X\backslash X_s) \ \geq \ \inf_{(r_i)\in\Gamma}\left(\sum_{i<j} r_i r_j(2\Delta-1)\right) \ .$$

Soit $(r_i)\in\Gamma$. Alors on a $r_i^2(2\Delta-1)\geq 1$ et $r_j^2(2\Delta-1)\geq 1$, car ces deux entiers sont de la forme $d-1$, d étant la dimension d'une variété de modules non réduite à un point. On a donc $r_i r_j(2\Delta-1)\geq 1$, et par conséquent si $\sum_{i<j} r_i r_j(2\Delta-1)<2$, on a $k=2$ et $r_1r_2(2\Delta-1)=1$, ce qui entraine $r_1=r_2$ et $r_1^2(2\Delta-1)=1$. Soit M' la variété de modules des faisceaux semi-stables de rang r_1 de pente μ et de discriminant Δ. Alors on a $\dim(M')=2$. Il découle de 6.1 et 6.2 que M' est isomorphe à $N(2,1,1)$, et par conséquent $M(r,c_1,c_2)$ est isomorphe à $N(3,2,2)$. Cette dernière variété est isomorphe à $\mathbb{P}_5$ d'après le lemme 25. Ceci démontre la proposition 34. □

Remarque : La variété de modules $M=M(2,0,2)$ est isomorphe à $\mathbb{P}_5$, et on a $\operatorname{codim}_M(M\backslash M_s(2,0,2))=1$. Par contre, $M'=M(4,-2,4)$ est aussi isomorphe à $\mathbb{P}_5$, mais on a $M_s(4,-2,4)=M'$.

APPENDICE

On donne ici la liste des variétés de modules $M(r, c_1, c_2)$ de hauteur nulle initiales, ou de hauteur non nulle, avec $\frac{c_1}{r}$ compris entre -1 et 0, et de dimension au plus 10. La détermination de cette liste est un exemple d'utilisation des propositions 30 et 33.

1 – Variétés de modules de hauteur nulle

Dimension	Variété de modules	Fibré exceptionnel associé	Propriétés
2	$M(1,0,1)$	$\mathcal{O}$	$\simeq \mathbb{P}_2$
5	$M(2,0,2)$	$\mathcal{O}$	$\simeq \mathbb{P}_5$
5	$M(4,-2,4)$	Q^*	$\simeq \mathbb{P}_5$
6	$M(4,-1,3)$	$\mathcal{O}$	lisse
8	$M(9,-4,12)$	Q^*	$\simeq \mathrm{Gr}^2(\mathbb{C}^6)$
8	$M(19,-8,40)$	Q^*	$\simeq \mathrm{Gr}^2(\mathbb{C}^6)$
9	$M(14,-6,24)$	Q^*	$\simeq \mathrm{Gr}^3(\mathbb{C}^6)$
10	$M(3,0,3)$	$\mathcal{O}$	non lisse

Exemples de suites de variétés de modules de hauteur nulle isomorphes :

$M(1,0,1) \simeq M(3,-1,2) \simeq M(8,-3,8) \simeq \cdots$
$M(2,0,2) \simeq M(6,-2,5) \simeq M(16,-6,25) \simeq \cdots$
$M(4,-2,4) \simeq M(24,-10,60) \simeq M(140,-58,1740) \simeq \cdots$
$M(4,-1,3) \simeq M(11,-4,13) \simeq M(29,-11,73) \simeq \cdots$

2 – Variétés de modules de hauteur non nulle

Dimension	Variété de modules	hauteur	Fibré exceptionnel associé	Propriétés
4	M(1,0,2)	1	$\mathcal{O}$	$\simeq \mathrm{Hilb}^2(\mathbb{P}_2)$
4	M(2,-1,2)	1	Q^*	$\simeq \mathrm{Hilb}^2(\mathbb{P}_2)$
6	M(1,0,3)	2	$\mathcal{O}$	$\simeq \mathrm{Hilb}^3(\mathbb{P}_2)$
8	M(3,-1,3)	1	$\mathcal{O}$	lisse
8	M(1,0,4)	3	$\mathcal{O}$	$\simeq \mathrm{Hilb}^4(\mathbb{P}_2)$
8	M(2,-1,3)	3	Q^*	lisse
9	M(2,0,3)	1	$\mathcal{O}$	lisse
10	M(1,0,5)	4	$\mathcal{O}$	$\simeq \mathrm{Hilb}^5(\mathbb{P}_2)$
10	M(7,-4,11)	1	Q^*	lisse
10	M(5,-3,7)	4	$E_{-\frac{1}{4}}$	lisse

Remarque : $E_{-\frac{1}{4}}$ est isomorphe au noyau du morphisme canonique $\mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{O}(2)) \to \mathcal{O}(2)$.

Références

[1] Barth, W. *Moduli of vector bundles on the projective plane.* Invent. Math. 42 (1977), 63-91.

[2] Borel, A. *Introduction aux groupes arithmétiques.* Hermann, Paris (1969).

[3] Drézet, J.-M. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 215 (1986), 25-48.

[4] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Ann. Inst. Fourier 38 (1988), 105-168.

[5] Drézet, J.-M., Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. Ec. Norm. Sup. 18 (1985), 193-244.

[6] Gieseker, D. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. of Math. 106 (1977), 45-60.

[7] Hardy, G. H., Wright, E. M. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford University Press.

[8] Hulek, K. *On the classification of stable rank-r vector bundles over the projective plane.* Vector bundles and differential equations. Progress in Math. 7 (1981), 113-144.

[9] Le Potier, J. *Sur le groupe de Picard de l'espace de modules des fibrés stables sur* $\mathbb{P}_2$. Ann. Ec. Norm. Sup. 14 (1981), 141-155.

[10] Le Potier, J. *Fibrés stables de rang 2 sur* $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. 241 (1979), 217-256.

[11] Maruyama, M. *Moduli of stable sheaves II.* J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 557-614.

[12] Mumford, D., Fogarty, J. *Geometric Invariant Theory.* Erg. der Math. Wiss. 34, Springer Berlin-Heidelberg-New York (1982).

[13] Newstead, P. E. *Introduction to moduli problems and orbit spaces.* TIFR Lect. Notes 51, Berlin-Heidelberg-New York (1978).
[14] Shafarevitch, I.R. *Basic algebraic geometry.* Grund. Math. Wiss. 213, Springer Berlin-Heidelberg-New York (1974).

Note : Ce texte reproduit l'article

Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Journ. Reine angew. Math. 380 (1987), 14-58.

avec quelques corrections d'erreurs mineures et des améliorations dans la rédaction et la bibliographie.

Des résultats analogues ont été démontrés sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ dans

Karpov, B.V. *Semistable sheaves on a two-dimensional quadric, and Kronecker modules.* Russian Acad. Sci. Izv. Math. Vol. 40,1 (1993), 33-66.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France

E-mail address: drezet@math.jussieu.fr