



HAL
open science

Lévitación d'une particule sphérique dans un tube légèrement conique : application aux rotamètres aux faibles débits

Stéphane Champmartin, Abdelhak Ambari

► **To cite this version:**

Stéphane Champmartin, Abdelhak Ambari. Lévitación d'une particule sphérique dans un tube légèrement conique : application aux rotamètres aux faibles débits. 21ème Congrès Français de Mécanique. Bordeaux, 26 au 30 août 2013, Aug 2013, France. pp.1-6. hal-00862901

HAL Id: hal-00862901

<https://hal.science/hal-00862901>

Submitted on 17 Sep 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers ParisTech researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://sam.ensam.eu>
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/7314>

To cite this version :

Stéphane CHAMPMARTIN, Abdelhak AMBARI - Lévitación d'une particule sphérique dans un tube légèrement conique : application aux rotamètres aux faibles débits - - 2013

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : archiveouverte@ensam.eu

Lévitiation d'une particule sphérique dans un tube légèrement conique : application aux rotamètres aux faibles débits

S. CHAMPMARTIN, A. AMBARI

Arts et Métiers ParisTech, 2 bd du Ronceray, 40935 ANGERS cedex 01

Résumé :

Nous étudions les conditions d'équilibre d'une particule sphérique, de flottabilité non-neutre, placée dans l'axe d'un tube conique vertical et soumise à un écoulement ascendant tel qu'on peut le rencontrer dans les rotamètres. Cette analyse se restreint aux très faibles débits et repose sur le fait qu'aux faibles nombres de Reynolds et aux forts taux de confinement, la dissipation visqueuse est principalement localisée dans l'interstice équatorial entre la sphère et le tube conique. Dans ce régime d'écoulement non inertiel, la correction de la résistance hydrodynamique subie par la sphère en régime confiné est calculée par une méthode de superposition d'états dans un écoulement localement de type Poiseuille. Dans ces conditions, nous obtenons une équation qui relie la position de la sphère dans le tube au débit mesuré. La validation de ces calculs permet dorénavant de disposer d'une assise théorique pour calibrer de tels débitmètres.

Abstract:

We propose a theoretical basis on the phenomenon of levitation of a sphere in a slightly conical tube. Using the results of our previous calculations on the effects of the hydrodynamic interactions on the Stokes force undergone by a sphere in Poiseuille flow of a Newtonian fluid, we obtain the stable equilibrium conditions of this particle according to its position in this tube. In this non inertial regime, this approach was made possible by the use of the superposition method. It is justified because the gap between the sphere and the tube is very small. Then only the surface in the vicinity of the equator of the ball contributes to the hydrodynamic force. These results allow us to give a relation between the measured flow rate according to the float vertical position in a tube constituting an industrial low flow rate rotameter.

Mots clefs : interaction hydrodynamique, tube conique, méthode de superposition, rotamètre

1 Introduction

Parmi les débitmètres les plus utilisés, les rotamètres constituent une catégorie dont la gamme de débits mesurables est très large. Ils sont reconnus pour leur précision, robustesse et facilité de mise en œuvre. De plus amples informations sur ce type de débitmètres peuvent être obtenues dans [1,2]. Dans cette étude, nous nous intéressons particulièrement à ce genre de débitmètre dans le cas des très faibles débits. En effet, leur mode de fonctionnement est basé sur la mise en lévitation d'une bille, pouvant être constituée de différents matériaux (verre, saphir, acier, tantale, carboloy...), sous l'action de son poids et de celle de l'écoulement ascendant ayant lieu dans un tube vertical très légèrement conique. En fait, la bille va léviter à une hauteur z telle que le poids de la bille équilibre la force hydrodynamique qui dépend du débit et du confinement dans le tube : $k(z) = a / b(z)$ où a est le rayon de la sphère et $b(z)$ le rayon local du tube conique vertical. Jusqu'à présent l'utilisation de ces débitmètres était tributaire d'un étalonnage, mais le principe physique sous-jacent de son fonctionnement n'était pas complètement établi, aux faibles nombres de Reynolds notamment. Pour pallier cela, nous proposons une analyse théorique et des formules prédictives pouvant aider à la

conception et au calibrage de rotamètres aux faibles nombres de Reynolds.

2 Formulation

Aux faibles nombres de Reynolds, une particule sphérique placée dans l'axe d'un tube de section constante dans un écoulement de Poiseuille subit une force hydrodynamique :

$$F = 6\pi\mu a V_{\max} \lambda(k) \quad \text{et} \quad \text{Re} = \frac{\rho_f V_{\max} a}{\mu} \ll 1$$

où V_{\max} est la vitesse maximale de l'écoulement dans l'axe du tube, ρ_f est la masse volumique et μ la viscosité du fluide et $\lambda(k)$ le facteur de correction de la force de Stokes $F_s = 6\pi\mu a V_{\max}$ due au confinement de la particule. Ce facteur a été calculé par de nombreux auteurs [3-13]. L'analyse de cette bibliographie ainsi que nos propres calculs montrent que le facteur $\lambda(k)$ peut être estimé avec une très grande précision dans la gamme $0,05 < k < 0,99$ par l'expression :

$$\lambda(k) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16} (1-k)^{-5/2} \left[1 + \frac{7}{60} (1-k) - \frac{2,227}{50,4} (1-k)^2 \right] + \frac{1}{12\pi} \left[4,018 - 3,9788k - 1,9215k^2 + 4,392k^3 + 5,006k^4 \right] \quad (1)$$

Par ailleurs l'équilibre de la particule en lévitation est décrit par l'égalité de son poids apparent et de la force F :

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \Delta\rho g = 6\pi\mu a V_{\max} \lambda(k) \quad (2)$$

avec $\Delta\rho = (\rho_p - \rho_f) > 0$ dans le cas où la bille, de masse volumique ρ_p , est plus dense que le fluide (remarquons que le système pourrait également fonctionner avec un écoulement descendant avec $\Delta\rho < 0$). En introduisant le débit-volumique $Q = \bar{V} \pi b^2$ où $\bar{V} = 2V_{\max}$ est la vitesse débitante, la relation (2) s'écrit encore sous la forme :

$$\frac{Q}{Q^*} = \frac{\pi b^2 \bar{V}}{\pi a^2 V_s} = \frac{1}{2k^2 \lambda(k)} = f(k) \quad (3)$$

Dans cette équation, $V_s = 2a^2 \Delta\rho g / 9\mu$ est la vitesse de sédimentation de la sphère et $Q^* = \pi a^2 V_s$ correspond au débit du contre-écoulement (ou « backflow ») engendré par la sédimentation de la particule dans un milieu illimité aux faibles nombres de Reynolds. Le débit adimensionnel $f(k)$ ne dépend alors que du confinement k . Dans le cas d'un tube cylindrique de section constante, l'équilibre correspondant à l'expression (2) est indifférent. Dans ces conditions, afin d'obtenir un équilibre stable, un tube conique est utilisé. Il est caractérisé par un rayon local $b(z)$ évoluant comme :

$$b(z) = b_0 + \tan(\beta) z$$

où b_0 est le rayon intérieur du tube à $z=0$ et β le demi-angle au sommet. Le confinement $k(z) = a/b(z)$ de la bille est donc variable et dépend de la position verticale de celle-ci (Fig.1).

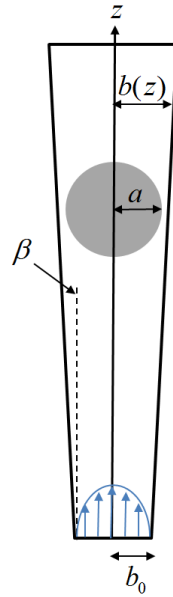


Figure 1 : Schéma du système

Cependant dans le type de rotamètre étudié ici, la sphère est toujours en situation très confinée et la dissipation est localisée au voisinage de la zone équatoriale entre la paroi et la sphère [13]. On peut alors considérer que celle-ci ne ressent que l'influence du confinement local qui porte sur une hauteur Δz très faible. Dans ces conditions, la formule (1) peut être utilisée localement pour calculer $f[k(z)] = 1/2k(z)^2 \lambda[k(z)]$ et la méthode de superposition se trouve justifiée. Dans cette hypothèse, la position d'équilibre est encore solution de l'équation (1) et l'équation (3) prend la forme :

$$\frac{Q}{Q^*} = \frac{1}{2k(z)^2 \lambda[k(z)]} = f[k(z)] \quad (4)$$

et la figure 2 montre l'évolution de $f[k(z)]$. Cette expression donne le lien entre le débit mesuré Q et la position z de la bille correspondant à son équilibre stable dans la mesure où l'on connaît a priori la loi d'évolution de $b(z)$, c'est-à-dire de $k(z)$. L'utilisation de la relation (4) permet soit de dimensionner un rotamètre, soit de le calibrer comme cela est discuté dans la prochaine section.

3 Analyse et calibration

3.1 Détermination des paramètres géométriques du tube

Afin de vérifier cette approche analytique, nous avons utilisé la courbe de calibration d'un rotamètre industriel. Il s'agit d'un rotamètre à faible débit de marque Aalborg Instruments and Controls. Le tube considéré (numéro N°112-02-N) est un tube en verre borosilicaté épais gradué d'une échelle millimétrique allant de $z = 0 \text{ mm}$ à $z = 150 \text{ mm}$. D'après le fabricant, la précision en débit est de $\pm 2\%$ de la pleine échelle. Cependant le rayon intérieur du tube $b(z)$ correspondant à chaque graduation n'est pas fourni. N'étant pas directement accessible à la mesure sans détruire le tube, nous utilisons la courbe de calibration donnée par Aalborg pour le déduire. Le fabricant fournit la courbe de calibration présentée dans la figure 3 pour de l'eau à une température de $T = 21,1 \pm 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\mu = 0,976 \pm 0,005 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ et $\rho_f = 998 \pm 5 \text{ kg/m}^3$) et une bille d'acier de rayon $a = 1,588 \pm 0,005 \text{ mm}$ et de masse volumique $\rho_p = 8040 \pm 10 \text{ kg/m}^3$. Il est à noter dans la figure 3 que l'évolution du débit n'est pas une fonction linéaire de l'échelle de mesure et ne passe pas par

l'origine.

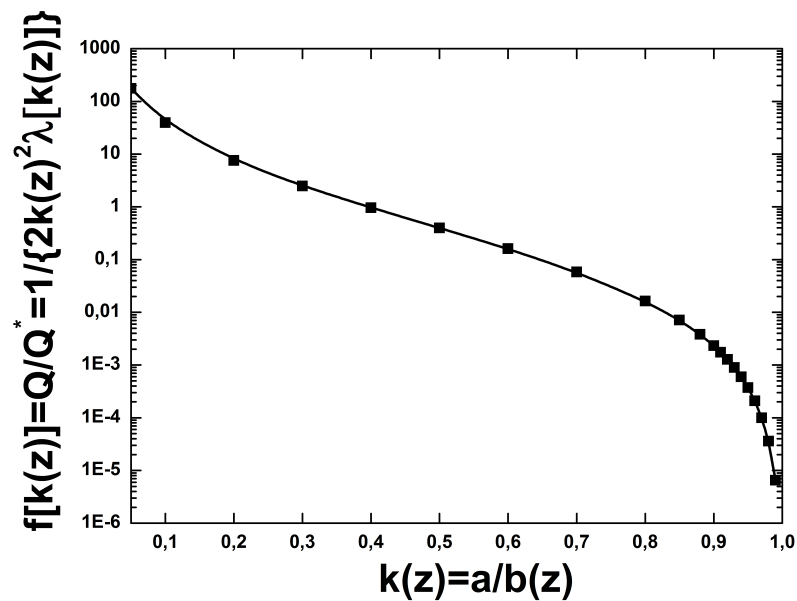


Figure 2 : Evolution de $f[k(z)]$

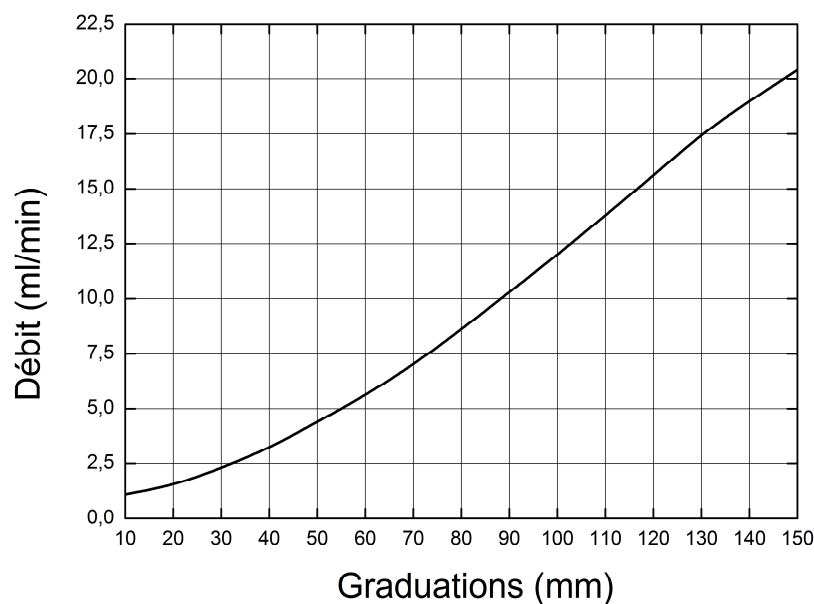


Figure 3 : Courbe de calibration du tube Aalborg N°112-02-N pour de l'eau et une bille d'acier

A partir de ces valeurs, on calcule le débit caractéristique $Q^* = (18,83 \pm 0,37)10^3 \text{ mL/min}$. Dans une seconde étape, nous utilisons la courbe de calibration (fig. 3) pour évaluer, pour chaque débit $Q(z)$, la fonction $f[k(z)] = Q(z)/Q^*$. L'étape suivante consiste en l'utilisation des équations (1) et (3) pour calculer le paramètre $k(z)$. Finalement, le rayon du tube $b(z) = a/k(z)$ est déduit. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 1. On note à cette occasion que le confinement est très grand ($k(z) \approx 1$) et varie peu entre les extrémités du tube (environ 5%). Ceci confirme encore la validité de la méthode de superposition. La figure 4 montre l'évolution du rayon $b(z)$ avec la graduation z . On constate que dans une très large gamme, le rayon varie linéairement avec z ce qui correspond à un tube conique comme attendu. Les derniers points qui ne suivent pas cette linéarité sont obtenus aux plus forts débits et il est probable qu'ils correspondent à des régimes

d'écoulement où l'inertie entre en jeu et pour lesquels notre approche analytique cesse d'être valable.

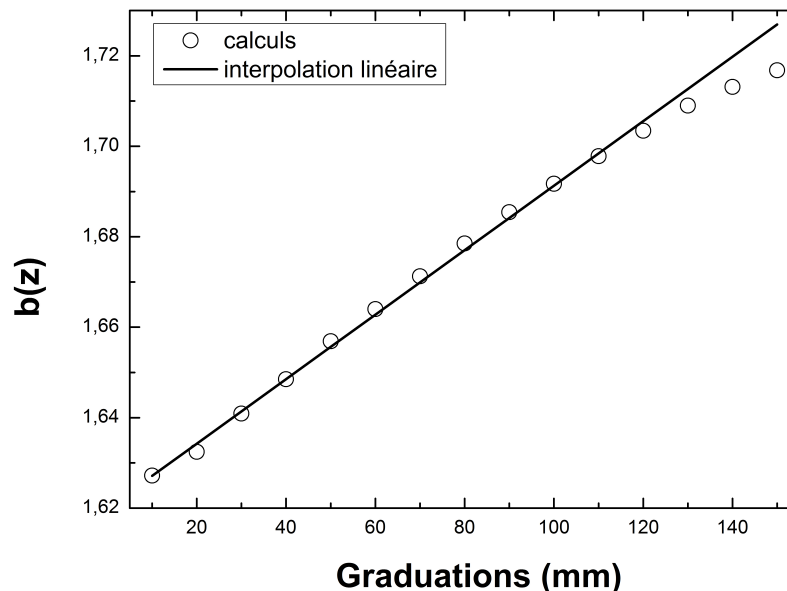
Q (ml/min)	1,1	1,5	2,3	3,2	4,4	5,6	7,0	8,6	10,3	12,0	13,8	15,6	17,5	19,0	20,4
z (mm)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
$k(z)$	0,976	0,972	0,967	0,963	0,958	0,954	0,950	0,946	0,942	0,938	0,935	0,932	0,929	0,927	0,925
$b(z)$ (mm)	1,627	1,632	1,641	1,649	1,657	1,664	1,671	1,679	1,685	1,692	1,698	1,703	1,709	1,713	1,717

Tableau 1

A partir de la figure 4 nous pouvons donc estimer les paramètres b_0 et β . On obtient :

$$b_0 = 1,620 \text{ mm} \text{ et } \beta = 0,041^\circ$$

La faible valeur de l'angle β justifie encore une fois la possibilité d'utiliser la méthode de superposition.

Figure 4 : Evolution de $b(z) = a / k(z)$

3.2 Validation de l'approche théorique

Dans une seconde étape, connaissant les caractéristiques géométriques du tube, nous les utilisons afin de reconstruire la courbe de calibration correspondant à une autre bille. Il s'agit d'une bille de verre ($\rho_p = 2530 \pm 5 \text{ kg/m}^3$) à la place de celle en acier. Le fluide utilisé est toujours l'eau. Un nouveau débit caractéristique est calculé $Q^* = 4096 \pm 81 \text{ ml/min}$. La procédure est la même que celle employée dans la section précédente mais dans l'ordre inverse : à partir d'une position z , on calcule $b(z)$ puis $k(z)$. La fonction $f[k(z)]$ est ensuite évaluée puis finalement $Q = Q^* f[k(z)]$ est calculé. Sur la figure 5, une comparaison est donnée entre nos résultats de calcul et la courbe de calibration donnée par Aalborg. On y remarque un bon accord entre les deux courbes ce qui confirme la pertinence de cette approche.

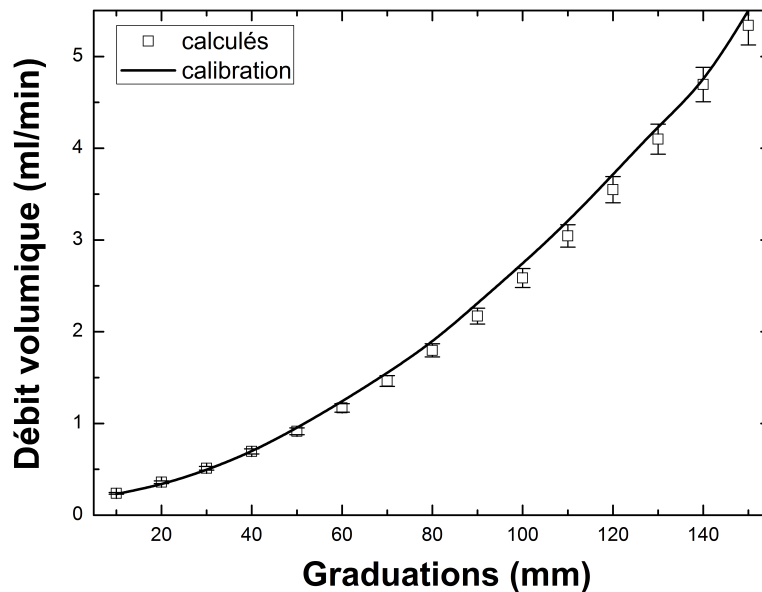


Figure 5 : Comparaison de la courbe de calibration calculée et fournie par Aalborg

4 Conclusion

Nous venons de proposer une assise théorique au phénomène de lévitation d'une sphère dans un tube légèrement conique. Utilisant les résultats de nos calculs précédents sur les effets du confinement sur la force de Stokes que subit une sphère en écoulement de Poiseuille, nous avons obtenu les conditions d'équilibre de cette particule en fonction de sa position dans ce tube. Cette approche a été rendue possible par l'utilisation de la méthode de superposition que l'on justifie par le fait que lorsque le confinement est très fort seule la surface au voisinage immédiat de l'équateur de la bille participe à la force hydrodynamique qu'elle subit. Ces résultats nous ont permis de donner une relation reliant le débit mesuré en fonction de sa position dans un tube constituant un rotamètre. Après le succès d'une confrontation de nos calculs avec ceux expérimentaux de calibration correspondant à un rotamètre industriel, nous pouvons dorénavant utiliser les résultats de cette étude pour dimensionner des rotamètres à faible débit.

References

- [1] Goldstein R.J., Fluid Mechanics Measurements (CRC Press 2nd edition), 314, 1996.
- [2] Webster J.G., The Measurement, Instrumentation, and Sensors Handbook (CRC Press; 1st edition), 28-13, 1998.
- [3] Ladenburg R., Ann. Phys 23, 447, 1907.
- [4] Faxén H., Ark. Mat. Astron. Fys., 17, 1, 1922.
- [5] Wakiya S., A J. Phys. Soc. Jap 8, 254, 1953.
- [6] Happel J. and Byrne B.J., Ind. Eng. Chem. 46, 1181, 1954.
- [7] Happel J. and Brenner H., Low Reynolds Number Hydrodynamics (Prentice Hall Englewood Cliff), 1965.
- [8] Haberman W.L. and Sayre R.M., "Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes", Rep. N°1143, Davis Taylor Model Basin, US Navy, Washington DC, 1958.
- [9] Bohlin T., Trans. Roy. Inst. Technol., Stockholm 155, 1, 1960.
- [10] Wang H. and Skalak R., J. Fluid Mech. 38, 75, 1969.
- [11] Ambari A., Gauthier-Manuel B. and Guyon E., Phys. of Fluids, 28(5), 1559, 1985.
- [12] Bungay P.M. and Brenner H., Int. J. Multiphase Flow 1, 25, 1973.
- [13] Ben Richou A., Ambari A. and Naciri J.K., Eur. Phys. Appli. Phys. **24**, 153, 2003.