



**HAL**  
open science

## Modes non-linéaires de structures élastiques dotées de non-linéarités de contact

El Hadi Moussi, Sergio Bellizzi, Bruno Cochelin, Ionel Nistor

► **To cite this version:**

El Hadi Moussi, Sergio Bellizzi, Bruno Cochelin, Ionel Nistor. Modes non-linéaires de structures élastiques dotées de non-linéarités de contact. 11e Colloque National en Calcul des Structures - CSMA 2013, May 2013, Giens, France. pp.Clé USB. hal-00861462

**HAL Id: hal-00861462**

**<https://hal.science/hal-00861462v1>**

Submitted on 12 Sep 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modes non-linéaires de structures élastiques dotées de non-linéarités de contact

El Hadi MOUSSI <sup>1,2</sup>, Sergio BELLIZZI <sup>1</sup>, Bruno COCHELIN <sup>1</sup>, Ionel NISTOR <sup>2</sup>

<sup>1</sup> LMA, CNRS, UPR 7051, Centrale Marseille, Aix-Marseille Univ, F-13402 Marseille Cedex 20, France

<sup>2</sup> LaMSID, UMR EDF-CNRS-CEA 8193, 1 Avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart, France

**Résumé** — Cet article propose une méthode de calcul des modes non-linéaires de structures élastiques dotées de non-linéarités de contact localisées. Les lois de contact sont régularisées au moyen de relations polynomiales comportant un paramètre de régularisation. La procédure de calcul est basée sur le couplage de la méthode de balance harmonique et de la méthode asymptotique numérique.

**Mots clés** — mode non-linéaire, contact, régularisation

## 1 Introduction

Pour EDF, la sécurité en exploitation des moyens de production d'électricité est un enjeu majeur. La maîtrise des comportements des structures vibrantes dotées de non-linéarités de contact passe par la recherche et le développement de nouvelles méthodes d'analyses et de simulations numériques. Dans ce contexte, on explore le concept de modes non-linéaires (MNLs) pour mettre en évidence des comportements liés à la présence de ces non-linéarités.

## 2 Modélisation et procédure numérique

On rappelle qu'on peut définir un mode non-linéaire comme une variété invariante de dimension deux dans l'espace des phases [16]. De plus, des méthodes numériques associées à cette définition existent [8]. Toutefois, on choisit ici de se placer dans un cadre conservatif où la définition d'un MNL peut-être réduite à celle d'une famille de solutions périodiques [9]. Ainsi, on peut accéder à des méthodes performantes et robustes pour le calcul, et traiter à terme des cas industriels. Dans ce cadre, on choisit de combiner la méthode de balance harmonique (MBH) [3] et de la méthode asymptotique numérique (MAN) implémenté dans le package MANLAB [1].

On s'intéresse ici au cas des structures avec des non-linéarités localisées de contact qu'on choisit de modéliser à l'aide de butées élastiques avec jeu, et dont on propose la régularisation sous une forme implicite par des équations algébriques ajoutées au système différentiel à résoudre. La procédure de régularisation est inspirée des travaux développés dans [6] dédiés aux problèmes de contact en statique.

La procédure de calcul décrite dans [3] n'est pas adaptée à notre problème en question qui va nécessiter un grand nombre d'harmoniques pour décrire les forces. Nous proposons une procédure numérique qui utilise l'algorithme FFT dans le couplage MBH-MAN et qui permet de choisir un nombre d'harmoniques différent pour les variables déplacement et les variables force.

### 2.1 Modèle mécanique global

On considère un système mécanique non-linéaire autonome à  $\mathbf{nd}$  degrés de liberté, issu d'un modèle continu discrétisé par éléments finis, caractérisé par les équations du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}\mathbf{U}(\mathbf{t}) + \mathbf{F}_{\mathbf{nl}}(\mathbf{U}(\mathbf{t})) = \mathbf{0} \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur et  $\mathbf{F}_{\mathbf{nl}}$  la fonction modélisant les forces non-linéaires. On se place dans le cadre de non-linéarités localisées, c'est-à-dire que les forces s'appliquent

sur un nombre relativement faible de degrés de liberté. On notera  $\mathbf{I}_{nl}$  l'ensemble des indices de ces degrés de liberté, et  $\mathbf{I}_l$  son complémentaire, c'est-à-dire  $\{1, \dots, nd\} = \mathbf{I}_{nl} \cup \mathbf{I}_l$ . La taille du vecteur  $\mathbf{I}_{nl}$  est égale à  $ns$ .

Pour une application aisée de la MBH et de la MAN, on choisit comme préconisé dans [3] de réécrire le système de tel sorte que les non-linéarités ne soit au plus que quadratiques. Pour cela, on va introduire deux vecteurs d'inconnues supplémentaires  $\mathbf{F}(\mathbf{t})$  et  $\mathbf{Z}(\mathbf{t})$ , ainsi que des équations supplémentaires pour définir ces vecteurs. Le vecteur  $\mathbf{F}(\mathbf{t})$  décrit la force de contact et le vecteur  $\mathbf{Z}(\mathbf{t})$  appelé vecteur des variables auxiliaires permet la réécriture sous une forme quadratique si nécessaire (cf. section 2.2.2). Le vecteur  $\mathbf{Z}(\mathbf{t})$  est de taille  $nz$ . Cette réécriture relativement abstraite sera détaillée par le biais d'exemples dans la section (2.2).

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{t}) + \mathbf{K}\mathbf{U}(\mathbf{t}) + \mathbf{F}(\mathbf{t}) & = 0 \\ \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{t}), \mathbf{Z}(\mathbf{t}), \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{t})) & = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Les vecteurs  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{t})$  et  $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{t})$  sont respectivement des vecteurs restreint de  $\mathbf{F}(\mathbf{t})$  et  $\mathbf{U}(\mathbf{t})$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{F}|_{\mathbf{I}_{nl}}(\mathbf{t}) \\ \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{t}) &= \mathbf{U}|_{\mathbf{I}_{nl}}(\mathbf{t}) \end{aligned} \quad (3)$$

Pour simplifier l'écriture, on introduit le vecteur  $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{2ns+nz}$  :

$$\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = [\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{t}), \mathbf{Z}(\mathbf{t}), \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{t})] \quad (4)$$

$\mathbf{G}$  étant quadratique, on décompose de la manière suivante :

$$\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{t})) = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_l(\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{t})) + \mathbf{G}_q(\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{t}), \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{t})) \quad (5)$$

où  $\mathbf{G}_0$  est un vecteur constant,  $\mathbf{G}_l$  est un opérateur linéaire et  $\mathbf{G}_q$  un opérateur quadratique.

## 2.2 Quelques exemples de forces non-linéaires

On propose ici quelques exemples de régularisation qui sont compatibles avec la réécriture du système (1) sous la forme (2) avec des non-linéarités au plus quadratiques.

### 2.2.1 Non-linéarité de contact unilatéral

La non-linéarité de contact unilatéral, sous sa forme non-régulière, s'écrit :

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}(\mathbf{t})) = \begin{cases} \alpha(\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{g}) & \text{si } \mathbf{u}(\mathbf{t}) \geq \mathbf{g} \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{u}(\mathbf{t}) \leq \mathbf{g} \end{cases} \quad (6)$$

où  $\alpha$  est la raideur de contact,  $\mathbf{g}$  le jeu entre le noeud de la structure et le point de contact. La régularisation proposée s'écrit sous la forme implicite suivante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{t})(\mathbf{f}(\mathbf{t}) - \alpha(\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{g})) = \alpha\eta \quad (7)$$

où  $\eta$  représente le paramètre de régularisation. L'Eq. (7) a deux solutions dans le plan  $(\mathbf{f}, \mathbf{u})$ , dont une seule est physique. Le choix de branche est effectué lors de l'initialisation de l'algorithme proposé dans la section 2.3.

### 2.2.2 Non-linéarité de contact bilatéral

La non-linéarité de contact bilatéral, sous sa forme non-régulière, s'écrit :

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}(\mathbf{t})) = \begin{cases} \alpha(\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{g}) & \text{si } \mathbf{u}(\mathbf{t}) \geq \mathbf{g} \\ \mathbf{0} & \text{si } |\mathbf{u}(\mathbf{t})| \leq \mathbf{g} \\ \alpha(\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{g}) & \text{si } \mathbf{u}(\mathbf{t}) \leq \mathbf{g} \end{cases} \quad (8)$$

où  $\alpha$  est la raideur de contact,  $\mathbf{g}$  le jeu entre le noeud de la structure et le point de contact. La régularisation proposée, écrit la non-linéarité sous la forme implicite suivante :

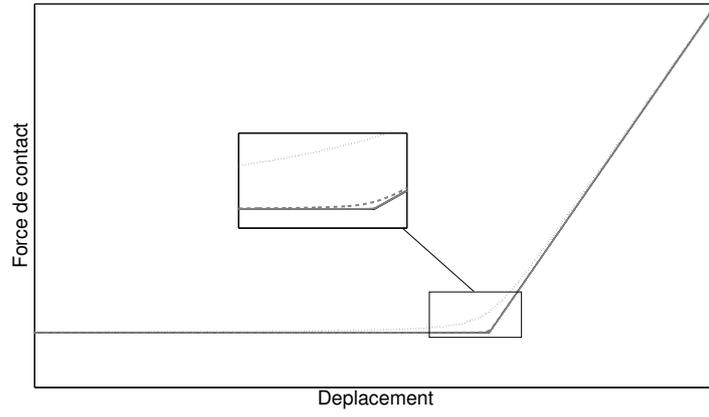


Fig. 1 – Comparaison de la force de contact unilatéral non-régulière obtenue avec l'Eq. 6 (en noir) et régularisée avec l'Eq. 7 (en gris), pour différente valeurs de  $\eta$ . Valeurs des paramètres :  $\alpha = 30$ ,  $\eta = 5 \times 10^{-5}$  (en continue),  $\eta = 0.005$  (en discontinu),  $\eta = 0.5$  (en pointillées).

$$\mathbf{f}(\mathbf{t})(\mathbf{f}(\mathbf{t}) - \alpha(\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{g}))(\mathbf{f}(\mathbf{t}) - \alpha(\mathbf{u}(\mathbf{t}) + \mathbf{g})) = -\alpha^2\eta\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad (9)$$

qu'on peut récrire, en introduisant une variable auxiliaire  $\mathbf{z}(\mathbf{t})$ , sous la forme quadratique suivante :

$$\begin{cases} \alpha^2\mathbf{g}^2\mathbf{f}(\mathbf{t}) - \eta\alpha^2\mathbf{u}(\mathbf{t}) - \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{z}(\mathbf{t}) & = 0 \\ \mathbf{z}(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}(\mathbf{t}) - \alpha\mathbf{u}(\mathbf{t}))^2 & = 0 \end{cases} \quad (10)$$

où  $\eta$  représente le paramètre de régularisation. L'Eq. (10) a trois solutions dans le plan  $(\mathbf{f}, \mathbf{u})$ , dont une seule est physique. Le choix de branche est effectué lors de l'initialisation de l'algorithme proposé dans la section 2.3.

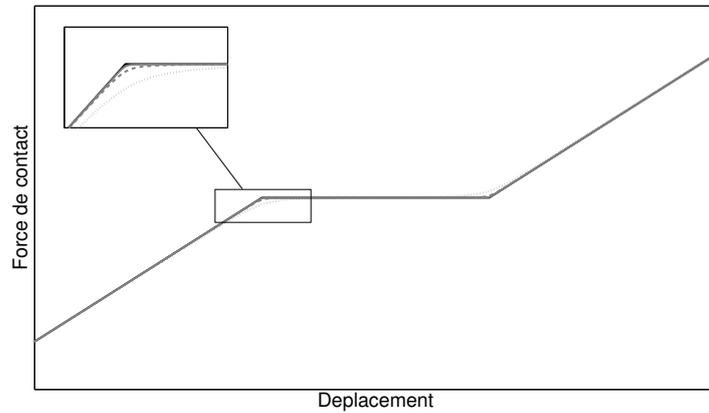


Fig. 2 – Comparaison de la force de contact bilatéral non-régulière obtenue avec l'Eq. 8 (en noir) et régularisée avec l'Eq. 10 (en gris), pour différente valeurs de  $\eta$ . Valeurs des paramètres :  $\alpha = 30$ ,  $\eta = 0.005$  (en continue),  $\eta = 0.05$  (en discontinu),  $\eta = 0.5$  (en pointillées).

### 2.3 Procédure numérique pour le calcul des modes non-linéaires

Après une description de la procédure de calcul et des améliorations qui ont été apportées, nous ferons un état des lieux des outils numériques développés.

### 2.3.1 Les étapes de la procédure

On cherche les solutions périodiques du système (2), en écrivant le vecteur  $\mathbf{U}(\mathbf{t})$  à l'aide d'une série de Fourier que l'on tronque à l'ordre  $\mathbf{H}_U$  (en supposant que l'influence des harmoniques supérieures est négligeable).

$$\mathbf{U}(\mathbf{t}) = \mathbf{U}_0 + \sum_{k=1}^{\mathbf{H}_U} \mathbf{U}_{ck} \cos(k\omega \mathbf{t}) + \mathbf{U}_{sk} \sin(k\omega \mathbf{t}) \quad (11)$$

On effectue le même développement pour les vecteurs d'inconnues  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{t})$  et  $\mathbf{Z}(\mathbf{t})$  introduit dans la section (2.1). Mais, on choisit de tronquer ces vecteurs à un nombre d'harmoniques différent, appelée  $\mathbf{H}_F$ . Dans la plupart des cas, on choisira  $\mathbf{H}_F \gg \mathbf{H}_U$ , car les fonctions  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{t})$  varient plus brutalement (en particulier pour le contact) que les fonctions  $U(t)$  sur une période :

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{F}}_0 + \sum_{k=1}^{\mathbf{H}_F} \tilde{\mathbf{F}}_{ck} \cos(k\omega \mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{F}}_{sk} \sin(k\omega \mathbf{t}) \quad (12)$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{t}) = \mathbf{Z}_0 + \sum_{k=1}^{\mathbf{H}_F} \mathbf{Z}_{ck} \cos(k\omega \mathbf{t}) + \mathbf{Z}_{sk} \sin(k\omega \mathbf{t}) \quad (13)$$

L'introduction de  $\mathbf{H}_U$  et  $\mathbf{H}_F$  implique un traitement particulier pour l'équilibrage. En effet, la première équation du système (2) sera équilibrée avec  $\mathbf{H}_U$  harmoniques, ce qui impose de ne pas tenir compte des coefficients de Fourier au-delà des  $\mathbf{H}_U$  premières harmoniques pour le vecteur  $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ . De manière symétrique, pour traiter la deuxième équation du système (2) on équilibre avec  $\mathbf{H}_F$  harmoniques. Les inconnues  $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{t})$  ayant été tronquées à  $\mathbf{H}_U$  ( $\ll \mathbf{H}_F$ ) harmoniques, on peut passer outre la difficulté en considérant que les coefficients correspondant aux harmoniques strictement supérieures à  $\mathbf{H}_U$  sont nuls.

Après avoir effectué l'équilibrage harmonique, avec les spécificités introduites auparavant, on obtient *in fine* un système algébrique sous-déterminé dont les inconnues sont les coefficients de Fourier de  $\mathbf{U}(\mathbf{t})$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{t})$  et  $\mathbf{Z}(\mathbf{t})$  et l'inconnue supplémentaire introduite lors du développement en série de Fourier (cf. Eqs. 11-12-13), la fréquence angulaire  $\omega$ . On regroupe ces inconnues dans un vecteur appelé  $\mathbf{S}$  de taille  $\mathbf{nd}(2\mathbf{H}_U + 1) + (2\mathbf{ns} + \mathbf{nz})(2\mathbf{H}_F + 1) + 1$  :

$$\mathbf{R}(\mathbf{S}) = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}(\mathbf{S}) + \mathbf{Q}(\mathbf{S}, \mathbf{S}) = \mathbf{0} \quad (14)$$

où  $\mathbf{L}_0$  regroupe tous les termes constant du système algébrique,  $\mathbf{L}$  les termes linéaires et  $\mathbf{Q}$  les termes quadratiques. On peut alors utiliser la MAN tel qu'indiqué dans [3]. Pour cela, on développe en série entière le vecteur d'inconnues  $\mathbf{S}$  en fonction d'un paramètre de chemin  $\mathbf{a}$  :

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \mathbf{S}_0 + \sum_{k=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{a}^k \mathbf{S}_k \quad (15)$$

où  $\mathbf{S}_0$  correspond au vecteur d'initialisation de l'algorithme, et  $\mathbf{S}_k$  pour  $k = 1, \dots, \mathbf{N}$  sont les coefficients de la série entière qu'il reste à déterminer. Ensuite, on développe en série de Taylor la fonction  $\mathbf{R}$ , au voisinage du vecteur d'initialisation  $\mathbf{S}_0$  :

$$\mathbf{0} = \mathbf{R}(\mathbf{S}(\mathbf{a})) = \mathbf{R}(\mathbf{S}_0) + \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{S}}(\mathbf{S}_0)\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \mathbf{R}(\mathbf{S}_0) + \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{S}}(\mathbf{S}_0) \left( \sum_{k=1}^{\mathbf{N}} \mathbf{a}^k \mathbf{S}_k \right) \quad (16)$$

La relation (16) étant vraie quelque soit  $\mathbf{a}$ , on passe alors à la résolution d'une suite de  $\mathbf{N}$  systèmes linéaires possédant la même matrice tangente, dépendant les uns des autres de manière récursive. La résolution de ces systèmes permet d'obtenir les vecteur  $\mathbf{S}_k$ . A noter qu'on peut calculer analytiquement cette matrice car la fonction  $\mathbf{R}$  est quadratique :

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{S}}(\mathbf{S}_0)\mathbf{e}_i = \mathbf{L}(\mathbf{e}_i) + \mathbf{Q}(\mathbf{e}_i, \mathbf{S}_0) + \mathbf{Q}(\mathbf{S}_0, \mathbf{e}_i) \quad (17)$$

où  $\mathbf{e}_i$  est le vecteur de la base canonique. On obtient ainsi une branche de solutions  $\mathbf{S}(\mathbf{a})$  avec  $\mathbf{a} \in [0, \mathbf{a}_{\max}]$ , où  $\mathbf{a}_{\max}$  représente le domaine de validité de la série entière (15). Dès lors, on peut obtenir les branches de solutions périodiques qui forment les modes non-linéaires du modèle introduit par le système d'Eqs. (2).

La deuxième amélioration consiste à introduire l'algorithme Fast Fourier Transform (FFT) pour traiter les termes quadratiques. En effet, dans [3], le passage en quadratique permet de traiter analytiquement le produit entre deux inconnues (cf.  $\mathbf{G}_q$  dans la section (2.1)) tout en restant dans le domaine de Fourier. Cette opération a été identifiée comme relativement coûteuse lorsque le nombre d'harmoniques et/ou le nombre de degrés de liberté est élevé. Aussi, on propose ici l'utilisation de l'algorithme FFT (et iFFT), encore appelée Alternating Fourier Transform (AFT). La méthode consiste à repasser dans le domaine temporel les variables  $\{\tilde{\mathbf{U}}_0 \tilde{\mathbf{U}}_{c1} \dots \tilde{\mathbf{U}}_{cH_U} \tilde{\mathbf{U}}_{s1} \dots \tilde{\mathbf{U}}_{sH_U}\}$ ,  $\{\tilde{\mathbf{F}}_0 \tilde{\mathbf{F}}_{c1} \dots \tilde{\mathbf{F}}_{cH_F} \tilde{\mathbf{F}}_{s1} \dots \tilde{\mathbf{F}}_{sH_F}\}$  et  $\{\mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_{c1} \dots \mathbf{Z}_{cH_F} \mathbf{Z}_{s1} \dots \mathbf{Z}_{sH_F}\}$  à l'aide de l'iFFT. Durant cette procédure on passe à une discrétisation plus fine, c'est-à-dire un nombre de pas de temps égale à  $4\mathbf{H}_F + \mathbf{1}$ . Ensuite, il suffit d'appliquer la fonction  $\mathbf{G}_q$ . Pour finir, on repasse dans le domaine de Fourier à l'aide de la FFT. Cette méthode reste relativement classique [13, 7, 5], le choix d'utiliser une discrétisation plus fine lorsqu'on revient dans le domaine temporelle est habituellement un choix décisif pour avoir la meilleure description possible de la non-linéarité dans le domaine de Fourier. Toutefois, dans notre cas la non-linéarité est quadratique, on est donc capable par le biais du théorème de Shannon [14] d'identifier la discretisation optimale ( $4\mathbf{H}_F + \mathbf{1}$  pas de temps) et ainsi prouver l'équivalence avec la méthode analytique proposé dans [3]. L'usage de l'AFT doit être vue comme un accélérateur de performance pour le calcul des séries de la MAN.

La principale difficulté lorsqu'on calcul des modes non-linéaires, à l'aide de méthodes de continuation, se trouve au voisinage des bifurcations qui sont dues aux résonances internes [10]. Pour outrepasser la difficulté, on applique une amélioration récente de la MAN [2] qui consiste à utiliser l'apparition de série géométrique dans la représentation en série entière (cf Eq. 15) comme indicateur pour localiser les bifurcations simples et améliorer la robustesse de la méthode à leurs voisinages.

### 2.3.2 Outils numériques et logiciels

La procédure ci-dessus a été implementée dans MATLAB à partir du logiciel MANLAB [1]. La prochaine version du logiciel intégrera les améliorations, permettant ainsi d'avoir un outil avec une interface graphique qui peut-être utilisé pour des systèmes de petite taille.

L'implémentation de la méthode a été également effectuée dans le logiciel libre *Code\_Aster* [4], permettant l'accès à tous la bibliothèque d'éléments finis du logiciel. Cette méthode apparaîtra sous la forme d'un nouvel opérateur appelé `MODE_NON_LINE`. Elle permettra d'utiliser la méthode pour traiter des structures à grand nombre de degrés de liberté, comme par exemple [17]. La liste de non-linéarités proposées se limitera au cadre du contact.

## 3 Applications

### 3.1 Système à 2 ddls avec contact bilatéral

On traite dans un premier temps un système à 2 ddls avec contact bilatéral sur une masse, semblable à celui dans [12]. Les équations du mouvements sont, et où la régularisation (10) a été utilisé :

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1 \ddot{\mathbf{U}}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{k}_1 \mathbf{U}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{k}_2 (\mathbf{U}_1(\mathbf{t}) - \mathbf{U}_2(\mathbf{t})) + \mathbf{f}(\mathbf{t}) & = 0 \\ \mathbf{m}_2 \ddot{\mathbf{U}}_2(\mathbf{t}) + \mathbf{k}_2 (\mathbf{U}_2(\mathbf{t}) - \mathbf{U}_1(\mathbf{t})) & = 0 \\ \alpha^2 \mathbf{g}^2 \mathbf{f}(\mathbf{t}) - \eta \alpha^2 \mathbf{U}_1(\mathbf{t}) - \mathbf{f}(\mathbf{t}) \mathbf{z}(\mathbf{t}) & = 0 \\ \mathbf{z}(\mathbf{t}) - (\mathbf{f}(\mathbf{t}) - \alpha \mathbf{U}_1(\mathbf{t}))^2 & = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Ce système permet de caractériser plusieurs phénomènes inhérents aux structures avec non-linéarités de chocs localisées qu'on sera amené à étudier par la suite. Une étude complète de ce système a été effectué dans [15]. Pour les valeurs suivantes :  $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{g} = \mathbf{1}$ ,  $\eta = \mathbf{0.005}$  et  $\alpha = \mathbf{30}$ , on obtient les deux modes non-linéaires représentés sous la forme d'un graphique fréquence-énergie, comme préconisé dans [9] :

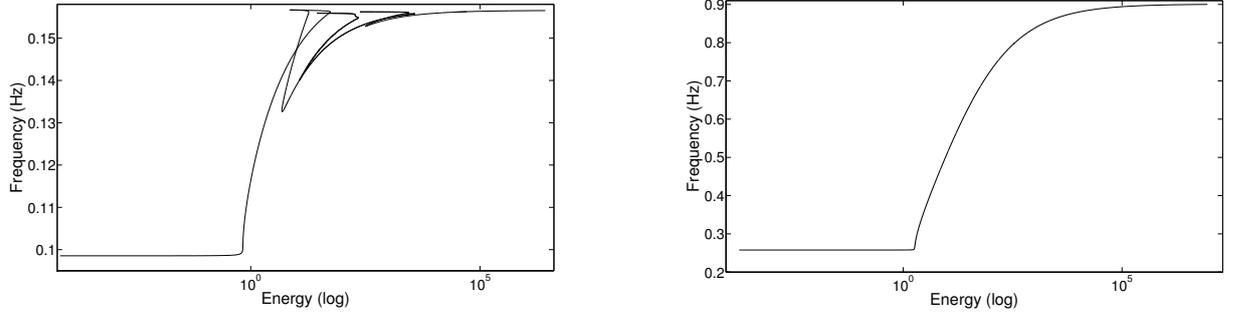


Fig. 3 – Graphique fréquence-énergie du premier MNL (à gauche) et du second MNL (à droite).

### 3.2 Barre mince en contact avec une butée élastique

Un problème de barre en traction-compression discrétisé par éléments finis avec contact unilatéral a été traité en s'inspirant d'un exemple issue de [11]. Ce problème correspond aux équations locales du mouvement :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - E \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2}(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in ]0, L[ \quad (19)$$

avec les conditions aux limites et où la régularisation (7) a été utilisé :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0, t) = \mathbf{0} \\ EA \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}(L, t) = \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}(t)(\mathbf{f}(t) - \alpha(\mathbf{u}(L, t) - \mathbf{g})) - \alpha\eta = \mathbf{0} \end{cases} \quad (20)$$

où  $\rho$  représente la densité massique,  $E$  le module de Young et  $L$  la longueur de la barre. On utilise des éléments de barre, pour la discrétisation spatiale, dont les matrices élémentaires sont :

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{K}_e = \frac{EA}{l_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, l_e = \frac{L}{n} \quad (21)$$

où  $A$  représente l'aire d'une section.

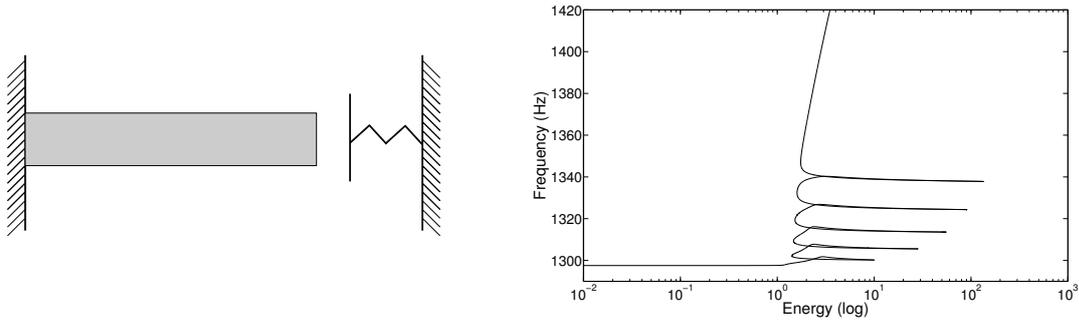


Fig. 4 – Schéma de la barre (à gauche). Graphique fréquence-énergie du premier MNL (à droite).

Les résultats ci-dessus ont été obtenus pour les valeurs suivantes :  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\alpha = 8 \times 10^5 \text{ N/m}$ ,  $A = (0.03 \times 0.03) \text{ m}^2$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $g = 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\eta = 5 \times 10^{-5}$  et  $n = 20$ .

### 3.3 Poutre maintenue par deux butées élastiques avec jeu

Des résultats ont été obtenus sur un exemple de poutre en flexion discrétisés par éléments finis se rapprochant ainsi de structures plus industrielles du type [17]. Ce problème correspond aux équations locales du mouvement :

$$\rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + EI \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial x^4}(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in ]0, \mathbf{x}_g[\cup] \mathbf{x}_g, L[ \quad (22)$$

avec les conditions aux limites :

$$\mathbf{u}(\mathbf{0}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{L}, t) = \mathbf{0} \quad (23)$$

et la condition de saut et où la régularisation (10) a été utilisé :

$$\begin{cases} \llbracket \mathbf{EI} \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^3}(\mathbf{x}_g, t) \rrbracket = \mathbf{f}(t) \\ \alpha^2 \mathbf{g}^2 \mathbf{f}(t) - \eta \alpha^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}_g, t) - \mathbf{f}(t) \mathbf{z}(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}(t) - (\mathbf{f}(t) - \alpha \mathbf{u}(\mathbf{x}_g, t))^2 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (24)$$

où  $\rho$  représente la densité massique,  $A$  l'aire d'une section,  $E$  le module de Young,  $L$  la longueur de la poutre et  $I$  le moment d'inertie et  $\mathbf{x}_g$  la position du noeud où le contact aura lieu, avec  $\mathbf{g}$  le jeu entre ce noeud et la butée.

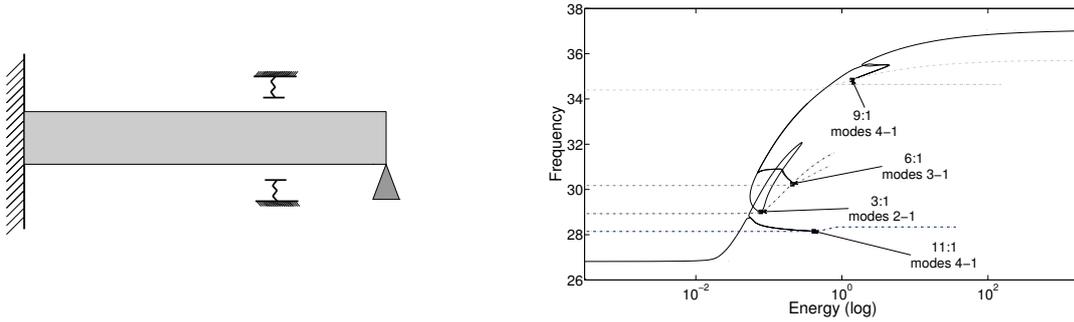


Fig. 5 – Schéma de la poutre (à gauche). Graphique fréquence-énergie du premier MNL (à droite).

Les résultats ci-dessus ont été obtenus pour les valeurs suivantes :  $\rho = 8357 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $I = \frac{\pi}{64} \times ((22.22 \times 10^{-3})^4 - (1.27 \times 10^{-3})^4) \text{ m}^4$ ,  $A = \pi \times r^2$ ,  $r = 11.11 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\alpha = 8 \times 10^5 \text{ N/m}$ ,  $\eta = 0.005$  et  $L = 1.59 \text{ m}$ .

## Références

- [1] R. Arquier, S. Karkar, A. Lazarus, B. Cochelin, C. Vergez, O. Thomas. *MANLAB : an interactive path-following and bifurcation analysis software*, <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>, 2013.
- [2] B. Cochelin, M. Medale. *Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of Asymptotic Numerical Method in the vicinity of bifurcations*, *Journal of Computational Physics*, 594-607, 2013.
- [3] B. Cochelin, C. Vergez. *A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions.*, *Journal of Sound and Vibration*, 243-262, 2009.
- [4] *Code\_Aster : Analyse des Structures Thermo-mécanique pour des Etudes et des Recherches*, <http://www.code-aster.org>, 2013.
- [5] A. Grolet, F. Thouverez. *On a new harmonic selection technique for harmonic balance method*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 43-60, 2012.
- [6] A. E. Hussein, N. Damil, M. Potier-Ferry. *An asymptotic numerical algorithm for frictionless contact problems*, *Revue européenne des éléments finis*, 119-130, 1998.
- [7] V. Jaumouillé, J.-J. Sinou, B. Petitjean. *An adaptive harmonic balance method for predicting the nonlinear dynamic responses of mechanical systems - application to bolted structures*, *Journal of Sound and Vibration*, 4048-4067, 2010.
- [8] D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw. *Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems*, *Journal of Sound and Vibration*, 869-891, 2004.
- [9] G. Kerschen, M. Peeters, J. Golinval, A. Vakakis. *Nonlinear normal modes, part I : A useful framework for the structural dynamicist*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 170-194, 2009.
- [10] M. Peeters, R. Vigiúí, G. Sérandour, G. Kerschen, J.-C. Golinval. *Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques*, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 195-216, 2009.

- [11] D. Laxalde, M. Legrand. *Nonlinear modal analysis of mechanical systems with frictionless contact interfaces*, Computational Mechanics, 469-478, 2011.
- [12] Y.S. Lee, F. Nucera, A.F. Vakakis, D.M. McFarland, L.A. Bergman. *Periodic orbits, damped transitions and targeted energy transfers in oscillators with vibro-impact attachments*, Physica D, 1868-1896, 2009.
- [13] F.H. Ling, X.X. Wu, *Fast Galerkin method and its application to determine periodic solutions of non-linear oscillators*, International Journal of Non-linear Mechanics, 89-98, 1987.
- [14] J. Max. *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques, Tome 1*, Masson, 1981.
- [15] E. H. Moussi, S. Bellizzi, B. Cochelin, I. Nistor. *Nonlinear normal modes of a two degrees-of-freedom piecewise linear system*, soumis, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00783088>, 2013.
- [16] S.W. Shaw, C. Pierre. *Normal modes for non-linear vibratory systems*. Journal of Sound and Vibration, 85-124, 1993.
- [17] T. Thenint. *Etude d'un système non linéaire à chocs sous excitation large bande. Application à un tube de générateur de vapeur*, Thèse de doctorat, 2011.