HAL
open science

Ecoulement de gaz dans un long micro-canal : comparaison des modèles continu et cinétique

Léonard de Izarra, Benoît Trouette, Jean-Louis Rouet, Boujema Izrar

To cite this version:

Léonard de Izarra, Benoît Trouette, Jean-Louis Rouet, Boujema Izrar. Ecoulement de gaz dans un long micro-canal : comparaison des modèles continu et cinétique. Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. pp.deIzarra. hal-00855670

HAL Id: hal-00855670

https://hal.science/hal-00855670v1

Submitted on 30 Aug 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Écoulement de gaz dans un long micro-canal : comparaison des modèles continu et cinétique

Léonard De Izarra[a], Benoît Trouette[b], Jean-Louis Rouet[c], Boujema Izrar[d]

a. *BRGM, 3 Av. Claude-Guillemin BP 36009, 45060 Orléans Cedex 2*
b. *Univ Paris-Est, Laboratoire MSME UMR 8208 CNRS, 77454 Marne-la-Vallée, France*
c. *Institut des Sciences de la Terre d'Orléans (ISTO), 1A Av. de la Recherche Scientifique, 45071 Orléans*
d. *Institut de Combustion, d'Aérothermique, de Réactivité et d'Environnement (ICARE) - CNRS-UPR3021, 1C Av. de la Recherche Scientifique F45071, Orléans cedex 2*

Résumé :

Les écoulements de gaz dans des micro ou nano conduites mettent en jeu des effets de raréfaction et de compressibilité. Différents régimes d'écoulement (hydrodynamique, de glissement ou transitionnel) sont alors susceptibles de cohabiter et il est nécessaire d'utiliser une approche et des méthodes numériques adaptées. Les solutions obtenues par une méthode de résolution de l'équation de Boltzmann-BGK sont comparées aux solutions des équations de Navier-Stokes compressibles avec conditions aux bords de glissement.

Abstract :

Gas flows in micro or nano channels induce rarefaction and compressibility effects. Several flow regimes (hydrodynamic, slip or transitionnal) may coexist and proper model and numerical methods must be used. In this work, solutions of compressible Navier-Stokes equations with second-order slip boundary conditions formulation are comprared with numerical solution of the Boltzmann-BGK equation designed for micro flows.

Mots clefs : Gaz raréfié ; Méthode cinétique ; Navier-Stokes avec Glissement

1 Introduction

Depuis quelques décennies, en raison de leur grand potentiel applicatif dans le cadre des MEMS, l'étude des écoulements de gaz confinés en micro et nano structures ont suscité un intérêt croissant. D'un point de vue macroscopique, l'ajout de conditions aux limites de glissement aux équations de Navier-Stokes permet d'élargir leur gamme de validité à des nombres de Knudsen Kn proches de l'unité [5]. Dans la suite, les solutions analytiques des équations de Navier-Stokes sont comparées aux solutions numériques de l'équations de Boltzmann-BGK, théoriquement valides dans le régime transitionnel.

2 Modélisations

2.1 Description continue : Navier-Stokes avec glissement

Un gaz parfait est placé dans une conduite de longueur L, grande devant sa hauteur H, et on définit $\epsilon = H/L \ll 1$. Le gaz est soumis à une différence de pression $\Delta\tilde{p} = \tilde{p}_{in} - \tilde{p}_{out}$ [1], $\Delta\tilde{p}$ pouvant être important de sorte que les effets de compressibilité ne soient pas négligeables. L'écoulement sera néanmoins supposé isotherme et en conséquence, le refroidissement du gaz dû à la détente le long

1. Les ˜ dénotent les grandeurs dimensionnelles

de la conduite sera négligé. La masse volumique et la pression sont liées par la loi des gaz parfaits : $\tilde{p} = \tilde{\rho}\mathcal{R}\tilde{T}$, où $\mathcal{R}$ est la constante spécifique du gaz et $\tilde{T}$ sa température.

Pour des écoulements rampants, soit pour des nombres de Reynolds et de Mach petits, il a été montré grâce à un développement perturbatif des variables selon le petit paramètre $\epsilon = H/L$ (Arkilic et al. [2], Graur et al. [6]) que les équations de Navier-Stokes stationnaires compressibles pouvaient en première approximation se ramener à :

$$\partial_y^2 u = \partial_x p, \qquad \partial_y p = 0 \tag{1}$$

où u et p représentent les champs de vitesse axiale et de pression respectivement normalisés par la vitesse débitante $\overline{\tilde{u}}$ et la pression $\tilde{p}_{out}$ exprimées en sortie de canal. Les coordonnées $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont normalisées par la longueur L et la hauteur du canal H. Ces équations sont similaires au cas d'un écoulement établi (Poiseuille plan). La pression est une constante de y : $p = p(x)$ mais la vitesse axiale u dépend de la coordonnée axiale $u = u(x, y)$.

Des conditions aux limites doivent être prescrites aux frontières (en $\tilde{y} = \pm H/2$). Pour des parois totalement accommodantes, la théorie de Maxwell donne :

$$u(x, y = \pm 1/2) = \mp C_1 Kn(x)\, \partial_y u(x, y = \pm 1/2) - C_2 Kn^2(x)\, \partial_y^2 u(x, y = \pm 1/2), \tag{2}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'ajustement dont les valeurs sont obtenues par des mesures, des modèles numériques, ou par la théorie. Elles dépendent *a priori* de la géométrie. Pour des écoulements où les effets de compressibilité sont négligeables, les valeurs $C_1 = 1$ et $C_2 = 0.13$ donnent de bons résultats pour des nombres de Knudsen modérés ($Kn \lesssim 5$) (confrontations avec les travaux expérimentaux d'Ewart et al. [5]). Ces valeurs seront retenues dans la suite. La composante normale de la vitesse est nulle aux parois. En entrée et sortie de la conduite, les pressions suivantes sont imposées :

$$p(x = 0, y) = p_{in} \quad \text{et} \quad p(x = 1, y) = p_{out} < p_{in}. \tag{3}$$

Avec les conditions aux limites de glissement au second ordre (2), l'expression de la vitesse axiale $u(x, y)$ s'obtient :

$$u(x, y) = -\frac{1}{2}\frac{\partial p(x)}{\partial x}\left(\frac{1}{4} - y^2 + C_1 Kn(x) + 2C_2 Kn^2(x)\right), \text{ avec } Kn(x) = \frac{k_B \tilde{T}}{H\sqrt{2}\pi\sigma^2 \tilde{p}(x)}. \tag{4}$$

La vitesse débitante selon la direction x est :

$$\overline{u}(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial p(x)}{\partial x}\left(\frac{1}{6} + C_1 Kn(x) + 2C_2 Kn^2(x)\right). \tag{5}$$

En utilisant l'expression de la vitesse débitante dans l'équation de conservation de la masse, on obtient l'équation suivante pour le champ de pression :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{p(x)}{6} + C_1\eta + \frac{2C_2\eta^2}{p(x)}\right)\frac{\partial p(x)}{\partial x}\right] = 0, \text{ où } \eta = Kn(x)\, p(x) = C^{te}. \tag{6}$$

Nous allons maintenant chercher à déterminer $p(x)$, solution de (6), pour $x \in [0, 1]$ avec les conditions aux limites (3). Pour cela, nous allons utiliser la transformée de Kirchhoff dont le but est de rendre linéaire l'équation (6). On remarque que cette dernière est de la forme $\partial_x\left[K(p)\partial_x p\right] = 0$, que l'on appelle un pseudo-laplacien. Nous cherchons a construire une nouvelle variable $\psi(p)$, afin que l'équation (6) soit linéaire. En calculant le gradient de ψ, on trouve $\partial_x\psi(p) = \partial_p\psi(p) \times \partial_x p(x)$. Par identification avec l'équation $\partial_x\left[K(p)\partial_x p\right] = 0$, il est clair que nous devons choisir $\psi(p)$ telle que

$$\partial_p\psi(p) = K(p), \text{ soit } \psi(p) = \int_{p_{ref}}^{p} K(s)\, ds, \tag{7}$$

où p_{ref} est une référence arbitraire. On choisira $p_{ref} = p_{in}$. Sous ce changement de variable, les solutions de ψ sont de la forme $\psi = Ax + B$ où A et B sont des constantes d'intégration à déterminer. D'autre part, les solutions de la forme intégrale de l'équation (7) sont

$$\psi(x) = \int_{p_{in}}^{p} \left(\frac{s}{6} + C_1\eta + \frac{2C_2\eta^2}{s} \right) ds, \tag{8}$$

ce qui permet d'écrire

$$Ax + B = \frac{p^2(x) - p_{in}^2}{12} + C_1\eta \left[p(x) - p_{in}\right] + \ln\left(p(x)/p_{in}\right). \tag{9}$$

En introduisant les conditions aux limites (3), nous obtenons l'expression des constantes d'intégration. On a $B = 0$ et

$$A = \frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{12} - C_1\eta\,\Delta p + 2\,C_2\eta^2 \ln\xi^{-1}, \text{ avec } \Delta p = p_{in} - p_{out} \text{ et } \xi = p_{in}/p_{out}. \tag{10}$$

Ce qui permet d'écrire l'équation suivante pour le champ de pression :

$$\frac{p^2(x) - p_{in}^2}{12} + C_1\eta \left[p(x) - p_{in}\right] + 2\,C_2\eta^2 \ln\left(\frac{p(x)}{p_{in}}\right) = x\left(\frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{12} - C_1\eta\Delta p + 2\,C_2\eta^2 \ln\xi^{-1}\right). \tag{11}$$

La solution $p(x)$ est obtenue numériquement. L'utilisation de la transformée de Krishhoff permet également d'exprimer $\partial_x p(x)$, que l'on retrouve dans les expressions des vitesses locale et débitante. Nous avons définit ψ telle que $\partial_x\psi = \partial_p\psi \times \partial_x p$. Dans le cas où $p \neq 0$, nous pouvons écrire $\partial_x p = \partial_x\psi/\partial_p\psi$. Avec $\partial_x\psi = A$ et $\partial_p\psi = K(p)$, on obtient le gradient de pression

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{\frac{p_{out}^2 - p_{in}^2}{12} - C_1\eta\Delta p + 2\,C_2\eta^2 \ln\xi^{-1}}{\frac{p(x)}{6} + C_1\eta + \frac{2C_2\eta^2}{p(x)}}, \tag{12}$$

ce qui nous mène aux expressions des vitesses axiale et débitante en fonction de $p(x)$, qui est connu numériquement. On peut noter que la linéarisation du terme logarithmique [Eq. (11)] permet d'obtenir une solution complètement analytique au détriment d'une conservation exacte du débit massique.

2.2 Description cinétique : l'équation de Boltzmann-BGK

L'équation de Boltzmann, sans force extérieure et munie de l'opérateur de collision BGK [3], est donnée par :

$$\partial_t f + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{\nabla}_x f = -\tau^{-1}\left(f - f^{eq}\right), \tag{13}$$

où $\boldsymbol{c}$ est la vitesse particulaire et f^{eq} la fonction d'équilibre de Maxwell-Boltzmann vers laquelle les collisions font relaxer la fonction de distribution f. Le paramètre τ est le temps caractéristique de la relaxation du système vers l'équilibre. Il est relié aux coefficients de transport du gaz par le développement de Chapman-Enskog ; on a notamment pour la viscosité cinématique du gaz l'expression $\nu = \theta\tau$ et pour sa conductivité thermique $\kappa = \theta\tau$, où $\theta = k_B T/m$, avec T la température locale, k_B la constante de Boltzmann et m la masse moléculaire. On remarquera que ce modèle impose un nombre de Prandtl unitaire. Pour un gaz modélisé par des sphères dures, τ est inversement proportionnel à la masse volumique locale ρ du gaz. Donc, si τ_0 est le temps de relaxation associé à la masse volumique de référence ρ_0, alors, le temps de relaxation local sera donné par $\tau = \tau_0\frac{\rho_0}{\rho}$. Dans le cas d'un écoulement confiné entre deux plaques parallèles espacées d'une distance H, les schémas développés ici définissent le nombre de Knudsen associé au temps de relaxation de référence τ_0 comme $Kn_0 = \sqrt{2.5\,\theta_0}\,\tau_0/H$ avec $\theta_0 = k_B T_0/m$, où T_0 est une température de référence. Le nombre de Knudsen local, à la densité ρ, est alors défini tel que $Kn = Kn_0\,(\rho_0/\rho)$.

Comme mentionné, la fonction de distribution d'équilibre f^{eq} est donnée par la distribution de Maxwell-Boltzmann. En dimension D, elle s'écrit :

$$f^{eq}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}, t) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u})^2}{2\theta}\right), \tag{14}$$

où ρ, $\boldsymbol{u}$ et θ, s'obtiennent par l'intermédiaire du calcul des trois premiers moments de f (moments de f conservés lors des collisions) :

$$\rho = \int f d\boldsymbol{c}, \quad \rho\boldsymbol{u} = \int \boldsymbol{c} f d\boldsymbol{c}, \quad \rho D\theta + \rho\boldsymbol{u}^2 = \int \boldsymbol{c}^2 f d\boldsymbol{c}. \tag{15}$$

La méthode numérique de résolution utilisée ici repose sur une projection de la fonction de distribution d'équilibre f^{eq} sur la base des polynômes d'Hermite. Les quadratures de Gauss-Hermite sont employées pour le calcul des différents moments de f (forme discrète de l'équation (15)). Cette méthode de discrétisation de l'équation BGK, initialement proposée par Shan et al. [9] de façon formelle, permet d'engendrer un grand nombre de schémas numériques d'ordres différents (de quadrature et de projection de f^{eq}). Dans cette étude, nous proposons d'utiliser une discrétisation particulière introduite par De Izarra et al. [8, 7]. Elle est basée sur une projection à l'ordre 2 de la distribution d'équilibre et sur une quadrature de Gauss-Hermite spéciale notée $\mathcal{H}_{4|5}$. Nous choisissons cette quadrature particulière, car elle s'est montrée être capable de rendre compte correctement d'écoulements sur une large gamme de nombres de Knudsen (typiquement $0.001 < Kn < 5$), pour un coût de calcul abordable. Cette quadrature particulière s'est montrée capable de rendre compte correctement d'écoulements de gaz entre deux plaques parallèles pour une large gamme de nombres de Knudsen (typiquement $0.001 < Kn < 5$), et pour un coût de calcul abordable [8]. Elle appartient aux quadratures dites composite $\mathcal{H}_{n|n+1}$, formées par combinaison de deux quadratures standards de degrés n et $n+1$. L'introduction de quadratures de Gauss-Hermite d'ordres élevés n'introduit pas de différences fondamentales par rapport aux schémas standards de type Boltzmann sur réseau (LBM), que l'on retrouve pour $n = 3$. Néanmoins, pour $n \geq 4$, les racines des polynômes d'Hermite sont dans des rapports irrationnels et l'espace des vitesses engendrées n'épouse plus un maillage régulier de l'espace des configurations. Il devient alors nécessaire d'employer un schéma de transport plus sophistiqué que le simple transport par recopie (type automate cellulaire) des LBM. Divers schémas ont été testés et il a été montré empiriquement qu'il était nécessaire d'utiliser un schéma de type TVD, avec un limiteur de flux de type Koren, pour que les schémas soient stables et précis du régime hydrodynamique jusqu'au régime transitionnel [7].

En pratique, les données utiles à la construction du schéma basé sur la quadrature de Gauss-Hermite composite $\mathcal{H}_{n|n+1}$ sont, l'ensemble des vitesses particulaires discrètes $\boldsymbol{c}_{i=1,\ldots,q}$, ainsi que l'ensemble des poids $\omega_{i=1,\ldots,q}$ de la quadrature associés à chacune de ces vitesses, avec $q = n^D + (n+1)^D$ en dimension D. Les vitesses (nœuds) de cette quadrature s'obtiennent par permutations de D copies de l'ensemble des racines des polynômes $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$, normalisées par la racine de $\mathcal{H}_{n+1}$ de plus grande valeur :

$$\boldsymbol{c}_{i=1,\ldots,q}^{\mathcal{H}_{n|n+1}} = \left\{ \mathrm{perm}^D \left(c_{j=1,\ldots,n^D}^{\mathcal{H}_n} / c_{max}^{\mathcal{H}_{n+1}} \right) ; \mathrm{perm}^D \left(c_{k=1,\ldots,(n+1)^D}^{\mathcal{H}_{n+1}} / c_{max}^{\mathcal{H}_{n+1}} \right) \right\}. \tag{16}$$

Les poids associés, sont quant à eux, donnés par le produit des poids $\omega_i^{\mathcal{H}_n} = n![n\,\mathcal{H}_n(c_i^{\mathcal{H}_n})]^{-2}$, associés aux racines contenues dans chacune des q permutations :

$$\omega_{i=1,\ldots,q}^{\mathcal{H}_{n|n+1}} = \left\{ \alpha_n \,\mathrm{prod}^D \left(\omega_{j=1,\ldots,n^D}^{\mathcal{H}_n} \left(c_{j=1,\ldots,n^D}^{\mathcal{H}_n} \right) \right) ; \alpha_{n+1} \,\mathrm{prod}^D \left(\omega_{k=1,\ldots,(n+1)^D}^{\mathcal{H}_{n+1}} \left(c_{k=1,\ldots,(n+1)^D}^{\mathcal{H}_{n+1}} \right) \right) \right\}. \tag{17}$$

Les poids de chacune des quadratures composées sont pondérés par α_n et α_{n+1}, de telle sorte que leur somme sur toutes les vitesses soit unitaire. La pondération choisie ici est $(\alpha_n, \alpha_{n+1}) = (1/2, 1/2)$, mais d'autres choix sont possibles. Une représentation du système de vitesses associé à la quadrature $\mathcal{H}_{4|5}$ en deux dimensions est donnée figure 1(a) ; il comporte 41 vitesses, dont la vitesse nulle.

Enfin, pour une projection à l'ordre 2, la fonction de distribution d'équilibre discrète s'écrit

$$f_i^{eq} = \omega_i \,\rho \left(1 + \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{c}_i}{\theta_0} + \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{c}_i)^2}{2\,\theta_0^2} + \frac{(\theta - \theta_0)}{2} \left(\frac{\boldsymbol{c}_i^2}{\theta_0^2} - \frac{D}{\theta_0} \right) - \frac{\boldsymbol{u}^2}{2\,\theta_0} \right), \tag{18}$$

où les moments conservés sont liés à la fonction de distribution discrète f_i par :

$$\rho = \sum_{i=1}^{q} f_i, \quad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{c}_i \, f_i, \quad \theta = \frac{1}{D\,\rho} \sum_{i=1}^{q} (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{u})^2 \, f_i. \tag{19}$$

Les interactions gaz-parois sont modélisées par des conditions aux bords cinétiques [1]. Les parois solides sont totalement accommodantes, thermostatées à θ_0 et de vitesse nulle. En entrée et sortie du canal, les pressions constantes p_{in} et p_{out} sont imposées (à température constante θ_0) pendant l'étape de collision, la difficulté étant de répercuter les conditions macroscopiques sur les fonctions de distribution. La stratégie adoptée est la suivante : après avoir imposé les masses volumiques $\rho_{in,out} = p_{in,out}/\theta_0$, la vitesse macroscopique $\boldsymbol{u}$ est extrapolée depuis le fluide tout en imposant une dérivée nulle dans la direction normale aux frontières. L'équilibre est ensuite imposé, i.e. $f_{in,out} \equiv f^{eq}_{in,out}(\rho_{in,out}, \boldsymbol{u}_{in,out}, \theta_0)$ puis la partie hors équilibre $(f - f^{eq})$, "détruite" lors de l'étape précédente, est ré-introduite par une extrapolation depuis le fluide.

3 Résultats et discussion

Avec la description choisie, les paramètres du problème sont le nombre de Knudsen en sortie du canal Kn_{out} et le rapport des pression p_{in}/p_{out}. Le rapport H/L est tel que $\epsilon = 0.06 \ll 1$. Un maillage régulier uniforme composé de 500×30 mailles est utilisé. Les grandeurs observées sont la répartition de pression $p(x)$ le long du canal ainsi que la vitesse axiale à mi-hauteur $u(x, y = 0)$.

L'observation globale des résultats montrent que les deux approches donnent des résultats très similaires. Que ce soit pour la pression [Fig. 1(b)] ou la vitesse axiale [Fig. 2(a)], l'écart relatif entre les deux solutions n'excède pas 3% en norme L_1.

Les effets de compressibilité et de raréfaction s'observent pour des différences de pression et des nombres de Knudsen importants. À p_{in}/p_{out} imposé, par exemple $p_{in}/p_{out} = 3$, la solution s'éloigne du profil de pression incompressible avec l'augmentation de Kn. Pour $Kn_{out} = 5$, on retrouve une répartition de pression sous-linéaire déjà observée par Dongari et al. [4] pour $Kn \gtrsim 0.16$. Avec le modèle continu, ce comportement n'est observable qu'avec des conditions aux bords de glissement du second ordre. On peut noter que seul le coefficient d'accommodation tangentiel est nécessaire à l'approche cinétique.

La différence la plus notable porte sur le champ de température [Fig. 2(b)]. La détente du gaz, qui est intrinsèquement modélisée par l'équation de Boltzmann-BGK, s'observe en sortie de canal par un refroidissement. L'amplitude de ce refroidissement augmente avec le rapport p_{in}/p_{out}.

Ces observations illustrent que le modèle continu est applicable jusqu'à des $Kn \sim 5$. On montre donc par cette confrontation que cette limite est sous estimée pour le problème traité ici. Néanmoins, il n'est pas dit que ce résultat soit transposable à tous les problèmes, par exemple pour une autre géométrie.

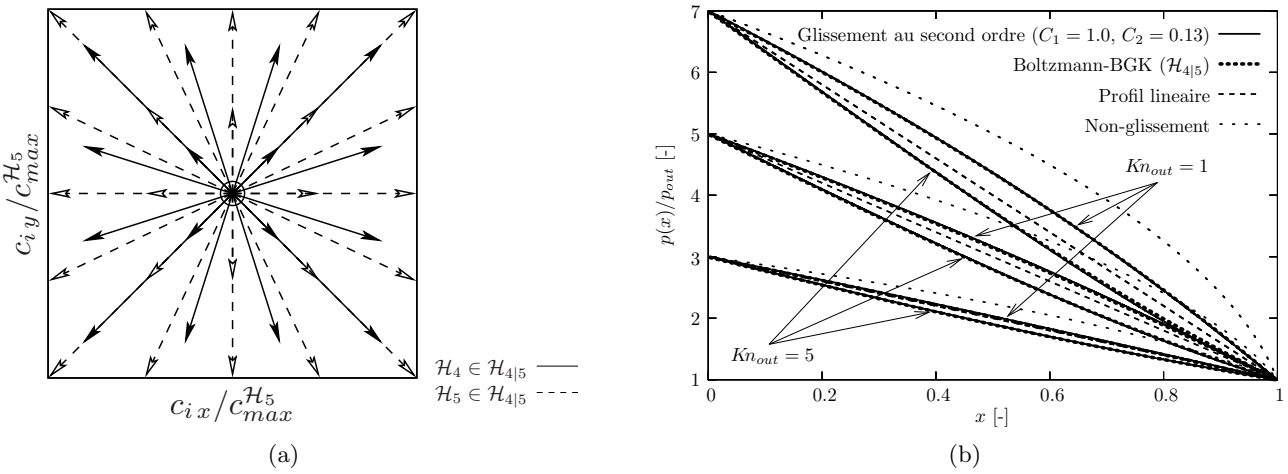
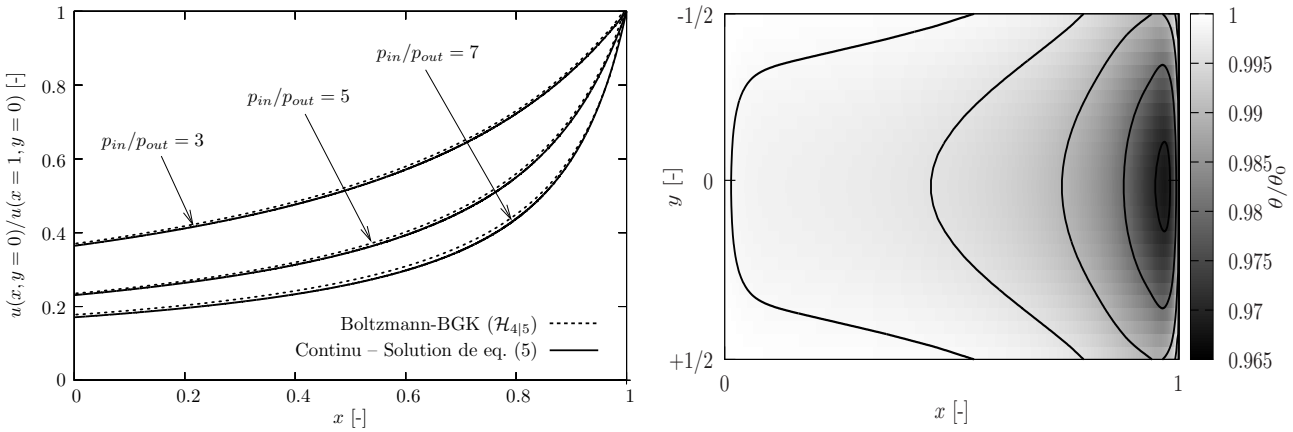


FIGURE 1 – (a) Vitesses discrètes induites par la quadrature composite $\mathcal{H}_{4|5}$. (b) Profils de pression normalisés entre l'entrée et la sortie du canal pour $Kn_{out} = 1$ et 5 et $p_{in}/p_{out} = 3, 5$ et 7.



(a) $Kn_{out} = 1$ (b) $Kn_{out} = 1$ et $p_{in}/p_{out} = 7$

FIGURE 2 – (a) Vitesse selon x au centre du canal normalisée par la vitesse maximale pour différents rapports de pression. (b) Champ de température normalisée obtenu par le modèle BGK $\mathcal{H}_{4|5}$

4 Conclusion

Deux méthodes de modélisation de l'écoulement d'un gaz à travers un long canal rectiligne sous une forte différence de pression ont été comparées. La première, analytique, se base sur les équations de Navier-Stokes compressibles associées à l'emploi de conditions aux bords de glissement du second ordre. La seconde, numérique, résout l'équation de Boltzmann-BGK. Pour les configurations testées, les résultats obtenus par ces deux méthodes pour les champs de pression et de vitesse axiale sont en très bon accord. Dans le cadre d'écoulements rampants (petits nombres de Reynolds et de Mach), la description continue isotherme semble correcte jusqu'à des nombres de Knudsen $Kn_{out} \lesssim 5$. On observe néanmoins que pour de grands rapports de pressions p_{in}/p_{out}, les champs de températures obtenus par résolution de l'équation de Boltzmann-BGK ne sont pas uniformes. Une détente est observée et la température peut varier de quelques pourcent par rapport à la température de référence. L'hypothèse d'écoulement isotherme ne pourra alors plus être adoptée dans ces conditions.

Références

[1] Ansumali, S., Karlin, I. V. 2002 Kinetic boundary conditions in the lattice Boltzmann method. *Phys. Rev. E* **66** 026311

[2] Arkilic, E.B., Schmidt, M.A., Breuer, K.S. 1997 Gaseous slip flow in long microchannels. *Microelectromechanical Systems* **6** 167–178

[3] Bhatnagar, P.L., Gross, E.P., Krook, M. 1954 A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Phys. Rev.* **94** 511–525

[4] Dongari, N., Agrawal, A., Agrawal, A. 2007 Analytical solution of gaseous slip flow in long microchannels. *Int. J. Heat and Mass Tran.* **50** 3411–3421

[5] Ewart, T., Perrier, P., Graur, I.A., Méolans, J.G. 2007 Mass flow rate measurements in a microchannel, from hydrodynamic to near free molecular regimes. *J. Fluid Mech.* **584** 337–356

[6] Graur, I.A., Méolans, J.G., Zeitoun, D.E. 2006 Analytical and numerical description for isothermal gas flows in microchannels. *Microfluid Nanofluid* **2** 64–77

[7] De Izarra, L. 2012 Apport des méthodes cinétiques à la simulation d'écoulements dans les milieux poreux. *Thèse Université d'Orléans.*

[8] De Izarra, L., Rouet, J.-L., Izrar, B. 2011 High-order lattice boltzmann models for gas flow for a wide range of Knudsen numbers. Phys. Rev. E **84** 066705

[9] Shan, X., He, X. 1998 Discretization of the velocity space in the solution of the Boltzmann equation. *Phys. Rev. Lett.*, **80** 65–68