



HAL
open science

Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux

Aurélien Djament

► **To cite this version:**

| Aurélien Djament. Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux. 2013. hal-00853071v2

HAL Id: hal-00853071

<https://hal.science/hal-00853071v2>

Preprint submitted on 2 Oct 2014 (v2), last revised 28 Jul 2015 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux

Aurélien DJAMENT*

2 octobre 2014

Résumé

On étudie différentes propriétés de finitude, notamment la propriété noethérienne, dans des catégories de foncteurs polynomiaux d'une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet initial vers une catégorie abélienne (notion introduite dans [8]). On montre notamment que les foncteurs polynomiaux depuis la catégorie des groupes abéliens libres \mathbb{Z}^n avec monomorphismes scindés vers les groupes abéliens forment « presque » une catégorie localement noethérienne.

Abstract

We study finiteness properties, especially the noetherian property, in categories of polynomial functor from a small symmetric monoidal category whose unit is an initial object to an abelian category (notion introduced in [8]). We prove in particular that the category of polynomial functors from the category of free abelian groups \mathbb{Z}^n with split monomorphisms to abelian groups is “almost” locally noetherian.

Mots clefs : foncteurs polynomiaux ; objets noethériens ; catégories abéliennes ; catégories quotients.

Classification MSC 2010 : 18A25 ; 18D10 ; 18E15 ; 18E35.

Introduction

Cet article est consacré à l'étude des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux depuis une petite catégorie monoïdale symétrique \mathcal{M} dont l'unité est objet initial vers une catégorie abélienne raisonnable \mathcal{A} . Les foncteurs polynomiaux dans ce contexte sont définis et étudiés dans [8] ; deux exemples s'avèrent particulièrement intéressants : le cas où la catégorie source \mathcal{M} est la catégorie Θ des ensembles finis avec injections (notée FI dans [2] ou [3]) et le cas, plus délicat, où la catégorie source est la catégorie des objets hermitiens (non dégénérés) sur une petite catégorie additive à dualité \mathcal{T} — notamment le cas particulier de la catégorie $\mathbf{S}(\mathbb{Z})$ (définie dans le théorème 1 ci-dessous). Le cas de la catégorie Θ a déjà été étudié par Church, Ellenberg, Farb et Nagpal dans [3], où les auteurs montrent que la catégorie des foncteurs depuis cette

*CNRS, laboratoire de mathématiques Jean Leray (UMR 6629), 2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 NANTES CEDEX 3, FRANCE ; aurelien.djament@univ-nantes.fr.

catégorie vers la catégorie des modules sur un anneau noethérien est localement noethérienne (il n’y a pas de condition polynomiale ici car cette catégorie est engendrée par des foncteurs projectifs de type fini polynomiaux, ce qui en rend l’étude particulièrement favorable). De plus, dans [2], les auteurs montrent l’ubiquité des foncteurs de ce type. D’un autre côté, les foncteurs depuis une catégorie d’objets hermitiens vers une catégorie abélienne apparaissent très naturellement quand on s’intéresse à l’homologie des groupes de congruences ou des sous-groupes IA des automorphismes des groupes libres induisant l’identité sur l’abélianisation ou les sous-quotients des filtrations centrales usuelles sur les automorphismes des groupes libres. Comme le montre l’article [8], l’étude des foncteurs polynomiaux sur de telles catégories est plus difficile que dans le cas de Θ , mais accessible — on obtient notamment une classification des foncteurs polynomiaux de degré au plus d modulo les foncteurs polynomiaux de degré au plus $d - 1$ se ramenant à une catégorie quotient analogue dans le cas bien connu d’une catégorie source additive.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1. *Soient A un anneau, $\mathbf{S}(A)$ la catégorie des A -modules libres de rang fini avec monomorphismes scindés et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck localement noethérienne.*

1. *Si A est fini, alors la catégorie des foncteurs faiblement polynomiaux $\mathbf{S}(A) \rightarrow \mathcal{A}$ est localement noethérienne.*
2. *Pour $A = \mathbb{Z}$, la catégorie des foncteurs faiblement polynomiaux $\mathbf{S}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{A}$ est localement presque noethérienne.*

(*Localement presque noethérienne* signifie : engendrée par un ensemble de foncteurs presque noethériens. Un foncteur $F : \mathbf{S}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{A}$ est dit presque noethérien s’il existe un entier n tel que la restriction de F à la sous-catégorie pleine $\mathbf{S}(\mathbb{Z})_{\geq n}$ des groupes abéliens libres de rang $\geq n$ est noethérienne. Un foncteur presque noethérien qui prend des valeurs noethériennes est noethérien. La catégorie des foncteurs faiblement polynomiaux $\mathbf{S}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ n’est pas localement noethérienne car, pour $n \geq 2$, l’anneau de groupe $\mathbb{Z}[GL_n(\mathbb{Z})]$ n’est pas noethérien.)

La notion de foncteur faiblement polynomial est rappelée en début d’article. Elle s’oppose à celle de foncteur fortement polynomial, peut-être plus intuitive mais manquant de propriétés de stabilité essentielles (un sous-foncteur d’un foncteur fortement polynomial n’est pas nécessairement fortement polynomial). De fait, la notion d’objet polynomial la plus naturelle n’intervient pas dans la catégorie de foncteurs elle-même, mais dans une catégorie quotient appropriée ; les foncteurs faiblement polynomiaux sont ceux dont l’image dans cette catégorie quotient est polynomiale.

Une première étape importante pour établir le théorème 1 consiste à étudier d’abord les propriétés noethériennes des foncteurs fortement polynomiaux. Cela s’avère nettement plus facile (et nécessite beaucoup moins d’hypothèses sur la catégorie monoïdale source) ; le cœur du raisonnement est déjà présent dans le travail [3] (pour les foncteurs *fortement* polynomiaux, on peut se ramener à la catégorie source Θ). Pour aborder les foncteurs faiblement polynomiaux, nous utilisons un raisonnement plus détourné. Un ingrédient essentiel est donné par une propriété du foncteur section de la catégorie quotient susmentionnée vers la catégorie de foncteurs sur laquelle on travaille, ainsi que de ses dérivés. Cette propriété, qui présente un intérêt intrinsèque, se montre en utilisant

un résultat important de [8] et des récurrences enchevêtrées. Elle utilise également des propriétés voisines de la présentation finie, notions qui se révèlent aussi importantes pour en déduire le théorème 1. Ces propriétés nécessitent un certain nombre d’hypothèses techniques sur les catégories sources des foncteurs polynomiaux qu’on rencontre : en effet, une difficulté apparaît du fait que les foncteurs de décalage (i.e. de précomposition par un endofoncteur $x + -$ de \mathcal{M}) ne préservent pas forcément les foncteurs de type fini (même pour $\mathcal{M} = \mathbf{S}(\mathbb{Z})$). On contourne le problème en raisonnant souvent avec la notion de foncteur à support fini (dont la définition est rappelée dans cet article).

Après la rédaction de la première version de ce travail, Putman et Sam ont démontré [13] un résultat beaucoup plus fort que la première assertion du théorème 1, lorsque l’anneau fini A est commutatif, à savoir que la catégorie de *tous* les foncteurs de $\mathbf{S}(A)$ vers une catégorie de Grothendieck localement noethérienne est localement noethérienne (lorsque la catégorie but est celle des espaces vectoriels sur un corps de caractéristique nulle, ce résultat a été également obtenu par Gan et Li [11], d’une manière indépendante à la fois de [13] et du présent travail). Leur méthode, totalement indépendante de la nôtre, repose sur un astucieux changement de catégorie source et des arguments combinatoires inspirés des bases de Gröbner (voir aussi le travail [14] de Sam et Snowden, relié à [13]). Toutefois, il paraît très difficile d’adapter les techniques de [13] pour établir la deuxième assertion du théorème 1. Notons également que la propriété fondamentale du foncteur section qui joue un rôle crucial dans notre approche des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux sur $\mathbf{S}(A)$ ne semble pas pouvoir être retrouvée par la machinerie de Putman-Sam (y compris lorsque A est fini et commutatif), qui ne traite jamais de catégorie quotient.

Remerciements Cet article s’inscrit dans le prolongement du travail [8] avec Christine Vespa et a bénéficié des encouragements et remarques pertinentes de celle-ci, qu’elle en soit ici remerciée. L’auteur sait également gré à Steven Sam de la communication privée d’une version préliminaire de [14] et de nombreux échanges fructueux sur la propriété noethérienne dans les catégories de foncteurs. Il remercie enfin Thomas Church et Jordan Ellenberg pour des discussions autour des articles [2] et [3].

Notation 1. Dans tout cet article, si A est un objet d’une catégorie additive \mathcal{A} et E un ensemble fini, on note $A[E]$ la somme directe de copies de A indexées par E . On étend cette notation au cas où E est infini si \mathcal{A} possède des sommes infinies.

Table des matières

1	Notations et rappels sur les foncteurs polynomiaux (voir [8])	4
2	Propriétés de finitude dans les catégories de foncteurs vers une catégorie abélienne	6
2.1	Objets de type fini, de présentation finie, noethériens	6
2.2	Propriétés de finitude ponctuelles des foncteurs	7
2.3	Trois notions de finitude auxiliaires sur les foncteurs	8

3	Hypothèses de finitude utiles sur les objets de Mon_{ini}	9
3.1	Définitions	9
3.2	Exemples fondamentaux	10
3.3	Utilisation pour les propriétés de finitude des foncteurs stablement nuls	12
4	Support des foncteurs fortement polynomiaux	13
4.1	Foncteurs à support fini	13
4.2	Cas des foncteurs fortement polynomiaux	14
4.3	Propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux depuis un objet de Mon_{nul}	16
5	Propriétés de finitude des foncteurs fortement polynomiaux	17
5.1	Propriétés de finitude des foncteurs $\eta(F)$	17
5.2	Application : cas de la catégorie source Θ (cf. [3])	19
5.3	Résultat principal	19
6	Propriétés de finitude des foncteurs faiblement polynomiaux	20
6.1	Propriété fondamentale du foncteur section	21
6.2	Propriétés préliminaires autour de la présentation finie	25
6.3	Résultats fondamentaux sur les foncteurs faiblement polynomiaux	27

1 Notations et rappels sur les foncteurs polynomiaux (voir [8])

(Nos références générales pour les notions catégoriques sont [12] et, pour les catégories abéliennes, catégories quotients comprises, [10].)

Si \mathcal{A} et \mathcal{C} sont des catégories, avec \mathcal{C} petite, on note $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{A} .

On note Mon_{ini} la catégorie des petites catégories monoïdales symétriques $(\mathcal{M}, +, 0)$ dont l'unité 0 est objet initial, les morphismes étant les foncteurs monoïdaux au sens fort, et Mon_{nul} la sous-catégorie pleine des catégories telles que 0 soit objet nul de \mathcal{M} . Les petites catégories additives seront vues comme des objets de Mon_{nul} , + étant alors la somme directe. L'exemple qui nous intéressera le plus est celui de la catégorie $\mathbf{P}(A)$, où A est un anneau, des A -modules à droite libres de rang fini (ou plutôt un squelette de cette catégorie).

Si \mathcal{A} est une petite catégorie additive, on note $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ la catégorie ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les monomorphismes scindés de \mathcal{A} , le scindage étant donné dans la structure. Munie du foncteur induit par la somme directe de \mathcal{A} , $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ est un objet de Mon_{ini} qui nous intéresse particulièrement. Cette catégorie est un cas particulier de catégorie d'objets hermitiens sur une petite catégorie additive à dualité (en l'occurrence, $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$ avec l'échange des deux facteurs) ; la plupart des considérations relatives à $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ pourraient s'étendre à cette situation plus générale (cf. [8]). Si A est un anneau, on notera $\mathbf{S}(A)$ pour $\mathbf{S}(\mathbf{P}(A))$. Un autre exemple fondamental d'objet de Mon_{ini} est la catégorie Θ des ensembles finis avec injections, ou plutôt son squelette constitué des objets $\mathbf{n} := \{1, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute catégorie \mathcal{A} et tout objet x d'un objet \mathcal{M} de Mon_{ini} , on note τ_x l'endofoncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ de précomposition par l'endofoncteur $x + -$

de \mathcal{M} . On dispose ainsi d'isomorphismes naturels $\tau_x\tau_y \simeq \tau_y\tau_x \simeq \tau_{x+y}$. Si \mathcal{A} est une catégorie abélienne, on note δ_x (resp. κ_x) l'endofoncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ conoyau (resp. noyau) de la transformation naturelle $i_x : \text{Id} \simeq \tau_0 \rightarrow \tau_x$ induite par l'unique morphisme $0 \rightarrow x$. Ainsi, par le lemme du serpent, toute suite exacte courte $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \kappa_x(F) \rightarrow \kappa_x(G) \rightarrow \kappa_x(H) \rightarrow \delta_x(F) \rightarrow \delta_x(G) \rightarrow \delta_x(H) \rightarrow 0,$$

ce qu'on utilisera abondamment dans la suite.

On dit qu'un foncteur $F \rightarrow \mathcal{A}$ est *fortement polynomial* de degré fort au plus d si $\delta_{a_0} \dots \delta_{a_d}(F) = 0$ pour tous objets a_0, \dots, a_d de \mathcal{M} . On note $\mathcal{P}ol_d^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ formée de ces foncteurs (par convention, cette catégorie est réduite à $\{0\}$ pour $d < 0$). Cette sous-catégorie est stable par quotients et extensions, mais pas par sous-objets en général.

Supposons que \mathcal{A} est une catégorie de Grothendieck¹. On note κ le sous-foncteur de l'identité de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ somme des κ_x pour $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$ et l'on note $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine des foncteurs F tels que l'inclusion $\kappa(F) \subset F$ soit une égalité. C'est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$; ses objets sont appelés foncteurs *stablement nuls*. La catégorie quotient $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est notée $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$; le foncteur canonique $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est noté π . Son adjoint à droite, le foncteur section, est noté s .

Pour tout objet x de \mathcal{M} , les endofoncteurs τ_x (exact) et δ_x (exact seulement à droite en général) de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ induisent des endofoncteurs exacts encore notés τ_x et δ_x de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Un objet X de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ tel que $\delta_{a_0} \dots \delta_{a_d}(X) = 0$ pour tous objets a_0, \dots, a_d de \mathcal{M} est dit *polynomial* de degré au plus d ; on note $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de ces objets. Elle est bilocalisante. Un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est dit *faiblement polynomial* de degré faible au plus d si son image $\pi(X)$ dans $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ appartient à $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$; on note $\mathcal{P}ol_d^{\text{faible}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de ces foncteurs. C'est une sous-catégorie localisante de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, et $\mathcal{P}ol_d^{\text{faible}}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pour $d < 0$. On montre que l'inclusion des foncteurs constants de \mathcal{A} induit une équivalence entre cette catégorie et $\mathcal{P}ol_0(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ (la restriction du foncteur section en est un quasi-inverse). Le foncteur s commute à isomorphisme naturel près aux foncteurs τ_x , tandis qu'on dispose de monomorphismes naturels $\delta_x s \hookrightarrow s \delta_x$.

Bien sûr, si \mathcal{M} est dans $\mathcal{M}on_{\text{nul}}$, alors $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est réduite à 0, de sorte que les notions de foncteur fortement et faiblement polynomial coïncident.

Les foncteurs τ_x commutent, à isomorphisme naturel près, aux foncteurs δ_t et κ_t . En particulier, les différentes catégories de foncteurs polynomiaux sont stables par les τ_x .

À tout objet $(\mathcal{M}, +, 0)$ de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$ on associe une catégorie $(\widetilde{\mathcal{M}}, +, 0)$ dans $\mathcal{M}on_{\text{nul}}$ qui a les mêmes objets et dont les morphismes sont donnés par

$$\widetilde{\mathcal{M}}(a, b) := \text{colim}_{\mathcal{M}} \tau_b \mathcal{M}(a, -);$$

on dispose d'un foncteur monoïdal (au sens fort) $\mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ qui est l'identité sur les objets. Si \mathcal{A} est une catégorie abélienne, on notera $\eta : \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A}) \rightarrow$

1. Pour plusieurs de nos considérations, des hypothèses plus faibles sur cette catégorie abéliennes suffiraient, mais cela ne serait guère utile pour les applications.

$\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ la précomposition par ce foncteur (attention, dans [8], c'est le foncteur $\mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ qui est noté η , de sorte que celui qu'on note maintenant η y figure comme η^*). Le foncteur η possède un adjoint à droite α tel que

$$\alpha(F)(t) = \operatorname{colim}_{\mathcal{M}} \tau_t(F). \quad (1)$$

L'unité $\eta(F) \rightarrow s\pi\eta(F)$ est un isomorphisme pour tout foncteur F de $\mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$, tandis que les foncteurs dérivés à droite $\mathbf{R}^i s$ du foncteur section sont nuls, pour $i > 0$, sur un objet du type $\pi\eta(F)$. Le foncteur α et ses dérivés à gauche sont nuls sur $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, de sorte que α induit un foncteur $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ qui est adjoint à gauche à $\pi\eta$.

Les foncteurs η et α commutent (à isomorphisme naturel près) aux foncteurs τ_x et δ_x ; η envoie $\mathcal{P}ol_d(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ dans $\mathcal{P}ol_d^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et α envoie $\mathcal{P}ol_d^{\text{faible}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ dans $\mathcal{P}ol_d(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$. Si X est un objet de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, alors le noyau et le conoyau de l'unité $X \rightarrow \eta\alpha(X)$ appartiennent à $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$; en conséquence, les foncteurs adjoints α et η induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $\mathcal{P}ol_d(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$.

2 Propriétés de finitude dans les catégories de foncteurs vers une catégorie abélienne

2.1 Objets de type fini, de présentation finie, noethériens

Commençons par des rappels généraux sur les propriétés de finitude dans une catégorie abélienne \mathcal{A} . Un objet A de \mathcal{A} est dit *noethérien* si toute suite croissante de sous-objets de \mathcal{A} stationne. Il est dit *de type fini* si toute suite croissante de sous-objets de A dont la réunion est A stationne. Lorsque \mathcal{A} possède des colimites et que les colimites filtrantes y sont exactes (par exemple, si \mathcal{A} est une catégorie de Grothendieck), un objet est noethérien si et seulement si tous ses sous-objets sont de type fini. La catégorie abélienne \mathcal{A} est dite *localement noethérienne* (resp. *localement de type fini*) si elle possède un ensemble de générateurs noethériens (resp. de type fini).

La proposition suivante est classique et immédiate.

Proposition 2.1. Un objet A d'une catégorie abélienne \mathcal{A} avec colimites filtrantes exactes est de type fini si et seulement si le foncteur $\mathcal{A}(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ commute aux colimites filtrantes de monomorphismes.

On rappelle qu'un objet A d'une catégorie abélienne \mathcal{A} est dit *de présentation finie* si le foncteur $\mathcal{A}(A, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ commute aux colimites filtrantes. Il est classique (et facile) que si, dans une suite exacte courte $0 \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$, A est de présentation finie et B de type fini, alors C est de type fini. Dans une catégorie localement noethérienne, tout objet de type fini est noethérien et de présentation finie.

Corollaire 2.2. Soit $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur entre catégories abéliennes avec colimites filtrantes exactes. On suppose que Φ possède un adjoint à droite qui commute aux colimites filtrantes. Alors Φ préserve les objets de type fini, ainsi que les objets de présentation finie.

Appliquant ce résultat au foncteur α de la section précédente, dont l'adjoint à droite η commute aux colimites, nous obtenons la propriété suivante, qui nous sera utile plus tard.

Proposition 2.3. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur de type fini (resp. de présentation finie). Alors $\alpha(F) : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ est également de type fini (resp. de présentation finie).

2.2 Propriétés de finitude ponctuelles des foncteurs

Donnons maintenant une définition générale pour traiter de propriétés de finitude dans des catégories de foncteurs.

Définition 2.4. Soient \mathcal{C} une petite catégorie, \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur.

1. On dit que F est ponctuellement de type fini (resp. ponctuellement noethérien) si $F(c)$ est un objet de type fini (resp. noethérien) dans la catégorie \mathcal{A} pour tout objet c de \mathcal{C} .
2. On dit que F est faiblement ponctuellement de type fini (resp. faiblement ponctuellement noethérien) si $F(c)$ est un objet de type fini (resp. noethérien) dans la catégorie des objets de \mathcal{A} munis d'une action du monoïde $\text{End}_{\mathcal{C}}(c)$ pour tout objet c de \mathcal{C} .

On utilisera aussi la propriété suivante pour les catégories sources.

Définition 2.5. On dit qu'une catégorie \mathcal{C} vérifie la propriété (FM) si pour tous objets t et x de \mathcal{M} , le $\text{End}_{\mathcal{C}}(x)$ -ensemble $\mathcal{C}(t, x)$ est de type fini.

Proposition 2.6. Soient \mathcal{C} une petite catégorie, \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur.

1. Si \mathcal{A} est localement de type fini, alors il en est de même pour $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$.
2. Supposons que \mathcal{C} vérifie la propriété (FM) et que \mathcal{A} est localement de type fini. Alors le foncteur F est faiblement ponctuellement de type fini s'il est de type fini.

Démonstration. Il est classique que le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})(A[\mathcal{C}(t, -)], F) \simeq \mathcal{A}(A, F(t))$$

naturel en les objets A de \mathcal{A} , t de \mathcal{C} et F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Par conséquent, si \mathcal{A} est de type fini dans \mathcal{A} , $A[\mathcal{C}(t, -)]$ est de type fini dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ (cf. le corollaire 2.2); de plus, cet isomorphisme montre que si A parcourt un ensemble de générateurs de \mathcal{A} et t les objets de \mathcal{C} , alors les $A[\mathcal{C}(t, -)]$ engendrent $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$. Cela implique le premier point.

Comme tout quotient d'une somme directe de foncteurs faiblement ponctuellement de type fini est faiblement ponctuellement de type fini, ce qui précède montre également qu'il suffit de prouver, pour établir la deuxième partie, que $A[\mathcal{C}(t, -)]$ est faiblement ponctuellement de type fini lorsque A est de type fini et que \mathcal{C} vérifie (FM) . En effet, si G est un monoïde et E un G -ensemble de type fini, $A[E]$ est de type fini dans la catégorie \mathcal{A}_G des objets de \mathcal{A} munis d'une

action de G , dès lors que A est de type fini dans \mathcal{A} , à cause de l'isomorphisme naturel

$$\mathcal{A}_G(A[G], V) \simeq \mathcal{A}(A, \text{Ou}(M))$$

où $\text{Ou} : \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}$ est le foncteur d'oubli (appliquer encore le corollaire 2.2) et du fait que $A[E]$ est quotient d'une somme directe finie de copies de $A[G]$ si E est un G -ensemble de type fini. \square

Remarque 2.7. La propriété (FM) sur \mathcal{C} , suffisante pour que les foncteurs de type fini $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ soient faiblement ponctuellement de type fini, est aussi nécessaire, au moins si $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$, comme on le voit en considérant les générateurs projectifs de type fini $\mathbb{Z}[\mathcal{C}(c, -)]$. Même en se restreignant à des foncteurs polynomiaux depuis une catégorie dans Mon_{nul} , les foncteurs de type fini ne sont pas nécessairement faiblement ponctuellement de type fini. Un exemple est donné par le foncteur

$$\mathbf{P}(\mathbb{Z}[t]) \rightarrow \mathbf{Ab} \quad V \mapsto V_{\mathbb{Z}}^{\otimes 2},$$

qui est polynomial de degré 2, de type fini, mais pas faiblement ponctuellement de type fini.

2.3 Trois notions de finitude auxiliaires sur les foncteurs

Dans la suite, nous nous concentrerons le plus souvent sur des foncteurs ponctuellement noethériens. La raison en est donnée par la définition et la proposition suivantes.

Définition 2.8. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} , \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. On dira que F est *fortement noethérien* si, pour tout objet x de \mathcal{M} , le foncteur $\tau_x(F)$ est noethérien.

Nous ne traiterons essentiellement que de foncteurs fortement noethériens, dans la suite, pour la raison suivante. Nos démonstrations de propriétés de finitude de foncteurs polynomiaux reposent presque toutes sur des récurrences sur leur degré. En général, il s'agit donc de montrer que F est noethérien en s'appuyant sur le fait que les $\delta_x(F)$, qui sont de degré strictement inférieur (si F est non nul), le sont. Mais les suites exactes $F \rightarrow \tau_x(F) \rightarrow \delta_x(F) \rightarrow 0$ montrent que si F et les $\delta_x(F)$ sont noethériens, alors F est fortement noethérien. On pourra donc difficilement montrer qu'un foncteur est noethérien lorsqu'il n'est pas fortement noethérien. Il existe néanmoins des foncteurs noethériens non fortement noethériens, même dans les situations les plus simples.

Exemple 2.9. Soient A un anneau noethérien à gauche. Le foncteur d'inclusion de $\mathbf{P}(A)$ dans \mathbf{Ab} est polynomial de degré 1 et noethérien, mais son image par le foncteur δ_A est le foncteur constant en A , qui n'est pas nécessairement un groupe abélien de type fini, donc pas forcément un foncteur de type fini.

Proposition 2.10. Si F est fortement noethérien, alors F est ponctuellement noethérien.

Démonstration. Le fait que 0 est objet initial de \mathcal{M} implique que, pour tout foncteur noethérien $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$, $G(0)$ est un objet noethérien de \mathcal{A} (si V est un sous-objet de $G(0)$, l'évaluation en 0 du sous-foncteur de G engendré par V est égale à V). Comme $\tau_x(F)(0) = F(x)$, on en déduit la proposition. \square

Introduisons maintenant une définition pour une situation particulièrement simple pour traiter de finitude sur des foncteurs.

Définition 2.11. Soient \mathcal{C} une petite catégorie, \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. On dira que F est *presque nul* si l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets c de \mathcal{C} tels que $F(c) \neq 0$ est fini.

On notera que les foncteurs presque nuls forment une sous-catégorie épaisse de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$.

On a aussitôt :

Proposition 2.12. Tout foncteur presque nul et faiblement ponctuellement noethérien est noethérien.

On introduit enfin une définition dont on ne fera usage qu'à la fin de cet article.

Définition 2.13. Soient \mathcal{C} une petite catégorie, \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. On dit que F est *presque noethérien* s'il existe un sous-foncteur G presque nul de F tel que F/G soit noethérien.

Corollaire 2.14. Tout foncteur presque noethérien et faiblement ponctuellement noethérien est noethérien.

3 Hypothèses de finitude utiles sur les objets de $\mathcal{M}on_{ini}$

On commence par donner deux définitions qu'on utilisera, dans la section 6, pour des objets de $\mathcal{M}on_{ini}$ mais qui ne font pas intervenir de structure monoïdale.

Définition 3.1. On dit qu'une catégorie \mathcal{C} vérifie :

1. la propriété (FE) si pour tout objet x de \mathcal{M} , le monoïde $\text{End}_{\mathcal{C}}(x)$ est de type fini ;
2. la propriété (EI) si tout endomorphisme de \mathcal{C} est un isomorphisme.

Nous donnons maintenant la liste des propriétés de finitude sur les catégories monoïdales symétriques qui nous seront utiles dans la suite de cet article, à des degrés divers : la propriété (P_0) sera presque toujours nécessaire, tandis que la propriété (P_4) n'interviendra qu'à la fin.

3.1 Définitions

Définition 3.2. Soit $(\mathcal{M}, +, 0)$ une catégorie monoïdale symétrique.

1. On dira qu'un ensemble T d'objets de \mathcal{M} est générateur monoïdal (resp. générateur monoïdal faible) de $(\mathcal{M}, +, 0)$ (ou simplement, par abus, de \mathcal{M}) si tout objet de \mathcal{M} est isomorphe à une somme finie (resp. à un facteur direct d'une somme finie), au sens de $+$, d'éléments de T .
2. On notera (P_0) la propriété suivante de $(\mathcal{M}, +, 0)$: il existe un ensemble générateur monoïdal faible fini.

3. On dira que $(\mathcal{M}, +, 0)$ est une *pseudo-théorie* si elle possède un ensemble générateur monoïdal réduit à un élément, i.e. s'il existe $a \in \text{Ob } \mathcal{M}$ tel que tout objet de \mathcal{M} soit isomorphe à a^{+n} pour un $n \in \mathbb{N}$. Si l'on peut faire en sorte que cet entier soit toujours unique, nous dirons que \mathcal{M} est une pseudo-théorie *régulière*.
4. Nous dirons que \mathcal{M} vérifie la propriété (P_1) si pour tout objet x de \mathcal{M} , l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de \mathcal{M} n'appartenant pas à l'image essentielle de l'endofoncteur $x + -$ est fini.
5. Nous dirons que \mathcal{M} vérifie la propriété (P_2) si pour tout ensemble fini E d'objets de \mathcal{M} , il existe un objet x de \mathcal{M} tel qu'aucun des éléments de E n'appartienne à l'image essentielle de l'endofoncteur $x + -$ de \mathcal{M} .
6. Nous dirons que \mathcal{M} vérifie la propriété (P_3) si pour tous objets x et t de \mathcal{M} , l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets y de \mathcal{M} tel qu'existe un morphisme $x \rightarrow y$ ne se factorisant pas par le morphisme canonique $x \rightarrow x + t$ est fini.
7. On dira que \mathcal{M} vérifie la propriété (P_4) si pour tous objets t et a de \mathcal{M} , il existe un ensemble fini d'objets $U(a, t)$ tel que, pour tout objet x et tout morphisme $f : a \rightarrow t + x$ de \mathcal{M} , il existe un élément b de $U(a, t)$ et des morphismes $u \in \mathcal{M}(a, t + b)$ et $g \in \mathcal{M}(b, x)$ tels que f coïncide avec la composée

$$a \xrightarrow{u} t + b \xrightarrow{t+g} t + x.$$

On voit que si (P_0) est vérifiée et que \mathcal{M} appartient à Mon_{nul} , alors il existe un ensemble générateur monoïdal faible réduit à un élément (prendre la somme des éléments d'un ensemble générateur fini).

Remarque 3.3. Si T est un ensemble générateur monoïdal faible d'un objet \mathcal{M} de Mon_{ini} , alors un foncteur F de \mathcal{M} dans une catégorie abélienne est fortement polynomial de degré au plus $d \in \mathbb{N}$ si $\delta_{a_0} \dots \delta_{a_d}(F) = 0$ pour tout $(a_0, \dots, a_d) \in T^{d+1}$; cela découle des propriétés élémentaires des foncteurs δ_x (cf. [8]). Un critère analogue vaut pour les foncteurs faiblement polynomiaux.

Le cadre catégorique formel introduit dans [9] (et légèrement revisité dans [7] et [5]) pourra aider le lecteur à se convaincre que, malgré l'apparence technique de certaines des définitions ci-dessus, celles-ci ne sont pas si étranges.

La proposition suivante est immédiate.

- Proposition 3.4.**
1. Toute pseudo-théorie vérifie les propriétés (P_0) et (P_1) .
 2. Une pseudo-théorie régulière vérifie également la propriété (P_2) .

3.2 Exemples fondamentaux

Exemple 3.5. La catégorie Θ est une pseudo-théorie régulière vérifiant toutes les propriétés introduites précédemment. Toutefois, pour étudier les propriétés de finitude des foncteurs depuis la catégorie Θ , nous n'aurons même pas besoin d'utiliser explicitement toutes ces propriétés.

Dans des situations issues de catégories additives, les propriétés de finitude précédentes ne sont pas toujours satisfaites, et leur vérification ou réfutation peut s'avérer délicate. Nous nous contenterons de donner quelques cas favorables où l'on peut les établir sans trop de peine.

Proposition 3.6. Soit A un anneau non nul.

1. L'objet $\mathbf{S}(A)$ de $\mathcal{M}on_{ini}$ est une pseudo-théorie ; elle est régulière si A est commutatif ou artinien.
2. La catégorie $\mathbf{S}(A)$ vérifie (P_3) si A a un rang stable (au sens de Bass [1]) fini, par exemple si A est une algèbre commutative de type fini sur un corps, un anneau principal, un anneau local ou un anneau fini.
3. La catégorie $\mathbf{S}(A)$ vérifie (P_4) si A est un corps, un anneau principal ou un anneau fini.

Démonstration. Il est évident que $\mathbf{S}(A)$ est une pseudo-théorie ; elle est régulière si et seulement si tout isomorphisme $A^n \simeq A^m$ de A -modules à droite, où $n, m \in \mathbb{N}$, implique $n = m$. Lorsque A est commutatif, cette propriété s'obtient de façon rapide et classique par l'utilisation du déterminant, pour A artinien c'est une conséquence de la propriété de Krull-Schmidt.

Dans la catégorie $\mathbf{S}(A)$, la condition (P_3) peut se reformuler comme suit : pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, il existe r tel que, pour $t \geq r$, la condition $A^t \simeq A^n \oplus M$ pour un A -module à droite M implique l'existence d'un isomorphisme $M \simeq A^m \oplus N$ pour un certain A -module à droite N . Il suffit bien sûr de le montrer pour $n = m = 1$, en raisonnant par récurrence. Dire que A est de rang stable fini implique classiquement et facilement cette propriété.

Dans la catégorie $\mathbf{S}(A)$, la condition (P_4) est équivalente à la suivante : il existe un entier r tel que pour tout entier s , toute application A -linéaire (à droite) $f : A \rightarrow A^s$ se factorise en

$$A \rightarrow A^i \xrightarrow{g} A^s$$

pour un $i \leq r$ et un monomorphisme scindable g .

On montre seulement ici que cette propriété implique l'hypothèse (P_4) ; la réciproque, que le lecteur pourra traiter facilement en exercice, ne nous servira pas. Si la condition précédente est vérifiée, considérons un morphisme $\Phi : A \rightarrow A^n \oplus A^s$ de $\mathbf{S}(A)$, c'est-à-dire la donnée d'applications linéaires $A \rightarrow A^n \oplus A^s$ de coordonnées (x, y) et $A^n \oplus A^s \rightarrow A$ de coordonnées (l, L) avec $l(x) + L(y) = 1$. On factorise y comme précédemment : on trouve $z : A \rightarrow A^i$ avec $i \leq r$, $g : A^i \rightarrow A^n$ et $h : A^n \rightarrow A^i$ tels que $gz = y$ et $hg = 1$ (g et h forment donc un élément Ψ de $\mathbf{S}(A)(A^i, A^n)$). On obtient alors une factorisation dans $\mathbf{S}(A)$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & A^n \oplus A^s \\ & \searrow \Xi & \nearrow A^n \oplus \Psi \\ & & A^n \oplus A^i \end{array}$$

où Ξ est le morphisme donné par $(x, z) : A \rightarrow A^n \oplus A^i$ et $A^n \oplus A^i \rightarrow A$ de coordonnées l et Lg . Cela montre que $U(A, A^n) = \{A^i \mid i \leq r\}$ est un choix convenable (avec les notations de la définition 3.2 pour (P_4)), d'où l'on déduit facilement que (P_4) est vérifiée (raisonner par récurrence sur m pour trouver un $U(A^m, A^n)$ convenable).

Lorsque A est un corps ou un anneau principal, il est clair que la condition précédente est satisfaite pour $r = 1$. Si A est un anneau fini, on peut choisir évidemment le cardinal de l'anneau pour r . Cela termine la démonstration. \square

- Remarque 3.7.*
1. Il n'est pas difficile de voir que la condition (P_4) pour la catégorie $\mathbf{S}(A)$ entraîne que A a un rang stable de Bass fini (mais la réciproque semble erronée). D'un point de vue culturel, il serait intéressant de clarifier les liens entre les conditions de Bass et nos hypothèses, qui pourraient permettre de revisiter à l'aune de méthodes fonctorielles des résultats connus sur la stabilité en K -théorie algébrique.
 2. On pourrait généraliser la proposition précédente à des catégories d'espaces hermitiens hyperboliques sur un anneau à involution aux bonnes propriétés.

3.3 Utilisation pour les propriétés de finitude des foncteurs stablement nuls

Pour espérer disposer de bonnes propriétés de finitude des foncteurs faiblement polynomiaux, il est indispensable de commencer par se pencher sur les foncteurs stablement nuls : certaines des hypothèses introduites précédemment permettront d'en garantir un comportement agréable. Pour cela, on relie la notion de foncteur stablement nul à celle de foncteur presque nul.

Les deux propositions suivantes sont immédiates.

Proposition 3.8. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} , \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur.

1. Si F est presque nul et que \mathcal{M} vérifie la propriété (P_2) , alors il existe un objet t de \mathcal{M} tel que $\tau_t(F) = 0$.
2. S'il existe un objet t de \mathcal{M} tel que $\tau_t(F) = 0$ et que \mathcal{M} vérifie la propriété (P_1) , alors F est presque nul.

Proposition 3.9. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} vérifiant (P_1) , \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. Supposons que F est faiblement ponctuellement noethérien et qu'il existe un objet t de \mathcal{M} tel que $\tau_t(F)$ soit noethérien. Alors F est noethérien.

Nous utiliserons la propriété (P_3) par l'intermédiaire de la proposition suivante.

Proposition 3.10. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} vérifiant la propriété (P_3) , \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur stablement nul et de type fini. Alors F est presque nul.

Démonstration. Le foncteur F , stablement nul, est réunion filtrante des sous-foncteurs $\kappa_x(F)$ (pour $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$) et de type fini, donc il existe x tel que $\kappa_x(F) = F$, c'est-à-dire tel que $i_x(F) : F \rightarrow \tau_x(F)$ soit nul. Si S est un support de F , cela entraîne que $F(y) = 0$ pour tout objet y tel que toute flèche de source t dans S et de but y se factorise par $t \rightarrow x + t$. Comme F possède un support fini (proposition 4.2) et que \mathcal{M} vérifie (P_3) , on en déduit la finitude souhaitée de l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets y de \mathcal{M} tels que $F(y)$ est non nul. \square

En utilisant la proposition 2.12, on en déduit :

Corollaire 3.11. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} vérifiant (P_3) , \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur stablement nul, à support fini et faiblement ponctuellement noethérien. Alors F est noethérien.

Sans la propriété (P_3) (ou de légers affaiblissements de cette condition), il y a généralement beaucoup trop de foncteurs stablement nuls pour qu'on puisse aborder leurs propriétés de finitude par des méthodes spécifiques.

Exemple 3.12. Voyons le monoïde commutatif ordonné usuel \mathbb{N} comme un objet de Mon_{ini} et notons $\mathbb{Z}_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Ab}$ le foncteur égal à \mathbb{Z} en 0 et nul ailleurs. Si \mathcal{M} est un objet de Mon_{ini} , le foncteur $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{M} \times \mathbb{N}, \mathcal{A})$ (où \mathcal{A} est une catégorie abélienne) produit tensoriel extérieur par \mathbb{Z}_0 est exact et pleinement fidèle ; il est à valeurs dans les foncteurs stablement nuls. Ainsi, tout foncteur $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ peut se voir comme un foncteur stablement nul, en changeant la catégorie de départ. On notera de surcroît que, si \mathcal{M} vérifie (P_0) ou (P_2) , alors il en est de même pour $\mathcal{M} \times \mathbb{N}$ (qui ne vérifie toutefois presque jamais (P_1)).

4 Support des foncteurs fortement polynomiaux

Les propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux depuis une catégorie dans Mon_{nul} sont beaucoup plus faciles à étudier que pour une catégorie source générale de Mon_{ini} . Cela est dû à une propriété générale (proposition 4.6 ci-après) des foncteurs fortement polynomiaux (depuis un objet de Mon_{ini} n'appartenant pas forcément à Mon_{nul}), dont les conséquences sont aisées à tirer quand la sous-catégorie des foncteurs fortement polynomiaux est stable par sous-objets, ce qui n'est plus le cas en général quand on sort du cadre de Mon_{nul} . Cette propriété repose sur la notion de *support* d'un foncteur, dont on commence par rappeler la définition et quelques propriétés élémentaires.

4.1 Foncteurs à support fini

Définition 4.1. Soient \mathcal{C} une petite catégorie, \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur.

On appelle *support* de F tout ensemble S d'objets de \mathcal{C} tel que tout sous-foncteur G de F tel que l'inclusion $G(t) \subset F(t)$ est une égalité pour $t \in S$ est égal à F .

On dit que F est à support fini s'il admet un support fini.

Proposition 4.2. Soient \mathcal{C} une petite catégorie, \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur.

1. Si F est de type fini, alors F est à support fini.
2. Si F est à support fini et faiblement ponctuellement de type fini, alors F est de type fini.
3. La classe des foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ à support fini est stable par quotients et extensions.

Démonstration. Le premier point découle de ce que les générateurs $A[\mathcal{C}(c, -)]$ (où A est un objet de \mathcal{A} et c un objet de \mathcal{C} — cf. la démonstration de la proposition 2.6) de la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ sont à support fini ($\{c\}$ est un support de ce foncteur).

Si S est un support de F , ce foncteur est isomorphe à un quotient de la somme directe sur $s \in S$ de

$$\mathbb{Z}[\mathcal{C}(s, -)] \otimes_{\text{End}_{\mathcal{C}}(s)} F(s) ;$$

ce foncteur est de type fini si $F(s)$ est une représentation de type fini du monoïde $\text{End}_{\mathcal{C}}(s)$, car on dispose, pour toute représentation M de ce monoïde et tout foncteur $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$, d'un isomorphisme naturel

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})(\mathbb{Z}[\mathcal{C}(s, -)] \otimes_{\text{End}_{\mathcal{C}}(s)} M, G) \simeq \mathcal{A}_{\text{End}_{\mathcal{C}}(s)}(M, G(s))$$

qui permet d'appliquer le corollaire 2.2. Cela montre le deuxième point.

Pour la dernière assertion, on note que si G est un quotient de F , alors tout support de F est aussi un quotient de G . Si

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$, S un support de F et S' un support de H , alors $S \cup S'$ est un support de G . Cela achève la démonstration. \square

Proposition 4.3. Tout foncteur presque nul est à support fini.

Remarque 4.4. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} et \mathcal{A} une catégorie abélienne. Du fait que 0 est objet initial de \mathcal{M} , un foncteur $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ appartient à $\text{Pol}_0^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ si et seulement si $\{0\}$ est un support de F .

Au-delà du degré 0, le lien entre propriété polynomiale forte et support ne fonctionne généralement bien que dans un sens (cf. remarque 4.9 ci-après), cela fera l'objet du paragraphe suivant.

Nous terminons ce paragraphe par la variante suivante de la proposition 2.3 utilisant la notion de support fini (elle nous sera utile dans la section 6).

Proposition 4.5. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur ponctuellement noethérien. On suppose que, pour tout $t \in \text{Ob } \mathcal{M}$, le foncteur $\tau_t(F)$ est à support fini. Alors $\alpha(F) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ est ponctuellement noethérien.

Démonstration. Si F est à support fini et ponctuellement noethérien, alors $\text{colim}_{\mathcal{M}} F$ est un objet noethérien de \mathcal{A} . En effet, F est alors quotient d'une somme directe finie d'objets du type $A[\mathcal{M}(x, -)]$ avec $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$ et $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ noethérien (on peut prendre $A = F(x)$), dont la colimite est A .

Sous les hypothèses de l'énoncé, pour tout $t \in \text{Ob } \mathcal{M}$, $\tau_t(F)$ est à support fini et ponctuellement noethérien, donc $\alpha(F)(t) = \text{colim}_{\mathcal{M}} \tau_t(F)$ est noethérien. \square

4.2 Cas des foncteurs fortement polynomiaux

Proposition 4.6. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} vérifiant la propriété (P_0) et \mathcal{A} une catégorie abélienne. Tout foncteur fortement polynomial $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ est à support fini. Plus précisément, soit T un ensemble générateur monoïdal faible fini de \mathcal{M} et $d \in \mathbb{N}$. L'ensemble $S_d := \{a_1 + \dots + a_i \mid i \leq d, a_i \in T\}$ (qui est égal à $\{0\}$ pour $d = 0$) est un support pour chaque foncteur de $\text{Pol}_d^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Démonstration. On établit la propriété par récurrence pour d . Pour $d = 0$, elle découle de ce que 0 est objet initial de \mathcal{M} (cf. remarque 4.4).

Supposons-la vraie pour les foncteurs de degré strictement inférieur à $d > 0$ et considérons un foncteur F fortement polynomial de degré fort d . Soit G un sous-foncteur de F tel que $G(t) = F(t)$ pour $t \in S_d$. Pour $x \in T$, notons

H_x l'image du morphisme $\delta_x(G) \rightarrow \delta_x(F)$ induit par l'inclusion. L'inclusion $H_x(t) \subset \delta_x(F)(t)$ est une égalité pour $t \in S_{d-1}$, de sorte que $H_x = \delta_x(F)$ par l'hypothèse de récurrence. Autrement dit, $\delta_x(F/G) = 0$ pour tout $x \in T$, de sorte que F/G est polynomial de degré fort au plus 0, puisque l'ensemble T est générateur monoïdal faible de \mathcal{M} (utiliser la proposition 1.17 de [8]). Mais comme 0 appartient à S_d , F/G est nul en 0, donc F/G est nul, ce qui établit la proposition. \square

Remarque 4.7. Sans hypothèse de finitude sur \mathcal{M} , la conclusion de la proposition 4.6 peut être en défaut, en voici un exemple.

Soient E un ensemble quelconque et M le monoïde commutatif obtenu en adjoignant à E deux éléments notés 0 et ∞ , la loi de composition étant caractérisée par le fait que 0 est son unité et que $x + y = \infty$ dès que ni x ni y ne sont égaux à 0. On munit M d'un ordre partiel compatible à sa structure de monoïde en imposant que 0 (resp. ∞) en soit le plus petit (resp. le plus grand) élément et que les éléments de E sont deux à deux incomparables. Cette relation d'ordre permet de voir M comme une petite catégorie monoïdale symétrique, qui appartient à Mon_{ini} . Elle vérifie même la propriété de finitude suivante (mais pas (P_0)) : il existe un objet, en l'occurrence ∞ , tel que pour tout objet x de M existe un objet y tel que $x + y = \infty$ (cette propriété impliquerait (P_0) pour une catégorie de Mon_{nul}).

Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et A un objet non nul de \mathcal{A} . Alors le foncteur de $\mathbf{Fct}(M, \mathcal{A})$ constant en A est fortement polynomial de degré fort 0, il est à support fini ($\{0\}$ en étant un support), et ponctuellement noethérien (donc en particulier de type fini par la proposition 4.2) si A est noethérien, mais il n'est pas noethérien si E est un ensemble infini. En effet, le sous-foncteur $A_{>0}$ de A nul en 0 et égal à A ailleurs n'est pas de type fini (tout support de ce foncteur contient E). Pourtant, ce foncteur $A_{>0}$ est fortement polynomial de degré fort 1.

Dans le cas de la catégorie source Θ , il est remarquable qu'on dispose d'une réciproque au fait qu'un foncteur fortement polynomial est à support fini :

Proposition 4.8. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et $F : \Theta \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. Alors F est fortement polynomial si et seulement s'il est à support fini. Plus précisément, F est fortement polynomial de degré fort au plus d si et seulement si $\{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{d}\}$ est un support de F .

Démonstration. Un calcul immédiat fournit un isomorphisme naturel

$$\delta_{\mathbf{1}}(A[\Theta(\mathbf{d}, -)]) \simeq A[\Theta(\mathbf{d} - \mathbf{1}, -)]^{\oplus d}$$

(où A est un objet de \mathcal{A} et d un entier naturel), d'où l'on tire par récurrence que $A[\Theta(\mathbf{d}, -)]$ est fortement polynomial de degré au plus d . Il s'en suit que tout foncteur dont $\{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{d}\}$ est un support est fortement polynomial de degré au plus d . La réciproque provient de la proposition 4.6. \square

Remarque 4.9. En général, si \mathcal{M} est un objet de Mon_{ini} (ou même de Mon_{nul}), il est tout à fait exceptionnel que les foncteurs représentables $U[\mathcal{M}(x, -)]$ (où U est un objet non nul de \mathcal{A} et x un objet de \mathcal{M}) soient polynomiaux (même faiblement). Par exemple, si A est un anneau non nul et $n > 0$ un entier, ce n'est jamais le cas pour $\mathcal{M} = \mathbf{S}(A)$ ou $\mathcal{M} = \mathbf{P}(A)$ si $x = A^{\oplus n}$.

4.3 Propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux depuis un objet de $\mathcal{M}on_{\text{mul}}$

Proposition 4.10. Soient \mathcal{M} une catégorie de $\mathcal{M}on_{\text{mul}}$ possédant la propriété (P_0) et \mathcal{A} une catégorie abélienne.

Tout foncteur polynomial $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ faiblement ponctuellement de type fini (resp. faiblement ponctuellement noethérien) est de type fini (resp. noethérien).

Démonstration. Cela résulte des propositions 4.6, 4.2 et de ce que tout sous-foncteur d'un foncteur polynomial de source dans $\mathcal{M}on_{\text{mul}}$ est encore polynomial. \square

Remarque 4.11. Si l'on n'impose aucune condition de finitude à la catégorie monoïdale \mathcal{M} , les conclusions de la proposition précédente peuvent tomber en défaut (nous ne prétendons pas que la condition (P_0) soit optimale, mais elle correspond très bien aux applications usuelles). L'exemple 4.14 ci-après en donne une illustration.

À titre d'application de la proposition 4.10, nous donnons une condition suffisante simple pour que les foncteurs polynomiaux d'une catégorie *additive* vers une catégorie abélienne localement noethérienne forment une catégorie localement noethérienne.

Proposition 4.12. Soient \mathcal{C} une petite catégorie additive vérifiant (P_0) et telle que, pour tous objets a et b de \mathcal{C} , le groupe abélien $\mathcal{C}(a, b)$ soit de type fini, et \mathcal{A} une catégorie abélienne localement noethérienne. Alors la catégorie des foncteurs polynomiaux de \mathcal{C} dans \mathcal{A} est localement noethérienne. De plus, les objets noethériens de cette catégorie sont des foncteurs ponctuellement noethériens.

Démonstration. Notons \mathbf{Ab}^{tf} la sous-catégorie pleine de \mathbf{Ab} des groupes abéliens de type fini, et $Q_n : \mathbf{Ab}^{\text{tf}} \rightarrow \mathbf{Ab}$, pour $n \in \mathbb{N}$, le plus grand quotient du foncteur $\mathbb{Z}[-]$ appartenant à $\mathcal{P}ol_n(\mathbf{Ab}^{\text{tf}}, \mathbf{Ab})$. La catégorie $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est engendrée par les foncteurs $A \otimes Q_n \circ \mathcal{C}(t, -)$, où A est un objet noethérien de \mathcal{A} et t un objet de \mathcal{C} . La conclusion résulte donc de la proposition 4.10 et du lemme ci-après. \square

Lemme 4.13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur Q_n est à valeurs dans \mathbf{Ab}^{tf} .

Démonstration. Pour tout groupe abélien de type fini M , $Q_n(M)$ est le quotient de $\mathbb{Z}[M]$ par le sous-groupe engendré par les éléments du type

$$\sum_{I \subset \{0, \dots, n\}} (-1)^{\text{Card}(I)} [x_I]$$

où x_0, \dots, x_n sont des éléments de M et l'on note $x_I := \sum_{i \in I} x_i$.

Soit E une partie génératrice finie de M . On vérifie que l'image dans $Q_n(M)$ des éléments de $\mathbb{Z}[M]$ du type

$$\left[\sum_{t \in E} \varepsilon(t) t \right]$$

où ε parcourt l'ensemble des fonctions de E vers les entiers de valeur absolue au plus n est une partie génératrice de $Q_n(M)$. \square

Sans la propriété (P_0) , la proposition 4.12 peut tomber en défaut, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 4.14. La catégorie \mathbf{Ab}^{tf} est additive, essentiellement petite et tous ses groupes abéliens de morphismes sont de type fini. Pourtant, la catégorie des foncteurs additifs $\mathbf{Ab}^{tf} \rightarrow \mathbf{Ab}$ n'est pas localement noethérienne. En effet, le foncteur d'inclusion est de type fini (et par ailleurs ponctuellement noethérien), puisque représentable par \mathbb{Z} , mais contient le foncteur associant à un groupe abélien de type fini son sous-groupe de torsion, qui est la somme directe infinie non triviale des foncteurs de torsion p -primaire, p décrivant l'ensemble des nombres premiers, donc n'est pas de type fini.

Remarque 4.15. Si les foncteurs polynomiaux d'une petite catégorie additive \mathcal{C} vers les groupes abéliens forment une catégorie localement noethérienne, alors ils possèdent une autre propriété de finitude : ceux d'entre eux qui sont de type fini admettent, dans la catégorie de *tous* les foncteurs $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$, une résolution projective de type fini (lorsque $\mathcal{C} = \mathbf{P}(A)$ pour un certain anneau A , cette propriété équivaut, pour les foncteurs additifs, à la commutation de l'homologie de Mac Lane de A aux colimites filtrantes). Ce résultat classique est lié à la construction cubique de Mac Lane ; une esquisse de démonstration en est donnée dans les notes [4] (proposition 7, page 8).

5 Propriétés de finitude des foncteurs fortement polynomiaux

5.1 Propriétés de finitude des foncteurs $\eta(F)$

Proposition 5.1. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} vérifiant les propriétés (P_0) et (P_1) , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur polynomial ponctuellement noethérien. Alors $\eta(F)$ est un objet noethérien de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

(La proposition 5.7 ci-après montrera que l'hypothèse (P_1) est en fait superflue.)

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le degré d de F : on suppose le résultat établi pour les foncteurs polynomiaux de degré strictement inférieur à d . Si x est un objet de \mathcal{M} et A un sous-foncteur de $\eta(F)$, notons $A[x]$ l'image du morphisme

$$\tau_x(A) \hookrightarrow \tau_x \eta(F) \simeq \eta \tau_x(F) \twoheadrightarrow \eta(F)$$

composé du monomorphisme induit par l'inclusion et de l'épimorphisme canonique déduit de ce que 0 est objet final dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. Tout morphisme $x \rightarrow y$ de \mathcal{M} induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \tau_x(A) & \hookrightarrow & \tau_x \eta(F) & \xrightarrow{\simeq} & \eta \tau_x(F) & \twoheadrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \tau_y(A) & \hookrightarrow & \tau_y \eta(F) & \xrightarrow{\simeq} & \eta \tau_y(F) & \twoheadrightarrow & F \end{array}$$

de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ qui montre l'inclusion $A[x] \subset A[y]$ pour $\mathcal{M}(x, y) \neq \emptyset$. En particulier, $A = A[0] \subset A[x]$, et la famille de sous-objets $(A[x])_{x \in \text{Ob } \mathcal{M}}$ de $\eta(F)$ est

filtrante à droite. Notons \tilde{A} sa réunion. La suite de la démonstration repose sur le lemme suivant. \square

- Lemme 5.2.**
1. Le sous-objet \tilde{A} de $\eta(F)$ s'identifie à l'image par le foncteur η de l'image \hat{A} du morphisme $\alpha(A) \rightarrow F$ de $\mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ adjoint à l'inclusion $A \hookrightarrow \eta(F)$.
 2. Il existe un objet x de \mathcal{M} (dépendant de A) tel que $\tilde{A} = A[x]$.
 3. Pour tout objet x de \mathcal{M} , on dispose d'une suite exacte

$$0 \rightarrow \tau_x(A) \cap \eta\delta_x(F) \rightarrow \tau_x(A) \rightarrow A[x] \rightarrow 0$$

(on plonge $\delta_x(F)$ dans $\tau_x(F)$ comme le noyau de la projection $\tau_x(F) \rightarrow F$) naturelle en le sous-foncteur A de $\eta(F)$.

Démonstration. Le premier point provient de la formule (1) décrivant l'adjoint à gauche α de η . On en déduit que \tilde{A} est fortement polynomial (de degré au plus d), ce qui entraîne que ce foncteur est à support fini par la proposition 4.6. Comme ce foncteur est également ponctuellement noethérien, comme F , il est de type fini (proposition 4.2). Du fait qu'il est réunion filtrante des sous-foncteurs $A[x]$, cela implique la deuxième propriété.

La dernière assertion est évidente. \square

Fin de la démonstration de la proposition 5.1. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-objets de $\eta(F)$. La suite (\hat{A}_n) de sous-foncteurs de F stationne — disons $\hat{A}_n = \hat{A}_N$ pour $n \geq N$. En effet, la proposition 4.10 montre que F est noethérien ($\widetilde{\mathcal{M}}$ vérifie (P_0) comme \mathcal{M}). Le lemme 5.2 procure un objet x de \mathcal{M} tel que $\eta(\hat{A}_N) = \tilde{A}_N = A_N[x]$. Pour $n \geq N$, l'inclusion $A_N[x] \subset A_n[x]$ est une égalité, puisque sa composée avec l'inclusion $A_n[x] \subset \tilde{A}_n = \eta(\hat{A}_n)$ coïncide avec la composée des inclusions $A_N[x] \subset \tilde{A}_N = \eta(\hat{A}_N) \subset \eta(\hat{A}_n)$ qui sont des égalités par choix de N et x .

Par ailleurs, la suite $(\tau_x(A_n) \cap \eta\delta_x(F))_n$ de sous-foncteurs de $\eta\delta_x(F)$ stationne, par l'hypothèse de récurrence. Le dernier point du lemme précédent montre donc que la suite $(\tau_x(A_n))_n$ de sous-foncteurs de $\tau_x\eta(F)$ stationne. Grâce à la propriété (P_1) , qui garantit que tous les objets de \mathcal{M} , sauf un nombre fini à isomorphisme près, appartiennent à l'image essentielle de l'endofoncteur $x + -$ et au fait que F est ponctuellement noethérien, on en déduit que la suite $(A_n)_n$ elle-même stationne. Cela termine la démonstration. \square

Remarque 5.3. En reprenant la même démonstration en tenant compte de l'action naturelle du monoïde $\text{End}_{\mathcal{M}}(x)$ sur $\tau_x(A)$ et $\delta_x(A)$ pour tous $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$ et $A : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$, on voit qu'on peut affaiblir l'hypothèse que F est ponctuellement noethérien en l'hypothèse suivante : pour tous objets a_1, \dots, a_r de \mathcal{M} , $F(a_1 + \dots + a_r)$ est un objet noethérien dans la catégorie des représentations (dans \mathcal{A}) du monoïde $\text{End}_{\mathcal{M}}(a_1) \times \dots \times \text{End}_{\mathcal{M}}(a_r)$ (on peut se contenter de cette propriété pour r égal au degré polynomial de F). Nous n'insistons toutefois pas sur cette légère amélioration (qui se transmet à de nombreux résultats ultérieurs de cet article) car nous n'en connaissons pas d'application.

5.2 Application : cas de la catégorie source Θ (cf. [3])

La proposition suivante (dans le cas où \mathcal{A} est une catégorie de modules) constitue l'un des résultats principaux (*Theorem 1.1*) de l'article [3].

Proposition 5.4 (Church-Ellenberg-Farb-Nagpal). Soit \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. La catégorie $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ est localement noethérienne.

Démonstration. Pour tout objet A de \mathcal{A} et tout entier $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $A[\tilde{\Theta}(\mathbf{n}, -)]$ de $\mathbf{Fct}(\tilde{\Theta}, \mathcal{A})$ est polynomial de degré n — on vérifie en effet que $\delta_1(A[\tilde{\Theta}(\mathbf{n}, -)]) \simeq A[\tilde{\Theta}(\mathbf{n} - \mathbf{1}, -)]^{\oplus n}$ (cf. la démonstration de la proposition 4.8). Comme la catégorie Θ vérifie les propriétés (P_0) et (P_1) , la proposition 5.1 montre que $\eta(A[\tilde{\Theta}(\mathbf{n}, -)])$, donc a fortiori $A[\Theta(\mathbf{n}, -)]$ qui en est un sous-foncteur, est un objet noethérien de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ si A est un objet noethérien de \mathcal{A} . La catégorie $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ est engendrée par les $A[\tilde{\Theta}(\mathbf{n}, -)]$, où A appartient à un ensemble de générateur noethériens de \mathcal{A} et n à \mathbb{N} , d'où le résultat. \square

Remarque 5.5. La méthode que nous avons suivie pour établir la proposition 5.1 généralise celle de l'article [3]; elle suit également un principe analogue à celui utilisé pour démontrer un résultat de finitude dans des catégories de foncteurs (nettement plus difficile) appelé *théorème de simplicité généralisé* dans [6] (théorème 16.2.7).

La situation de la catégorie Θ est particulièrement favorable : le fait que des foncteurs du type $A[\mathcal{C}(c, -)]$, où \mathcal{C} est un objet de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$ (ou de $\mathcal{M}on_{\text{mul}}$) et c un objet de \mathcal{C} , soient polynomiaux est tout à fait exceptionnel (cf. remarque 4.9). En particulier, les propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux ne suffisent pas à montrer des propriétés de finitude pour tous les foncteurs de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ (qui sont notoirement difficiles en général — cf. [6] par exemple); de plus, même pour les foncteurs polynomiaux, la proposition 5.1 ne suffit pas à elle seule à obtenir facilement tous les résultats de finitude qu'on peut espérer. Elle constitue toutefois le point de départ de tous nos résultats de noethérianité ultérieurs.

5.3 Résultat principal

En utilisant la fonctorialité en \mathcal{M} des constructions, on voit que la catégorie Θ joue un rôle fondamental pour l'étude des foncteurs fortement polynomiaux.

Lemme 5.6. Soit \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$ vérifiant (P_0) . Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un morphisme $\Phi : \Theta^n \rightarrow \mathcal{M}$ de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$ qui est faiblement essentiellement surjectif au sens où tout objet de \mathcal{M} est facteur direct d'un objet de l'image de Φ .

Démonstration. Soit $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ un ensemble générateur monoïdal faible fini de \mathcal{M} . La propriété universelle de Θ (cf. [8], exemple 1.13.1) procure, pour chaque i , un foncteur monoïdal $\phi_i : \Theta \rightarrow \mathcal{M}$ envoyant $\mathbf{1}$ sur a_i . Le foncteur Φ composé du produit des ϕ_i et du foncteur de somme itérée $\mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}$ convient. \square

Proposition 5.7. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$ vérifiant (P_0) , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur fortement polynomial et ponctuellement noethérien. Alors F est noethérien.

Démonstration. La précomposition de F par un foncteur Φ comme dans le lemme 5.6 est encore fortement polynomiale et ponctuellement noethérienne. Du fait que Φ est faiblement essentiellement surjectif, le foncteur de précomposition Φ^* est exact et fidèle, donc la noethérianité de Φ^*F entraîne celle de F . Autrement dit, il suffit de vérifier la proposition pour $\mathcal{M} = \Theta^n$. La propriété s'obtient alors par récurrence sur n à partir de la proposition 5.4 en notant qu'un foncteur fortement polynomial et ponctuellement noethérien est de type fini (par les propositions 4.6 et 4.2) et que, via les isomorphismes de catégories

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mathcal{A}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathbf{Fct}(\mathcal{N}, \mathcal{A}))$$

où \mathcal{M} et \mathcal{N} sont deux objets de $\mathcal{M}on_{ini}$, un foncteur fortement polynomial de la catégorie de gauche est envoyé sur un foncteur fortement polynomial et à valeurs fortement polynomiales dans la catégorie de droite. \square

- Remarque 5.8.*
1. L'auteur ignore si le résultat de la proposition 5.7 (ou même seulement de la proposition 5.1) persiste en remplaçant l'hypothèse d'un foncteur ponctuellement noethérien par celle d'un foncteur faiblement ponctuellement noethérien. C'est une difficulté générale due au traitement de foncteurs non fortement noethériens (cf. proposition 2.10).
 2. Contrairement à ce qui arrive dans la proposition 5.7, pour les résultats de la suite de cet article, il semble illusoire de penser tout ramener au cas de la catégorie source Θ , ne serait-ce que parce que le foncteur section s n'a nulle raison de se comporter agréablement relativement aux foncteurs de précomposition par un morphisme de $\mathcal{M}on_{ini}$.

6 Propriétés de finitude des foncteurs faiblement polynomiaux

Nous nous intéressons maintenant aux propriétés de finitude des foncteurs de $\mathcal{P}ol_d^{faible}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. L'idée générale de la démonstration est toujours de raisonner par récurrence sur le degré en utilisant les propriétés des différents foncteurs disponibles ($\tau, \delta, \kappa, \dots$), mais une difficulté apparaît du fait que la proposition 4.6 n'a pas d'analogue pour les foncteurs faiblement polynomiaux, même avec une « très bonne » catégorie source \mathcal{M} , comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 6.1. Dans la catégorie $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathbf{Ab})$ (qui est localement noethérienne — cf. proposition 5.4), pour $n \in \mathbb{N}$, notons \mathbb{Z}_n le foncteur égal à \mathbb{Z} sur les ensembles de cardinal n et nul ailleurs. Le foncteur $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n$ de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathbf{Ab})$ est stablement nul, donc faiblement polynomial de degré $-\infty$, et ponctuellement noethérien, mais il n'est pas de type fini.

Pourtant, la catégorie Θ vérifie toutes nos hypothèses de finitude.

Nous nous limiterons donc, dans un premier temps (corollaire 6.8), aux foncteurs faiblement polynomiaux et $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ -fermés de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ (i.e. ceux sur lesquels l'unité $\text{Id} \rightarrow s\pi$ de l'adjonction est un isomorphisme).

Pour cela, nous aurons besoin d'un résultat crucial sur les foncteurs dérivés à droite $\mathbf{R}^i(s)$ du foncteur section $s : \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Comme la composée de s avec le foncteur exact π est isomorphe à l'identité, donc exacte, pour $i > 0$, $\mathbf{R}^i(s)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. De plus, on rappelle que

les résultats de [8] sur le foncteur η impliquent que $\mathbf{R}^i(s)(\pi\eta A) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout foncteur A de $\mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ (tandis que $s\pi\eta(A) \simeq \eta(A)$).

Dans l'immédiat, nous donnons deux lemmes qui donnent des propriétés qui ressemblent à des propriétés de présentation finie pour l'image dans $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ des foncteurs constants.

Lemme 6.2. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{Mon}_{\text{ini}}$, \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck, $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur, C un objet de \mathcal{A} (vu aussi comme foncteur constant $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$) et $f : F \rightarrow C$ un morphisme stablement surjectif (i.e. dont l'image dans $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est un épimorphisme). Si S est un support de F et x un objet de \mathcal{M} tel que $\mathcal{M}(s, x) \neq \emptyset$ pour tout $s \in S$, alors $f(x) : F(x) \rightarrow C$ est surjectif.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\varphi : \bigoplus_{s \in S} F(s) \rightarrow C$ (de composantes les $f(s)$) est surjectif. Pour cela, on note que, pour tout objet t de \mathcal{M} , le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{s \in S} F(s)[\mathcal{M}(s, t)] & \longrightarrow & F(t) \\ \downarrow & & \downarrow f(t) \\ \bigoplus_{s \in S} F(s) & \xrightarrow{\varphi} & C \end{array}$$

dont la flèche verticale de gauche est la somme directe des augmentations $F(s)[\mathcal{M}(s, t)] \rightarrow F(s)$ et la flèche horizontale supérieure le morphisme canonique, dont le fait que S est un support de F garantit la surjectivité, montre que l'image de φ contient l'image de $f(t)$. Comme C est la réunion de ces images, puisque F est stablement surjectif, on en déduit $\text{Im } \varphi = C$ comme souhaité. \square

Lemme 6.3. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{Mon}_{\text{ini}}$ vérifiant (P_0) et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck. Il existe un objet a de \mathcal{M} tel que pour tous $d \in \mathbb{N}$, $F \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_d^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, $C \in \text{Ob } \mathcal{A}$ et $f : F \rightarrow C$ stablement surjectif, $\tau_{a+d}(f)$ soit surjectif.

Démonstration. Le foncteur fortement polynomial F possède un support fini donné par la proposition 4.6. On déduit alors le résultat du lemme 6.2 en prenant pour a la somme des éléments d'un ensemble générateur monoïdal faible fini de \mathcal{M} . \square

6.1 Propriété fondamentale du foncteur section

La proposition suivante constitue l'un des principaux résultats de ce travail. Elle est de nature très générale, ne requérant que peu d'hypothèses de finitude sur la catégorie source et aucune hypothèse de noethérianité ; sa conclusion n'est d'ailleurs pas vraiment une propriété de finitude. Elle jouera un rôle complémentaire de la proposition 5.1 pour établir des propriétés de finitude sur les foncteurs faiblement polynomiaux.

Proposition 6.4. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{Mon}_{\text{ini}}$ vérifiant (P_0) et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe des objets $r(d)$ et $s(d)$ de \mathcal{M} tels que, pour tout objet X de $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, on ait :

1. $\tau_{r(d)}(\mathbf{R}^i s)(X) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$ et $(\mathbf{R}^i s)(X) = 0$ pour $i > d$;

2. $\tau_{s(d)}s(X) \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_d^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Démonstration. On procède par une récurrence imbriquée sur trois hypothèses, où $d \geq d' \geq 0$ sont des entiers et $r(d)$, $s(d)$ et $t(d, d')$ sont des objets de \mathcal{M} :

- $(HR_1(d))$ pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, $\tau_{r(d)}(\mathbf{R}^i s)(X) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$ et $(\mathbf{R}^i s)(X) = 0$ pour $i > d$;
- $(HR_2(d))$ pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, $\tau_{s(d)}s(X) \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_d^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$;
- $(HR_3(d, d'))$ pour tous $A \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_d(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$, $X \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_{d'}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et tout épimorphisme $f : \pi\eta(A) \rightarrow X$ de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, $\tau_{t(d, d')}(\text{Coker } s(f)) = 0$.

Pour l'initialisation, on note que $HR_1(0)$ et $HR_2(0)$ sont vérifiées avec $r(0) = s(0) = 0$ (puisque $\mathcal{P}ol_0(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est équivalente à \mathcal{A} via l'inclusion des foncteurs constants); le lemme 6.3 montre que $HR_3(d, 0)$ est vérifiée avec $t(d, 0) = a^{+d}$ pour un objet convenable a de \mathcal{M} .

Le résultat découle alors de la conjonction des trois lemmes qui suivent, où l'on suppose $d \geq d' > 0$. \square

Lemme 6.5. Si $HR_1(d-1)$ et $HR_3(d, d-1)$ sont vérifiées, alors $HR_1(d)$ l'est également, et tout $r(d)$ tel qu'il existe des objets a' et a'' de \mathcal{M} tels que $r(d) \simeq r(d-1) + a'$ et $r(d) \simeq t(d, d-1) + a''$ (par exemple, $r(d) = r(d-1) + t(d, d-1)$) convient.

Démonstration. On sait qu'il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow Y \rightarrow X \xrightarrow{u} \pi\eta(A) \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$$

avec Y et Z dans $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et A dans $\mathcal{P}ol_d(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$. Notons L l'image de u : la suite exacte courte $0 \rightarrow L \rightarrow \pi\eta(A) \rightarrow Z \xrightarrow{v} 0$ et les relations $(\mathbf{R}^i s)(\pi\eta(A)) = 0$ pour $i > 0$ montrent que $(\mathbf{R}^i s)(L) \simeq (\mathbf{R}^{i-1} s)(Z)$ pour $i \geq 2$, d'où $\tau_{r(d-1)}(\mathbf{R}^i s)(X) = 0$ pour $2 \leq i \leq d$ et $(\mathbf{R}^i s)(X) = 0$ pour $i > d$ par $HR_1(d-1)$, tandis que $(\mathbf{R}^1 s)(L)$ est le conoyau de $s(v)$. Ainsi $HR_3(d, d-1)$ fournit $\tau_{t(d, d-1)}\mathbf{R}^1(s)(L) = 0$.

Maintenant, la suite exacte courte $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow L \rightarrow 0$ fournit des suites exactes $(\mathbf{R}^i s)(Y) \rightarrow (\mathbf{R}^i s)(X) \rightarrow (\mathbf{R}^i s)(L)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: ce qu'on vient de montrer sur les $(\mathbf{R}^i s)(L)$ et ce que $HR_1(d-1)$ implique pour Y entraîne le résultat souhaité pour X . \square

Lemme 6.6. Si $HR_2(d-1)$ et $HR_1(d)$ sont vérifiées, alors $HR_2(d)$ l'est également avec $s(d) = s(d-1) + r(d)$.

Démonstration. On procède selon une méthode analogue à celle du lemme 6.5, dont on conserve les notations de la démonstration. La suite exacte

$$0 \rightarrow s(L) \rightarrow \eta(A) \rightarrow s(Z) \rightarrow (\mathbf{R}^1 s)(L) \rightarrow 0$$

de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ induit, grâce à $HR_1(d)$, une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \tau_{r(d)}s(L) \rightarrow \tau_{r(d)}\eta(A) \rightarrow \tau_{r(d)}s(Z) \rightarrow 0;$$

autrement dit, en utilisant la commutation du foncteur section s et de $\tau_{r(d)}$, la suite exacte courte $0 \rightarrow L \rightarrow \pi\eta(A) \rightarrow Z \rightarrow 0$ induit une suite exacte courte

$$0 \rightarrow s(\tau_{r(d)}L) \rightarrow \eta(\tau_{r(d)}A) \rightarrow s(\tau_{r(d)}Z) \rightarrow 0.$$

Si x est un objet de \mathcal{M} , la suite exacte courte $0 \rightarrow \delta_x(L) \rightarrow \pi\eta\delta_x(A) \rightarrow \delta_x(Z) \rightarrow 0$ induit une suite exacte courte

$$0 \rightarrow s(\delta_x(\tau_r(d)L)) \rightarrow \eta(\delta_x(\tau_r(d)A)) \rightarrow s(\delta_x(\tau_r(d)Z)) \rightarrow 0$$

pour la même raison (on utilise également sans cesse la commutation de $\tau_r(d)$ à tous les foncteurs utilisés).

Considérons le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \delta_x s(\tau_r(d)L) & \longrightarrow & \eta(\delta_x \tau_r(d)A) & \longrightarrow & \delta_x s(\tau_r(d)Z) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & s(\delta_x(\tau_r(d)L)) & \longrightarrow & \eta(\delta_x(\tau_r(d)A)) & \longrightarrow & s(\delta_x(\tau_r(d)Z)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ (la suite supérieure est exacte à gauche car $\kappa_x(s(\tau_r(d)Z)) = 0$) dont les flèches verticales sont les *monomorphismes* naturels : il montre que le morphisme $\delta_x s(\tau_r(d)L) \rightarrow s(\delta_x(\tau_r(d)L))$ est un isomorphisme. Comme $\tau_{s(d-1)}s(\delta_x(\tau_r(d)L))$ appartient à $\mathcal{P}ol_{d-1}^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ par $HR_2(d-1)$, on en tire que $\tau_{s(d-1)}s(\tau_r(d)L) \simeq \tau_{s(d-1)+r(d)}s(L)$ appartient à $\mathcal{P}ol_d^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Revenons à X : la suite exacte courte $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow L \rightarrow 0$ et $HR_1(d)$ fournissent une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \tau_{r(d)+s(d-1)}s(Y) \rightarrow \tau_{r(d)+s(d-1)}s(X) \rightarrow \tau_{r(d)+s(d-1)}s(L) \rightarrow 0 ;$$

comme $\tau_{r(d)+s(d-1)}s(L)$ appartient à $\mathcal{P}ol_d^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ comme on vient de le voir, et $\tau_{r(d)+s(d-1)}s(Y)$ aussi (par $HR_2(d-1)$), on voit qu'il en est de même pour $\tau_{r(d)+s(d-1)}s(X)$, d'où le lemme. \square

Lemme 6.7. Si $HR_3(d-1, d'-1)$ et $HR_2(d-1)$ sont vérifiées, alors $HR_3(d, d')$ l'est également avec $t(d, d') = t(d-1, d'-1) + s(d-1) + a^{+d}$.

Démonstration. Soit $f : \pi\eta(A) \twoheadrightarrow X$ un épimorphisme de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, avec $A \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $X \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_{d'}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Pour tout objet x de \mathcal{M} , $\tau_{t(d-1, d'-1)}s(\delta_x(f))$ est un épimorphisme (par l'hypothèse $HR_3(d-1, d'-1)$). En utilisant le monomorphisme naturel $\delta_x s \hookrightarrow s\delta_x$ (comme dans la démonstration du lemme 6.6), on voit que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \eta\delta_x(A) & \xrightarrow{\simeq} & \delta_x s(\pi\eta(A)) & \xrightarrow{\delta_x(s(f))} & \delta_x(sX) \\ \parallel & & & & \downarrow \\ \eta\delta_x(A) & \xrightarrow{\simeq} & s\delta_x(\pi\eta(A)) & \xrightarrow{s\delta_x(f)} & s\delta_x(X) \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est un monomorphisme procure un monomorphisme Coker $\delta_x(sf) \hookrightarrow \text{Coker } s\delta_x(f)$. Par conséquent, $\tau_{t(d-1, d'-1)}\delta_x(sf) \simeq \delta_x s(f')$ est un épimorphisme, où l'on note $f' := \tau_{t(d-1, d'-1)}(f)$ — nous désignons de manière générale, dans la suite, par un prime l'application du foncteur $\tau_{t(d-1, d'-1)}$, pour alléger.

Le conoyau N de $s(f') : \eta(A') \rightarrow s(X')$ appartient donc à $\mathcal{P}ol_0^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$; autrement dit, le morphisme canonique $N(0) \rightarrow N$ est un épimorphisme. Notons

F le produit fibré du monomorphisme canonique $sX'(0) \hookrightarrow s(X')$ et de $s(f')$, de sorte qu'on dispose d'une suite exacte courte

$$0 \rightarrow F \rightarrow \eta(A') \oplus s(X')(0) \rightarrow s(X') \rightarrow 0.$$

En appliquant $s\pi$, on voit que l'unité $F \rightarrow s\pi(F)$ est un isomorphisme.

Raisonnant encore comme précédemment, on obtient pour tout $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$ un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \delta_x(F) & \longrightarrow & \eta\delta_x(A') & \longrightarrow & \delta_x s(X') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & s\pi\delta_x(F) & \longrightarrow & \eta\delta_x(A') & \longrightarrow & s\delta_x(X') \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des monomorphismes, d'où l'on déduit que l'unité $\delta_x(F) \rightarrow s\pi\delta_x(F)$ est un isomorphisme. Comme $\pi\delta_x(F)$, qui est un sous-objet de $\pi\eta\delta_x(A')$, appartient à $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, on en déduit, grâce à $HR_2(d-1)$, que $\tau_{s(d-1)}\delta_x(F)$ appartient à $\mathcal{P}ol_{d-1}^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, donc que $\tau_{s(d-1)}(F)$ appartient à $\mathcal{P}ol_d^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

On utilise maintenant la suite exacte

$$F \xrightarrow{u} s(X')(0) \rightarrow N \rightarrow 0$$

déduite des définitions de F et de N et de ce que la composée $s(X')(0) \hookrightarrow s(X') \rightarrow N$ est un épimorphisme : en lui appliquant $\tau_{s(d-1)}$ et en appliquant le lemme 6.3 à u (on rappelle que N est stablement nul car f , donc f' , est un épimorphisme de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$), on obtient $\tau_{s(d-1)+a+d}(N) \simeq \tau_{a+d}(\tau_{s(d-1)}N) = 0$. Comme $N = \text{Coker } s\tau_{t(d-1, d'-1)}(f)$ par définition, on en déduit (utilisant toujours la commutation entre s et les τ_b)

$$\tau_{t(d-1, d'-1)+s(d-1)+a+d} \text{Coker } s(f) = 0,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 6.8. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} vérifiant (P_0) et (P_1) , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck, $d \in \mathbb{N}$, $X \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $F := s(X)$. Si le foncteur $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ est ponctuellement noethérien, alors il est noethérien.

Démonstration. Par la proposition 6.4, il existe un objet x de \mathcal{M} tel que $\tau_x(F)$ soit fortement polynomial. Comme ce foncteur est ponctuellement noethérien, la proposition 5.7 montre qu'il est noethérien. En utilisant la proposition 3.9, on en déduit le résultat. \square

Notre but consiste maintenant à montrer que, sous certaines hypothèses sur \mathcal{M} , la catégorie des foncteurs faiblement polynomiaux de \mathcal{M} vers une catégorie de Grothendieck localement noethérienne est localement noethérienne (ou presque). Cela exigera, outre la proposition 6.4, l'utilisation de l'hypothèse de finitude (P_4) et la démonstration de quelques résultats intermédiaires.

6.2 Propriétés préliminaires autour de la présentation finie

On commence par donner un résultat général sur les foncteurs à support fini qui explique l'utilité de la propriété (P_4) .

Lemme 6.9. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} , \mathcal{A} une catégorie abélienne et F un foncteur de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Considérons les propriétés suivantes :

1. F est à support fini ;
2. pour tout objet x de \mathcal{M} , $\tau_x(F)$ est à support fini ;
3. pour tout objet x de \mathcal{M} , $\delta_x(F)$ est à support fini.

Alors $1.\Rightarrow 2.$ si \mathcal{M} vérifie (P_4) , $2.\Rightarrow 3.$, et $3.\Rightarrow 1.$ si \mathcal{M} vérifie (P_0) .

De plus, il suffit que $\tau_x(F)$ soit à support fini pour un objet x de \mathcal{M} pour que F soit à support fini si \mathcal{M} vérifie (P_1) .

Démonstration. $1.\Rightarrow 2.$: cela provient de ce que pour tous objets a, t de \mathcal{M} et A de \mathcal{A} , $U(a, t)$ est un support fini du foncteur $\tau_t(A[\mathcal{M}(a, -)])$.

$2.\Rightarrow 3.$ découle de ce que $\delta_x(F)$ est un quotient de $\tau_x(F)$.

$3.\Rightarrow 1.$: soient T un ensemble générateur monoïdal faible fini de \mathcal{M} , S_x un support fini de $\delta_x(F)$ pour $x \in T$ et

$$S' := \{0\} \cup \bigcup_{x \in T} (x + S_x).$$

Montrons que l'ensemble fini S' est un support de F . Pour cela, on montre que, pour toute famille d'entiers naturels $\mathbf{n} = (n_x)_{x \in T}$, si l'on pose $a_{\mathbf{n}} := \sum_{x \in S} x^{+n_x}$, $F(a_{\mathbf{n}})$ est somme d'éléments venant de $F(s)$ pour $s \in S'$, par récurrence sur $m := \sum_{x \in T} n_x$ (cela suffit puisque tout objet de \mathcal{M} est facteur direct d'un tel $a_{\mathbf{n}}$).

Pour $m = 0$, cela résulte de ce que $0 \in S'$. Si $m > 0$, on choisit un $x \in S$ tel que $n_x > 0$, de sorte que $a_{\mathbf{n}}$ s'écrit $x + b$, où $F(b)$ est somme d'éléments venant de $F(s)$ pour $s \in S'$, par l'hypothèse de récurrence. Comme S_x est un support de $\delta_x(F)$ et que $x + S_x \subset S'$, $F(a) = F(x + b)$ est somme d'éléments venant de $F(s)$ pour $s \in S'$ et d'un élément de $F(b)$, qui lui-même est de ce type.

Pour la dernière assertion : si S est un support fini de $\tau_x(F)$, la réunion de $x + S$ et d'un ensemble (fini par (P_1)) de représentants des classes d'isomorphisme d'objets de \mathcal{M} n'appartenant pas à l'image essentielle de $x + -$ est un support fini de F . \square

Remarque 6.10. L'implication $3.\Rightarrow 1.$ (sous (P_0)) généralise la proposition 4.6.

Une première conséquence, peu surprenante mais ne semblant pas facile à établir sans employer les résultats du paragraphe 6.1, est la suivante.

Proposition 6.11. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} vérifiant (P_0) et (P_1) , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck et X un objet polynomial de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Alors $s(X)$ est à support fini.

Remarque 6.12. On peut trouver un tel support fini qui ne dépende que du degré de X .

Démonstration. C'est une conséquence directe des propositions 6.4 et 4.6 et du lemme 6.9. \square

La propriété suivante constitue une variante de la propriété de présentation finie pour l'image par le foncteur section d'un objet polynomial de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Proposition 6.13. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{Mon}_{\text{ini}}$ vérifiant (P_0) , (P_1) et (P_4) , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck, $d \in \mathbb{N}$ et $X \in \text{Ob } \mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Si

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow s(X) \rightarrow 0$$

est une suite exacte de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ avec G à support fini, alors F est à support fini.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur d . Toute suite exacte comme dans l'énoncé induit, pour $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$, une suite exacte

$$0 \rightarrow \delta_x(F) \rightarrow \delta_x(G) \rightarrow \delta_x(sX) \rightarrow 0$$

(puisque $\kappa_x(sX) = 0$). Comme le monomorphisme naturel $\delta_x(sX) \hookrightarrow s(\delta_x X)$ a pour conoyau $(\mathbf{R}^1 s)(X)$ (observer le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & sX & \longrightarrow & \tau_x(sX) & \longrightarrow & \delta_x(sX) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & sX & \longrightarrow & s(\tau_x X) & \longrightarrow & s(\delta_x X) \longrightarrow (\mathbf{R}^1 s)(X) \end{array} \quad),$$

la proposition 6.4 fournit un objet r de \mathcal{M} tel que $\tau_r(\mathbf{R}^1 s)(X) = 0$, de sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \tau_r \delta_x(F) \rightarrow \tau_r \delta_x(G) \rightarrow \tau_r s(\delta_x X) \simeq s(\tau_r \delta_x X) \rightarrow 0.$$

Le foncteur $\tau_r \delta_x(G)$ est à support fini comme G par le lemme 6.9, donc l'hypothèse de récurrence montre que $\tau_r \delta_x(F)$ est à support fini pour tout objet x de \mathcal{M} . On en déduit que F est à support fini en utilisant encore le lemme 6.9, ce qui termine la démonstration. \square

Le lemme facile qui suit n'a pas de rapport direct avec les catégories de foncteurs mais interviendra un peu plus loin.

Lemme 6.14. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne, G un groupe de type fini et M une représentation de G dans \mathcal{A} qui soit un objet de présentation finie de \mathcal{A} . Alors M est de présentation finie dans la catégorie des représentations de G dans \mathcal{A} .

Démonstration. On commence par noter que \mathbb{Z} (représentation triviale de G , dans les groupes abéliens) est une représentation de présentation finie de G : si E est un ensemble fini de générateurs de G , on dispose d'une suite exacte

$$\mathbb{Z}[G \times E] \simeq \mathbb{Z}[G]^{\oplus E} \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

où la première flèche est donnée par $[g, e] \mapsto [ge] - [g]$ et la deuxième est l'augmentation. Le résultat s'en déduit en tensorisant cette suite exacte par M et en

utilisant le fait que $M \otimes \mathbb{Z}[G] \simeq M_{triv} \otimes \mathbb{Z}[G]$ (où M_{triv} est la représentation de G dans \mathcal{A} dont l'objet de \mathcal{A} sous-jacent est M , mais avec une action triviale de G), puisque G est un groupe, et l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}(M_{triv} \otimes \mathbb{Z}[G], N) \simeq \mathcal{A}(M, N)$$

(où N est une représentation de G dans \mathcal{A} et les morphismes, à gauche, sont pris dans cette catégorie de représentations) qui montre que $M_{triv} \otimes \mathbb{Z}[G]$ est de présentation finie dans la catégorie des représentations de G dans \mathcal{A} si M est de présentation finie dans \mathcal{A} . \square

6.3 Résultats fondamentaux sur les foncteurs faiblement polynomiaux

Lemme 6.15. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{ini}$ vérifiant (P_0) , (P_1) , (P_2) , (P_3) et (P_4) , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur vérifiant les propriétés suivantes :

1. F est faiblement polynomial ;
2. $\kappa(F) = 0$;
3. F est ponctuellement noethérien ;
4. F est à support fini.

Alors :

1. $\alpha(F) : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ est ponctuellement noethérien ;
2. $s\pi(F) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ est ponctuellement noethérien ;
3. F est noethérien.

Démonstration. On procède par récurrence sur le degré faible d de F .

On commence par remarquer que, comme tous les $\tau_t(F)$ sont à support fini d'après le lemme 6.9, le fait que F soit ponctuellement noethérien entraîne que $\alpha(F)$ l'est également (par la proposition 4.5). Notons G et H les noyau et image respectivement de l'unité $F \rightarrow \eta\alpha(F)$. Comme l'unité de l'adjonction $\mathrm{Id} \rightarrow s\pi$ est un isomorphisme sur $\eta\alpha(F)$, l'inclusion $H \hookrightarrow \eta\alpha(F)$ se factorise en

$$H \hookrightarrow s\pi(H) \hookrightarrow \eta\alpha(F).$$

Ainsi, $s\pi(H)$ est noethérien et ponctuellement noethérien, comme $\eta\alpha(F)$ (utiliser la proposition 5.1), d'où l'on déduit que le conoyau de $H \hookrightarrow s\pi(H)$ est noethérien, ponctuellement noethérien et stablement nul. Par conséquent, en utilisant les propositions 3.10 et 3.8, on voit qu'il existe un objet x de \mathcal{M} tel que $\tau_x(H) \hookrightarrow \tau_x(s\pi(H)) \simeq s\tau_x\pi(H)$ soit un isomorphisme. On dispose donc d'une suite exacte

$$0 \rightarrow \tau_x(G) \rightarrow \tau_x(F) \rightarrow s\tau_x\pi(H) \rightarrow 0.$$

Comme $\tau_x\pi(H)$ appartient à $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et que $\tau_x(F)$ est comme F à support fini par le lemme 6.9, on voit que $\tau_x(G)$, puis G (par le même lemme), est également à support fini. Mais G , sous-foncteur de F , est également ponctuellement noethérien et tel que $\kappa(G) = 0$, et G appartient à $\mathcal{P}ol_{d-1}^{\mathrm{faible}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. L'hypothèse de récurrence montre que G est noethérien et $s\pi(G)$ ponctuellement noethérien. Les suites exactes

$$0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow s\pi(G) \rightarrow s\pi(F) \rightarrow s\pi(H)$$

montrent donc que F est noethérien et $s\pi(F)$ ponctuellement noethérien (on a vu plus haut que H est noethérien et $s\pi(H)$ ponctuellement noethérien), d'où le lemme. \square

Nous utiliserons aussi la variante suivante du lemme 6.15.

Lemme 6.16. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{ini}$ vérifiant (P_0) , (P_1) , (P_2) , (P_3) , (P_4) , (FM) , (FE) et (EI) et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. On suppose également que les foncteurs polynomiaux et de type fini $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ sont ponctuellement noethériens. Soit $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur vérifiant les propriétés suivantes :

1. F est faiblement polynomial ;
2. $\kappa(F) = 0$;
3. F est de type fini.

Alors :

1. $\alpha(F) : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ est ponctuellement noethérien ;
2. F et $s\pi(F) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ sont ponctuellement noethériens ;
3. F est noethérien.

Démonstration. Le schéma de la démonstration est exactement le même que dans le lemme 6.15, nous nous bornerons donc à indiquer les différences avec la démonstration de ce lemme, dont on conserve les notations.

1. Le foncteur $\alpha(F) : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ est de type fini comme F grâce à la proposition 2.3. Il est également polynomial comme F , de sorte que l'hypothèse implique qu'il est ponctuellement noethérien.
2. Le foncteur $G \subset F$ est à support fini (pour la même raison que dans la démonstration du lemme 6.15), mais il est aussi faiblement ponctuellement de type fini. Cela provient de ce que F est faiblement ponctuellement de type fini, puisque ce foncteur est de type fini, que \mathcal{M} vérifie l'hypothèse (FM) et que \mathcal{A} est localement noethérienne (utiliser la proposition 2.6), de ce que H prend des valeurs qui sont de présentation finie dans la catégorie des représentations des monoïdes d'endomorphismes des objets (utiliser les hypothèses (FE) , (EI) , le fait que H est ponctuellement noethérien comme $\alpha(F)$, le caractère localement noethérien de \mathcal{A} et le lemme 6.14) et de la suite exacte $0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow 0$. La proposition 4.2 implique donc que G est de type fini, ce qui permet de lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

\square

Proposition 6.17. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{ini}$ vérifiant (P_0) , (P_1) , (P_2) , (P_3) et (P_4) , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur vérifiant les propriétés suivantes :

1. F est faiblement polynomial ;
2. F est ponctuellement noethérien ;
3. F est à support fini.

Alors :

1. $\alpha(F) : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ est ponctuellement noethérien ;
2. $s\pi(F) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ est ponctuellement noethérien ;
3. F est noethérien.

Démonstration. Posons $G := F/\kappa(F)$. Alors G vérifie les hypothèses du lemme 6.15, de sorte que G est noethérien et que $\alpha(G)$ et $s\pi(G)$ sont ponctuellement noethériens. Comme la projection $F \rightarrow G$ induit des isomorphismes quand on applique les foncteurs α ou $s\pi$, cela démontre déjà les deux premières assertions.

On note par ailleurs que l'inclusion $G \hookrightarrow s\pi(G)$ induit un isomorphisme $\tau_x(G) \hookrightarrow \tau_x(s\pi(G)) \simeq s\tau_x\pi(G)$ pour un certain objet x de \mathcal{M} (même raisonnement que dans la démonstration du lemme 6.15 pour H), de sorte qu'on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \tau_x\kappa(F) \rightarrow \tau_x(F) \rightarrow s\tau_x\pi(G) \rightarrow 0$$

dont on déduit (comme pour le lemme 6.15) que $\kappa(F)$ est à support fini. Ce foncteur est donc de type fini (il est ponctuellement noethérien comme F), de sorte que le corollaire 3.11 montre que $\kappa(F)$ est noethérien. Cela implique que F est noethérien, comme souhaité. \square

On a également la variante suivante :

Proposition 6.18. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} vérifiant (P_0) , (P_1) , (P_2) , (P_3) , (P_4) , (FM) , (FE) et (EI) et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. On suppose également que les foncteurs polynomiaux et de type fini $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ sont ponctuellement noethériens. Soit $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur faiblement polynomial et de type fini.

Alors :

1. $\alpha(F) : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ est ponctuellement noethérien ;
2. $s\pi(F) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ est ponctuellement noethérien ;
3. F est presque noethérien (en particulier, si F est faiblement ponctuellement noethérien, alors F est noethérien).

Démonstration. La démonstration de cette proposition à partir du lemme 6.16 est la même que celle de la proposition 6.17 à partir du lemme 6.15 (à la fin, utiliser que F est faiblement ponctuellement de type fini, donc $\kappa(F)$ aussi, en utilisant le lemme 6.14 comme dans la démonstration du lemme 6.16). \square

Corollaire 6.19. Supposons que \mathcal{M} est un objet de Mon_{ini} vérifiant (P_0) , (P_1) , (P_2) , (P_3) et (P_4) et dont les ensembles de morphismes sont tous finis. Pour toute catégorie de Grothendieck localement noethérienne \mathcal{A} , la sous-catégorie abélienne des foncteurs faiblement polynomiaux de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est localement noethérienne.

Démonstration. Du fait que \mathcal{A} est localement noethérienne et que les ensembles de morphismes sont finis dans \mathcal{M} , les foncteurs à support fini et ponctuellement noethériens engendrent $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, et les foncteurs faiblement polynomiaux à support fini et ponctuellement noethériens engendrent la catégorie des foncteurs faiblement polynomiaux. La proposition 6.17 montrant que de tels foncteurs sont noethériens, cela établit le corollaire. \square

À titre d'application, on obtient l'un des résultats annoncés en introduction :

Théorème 6.20. Soient A un anneau fini et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. La catégorie des foncteurs faiblement polynomiaux de $\mathbf{Fct}(\mathbf{S}(A), \mathcal{A})$ est localement noethérienne.

Démonstration. La catégorie $\mathbf{S}(A)$ vérifie les hypothèses (P_i) pour $i \geq 4$ d'après les propositions 3.6 et 3.4, et ses ensembles d'endomorphismes sont finis puisque A est fini. On peut donc appliquer le corollaire 6.19. \square

En s'appuyant sur la proposition 6.18, on obtient la variante suivante du corollaire 6.19.

Corollaire 6.21. Supposons que \mathcal{M} est un objet de Mon_{ini} vérifiant (P_0) , (P_1) , (P_2) , (P_3) , (P_4) , (FM) , (FE) et (EI) et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck localement noethérienne. On suppose également que les foncteurs polynomiaux et de type fini $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ sont ponctuellement noethériens. Alors la sous-catégorie abélienne des foncteurs faiblement polynomiaux de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est localement presque noethérienne (i.e. est engendrée par des foncteurs presque noethériens). La sous-catégorie de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ des objets polynomiaux est localement noethérienne.

Ce corollaire entraîne aussitôt le résultat principal de cet article.

Théorème 6.22. Si \mathcal{A} est une catégorie de Grothendieck localement noethérienne, alors la catégorie des foncteurs faiblement polynomiaux de $\mathbf{S}(\mathbb{Z})$ vers \mathcal{A} est localement presque noethérienne, et la sous-catégorie de $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathbb{Z}), \mathcal{A})$ des objets polynomiaux est localement noethérienne.

Démonstration. Il est clair que $\mathbf{S}(\mathbb{Z})$ vérifie les propriétés (EI) , (P_0) , (P_1) , (P_2) et (P_3) . Comme \mathbb{Z} est un anneau principal, cette catégorie vérifie également (P_4) et (FM) (les $GL_n(\mathbb{Z})$ -ensembles $\mathbf{S}(\mathbb{Z})(\mathbb{Z}^i, \mathbb{Z}^n)$ sont transitifs). La propriété (FE) provient de ce que les groupes $GL_n(\mathbb{Z})$ sont de type fini.

Par ailleurs, l'un des principaux résultats de [8] montre que le foncteur évident $\mathbf{S}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbb{Z})^{op} \times \mathbf{P}(\mathbb{Z})$ induit une équivalence de catégorie des foncteurs polynomiaux $\mathbf{P}(\mathbb{Z})^{op} \times \mathbf{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{A}$ vers les foncteurs polynomiaux $\widetilde{\mathbf{S}(\mathbb{Z})} \rightarrow \mathcal{A}$. La proposition 4.12 montrant que les foncteurs polynomiaux de type fini $\mathbf{S}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{A}$ sont ponctuellement noethériens, on peut appliquer le corollaire 6.21 pour obtenir la conclusion. \square

Remarque 6.23. On ne peut pas s'affranchir de l'adverbe *presque* dans le théorème 6.22 (et bien sûr pas non plus dans la proposition 6.18 ni dans le corollaire 6.21). En effet, la catégorie des foncteurs presque nuls $\mathbf{S}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ n'est déjà pas localement noethérienne, car, pour $n > 1$, la catégorie des $\mathbb{Z}[GL_n(\mathbb{Z})]$ -modules n'est pas localement noethérienne. Cela provient de ce que $GL_n(\mathbb{Z})$ n'est pas un groupe noethérien pour $n > 1$, car c'est déjà le cas de son sous-quotient $PSL_2(\mathbb{Z})$. Il est en effet classique que ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$, qui contient un groupe libre non commutatif (le noyau de la projection $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$ par exemple), donc un groupe libre de rang infini.

Références

- [1] H. Bass. *K*-theory and stable algebra. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (22) :5–60, 1964.
- [2] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, and Benson Farb. FI-modules and stability for representations of symmetric groups. À paraître au *Duke Math. J.*, arXiv :1204.4533, 2012.
- [3] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, Benson Farb, and Rohit Nagpal. FI-modules over noetherian rings. arXiv :1210.1854, à paraître dans *Geometry and Topology*, 2012.
- [4] Aurélien Djament. Homologie de Mac Lane, homologie des foncteurs et quelques autres théories homologiques. Notes d'exposé disponibles sur <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~djament/hml.pdf>.
- [5] Aurélien Djament. Sur l'homologie des groupes de congruences à coefficients polynomiaux. En préparation.
- [6] Aurélien Djament. Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (111) :xx+213, 2007.
- [7] Aurélien Djament. Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.
- [8] Aurélien Djament and Christine Vespa. De la structure des foncteurs polynomiaux sur les espaces hermitiens. Prépublication disponible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00851869>.
- [9] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.
- [10] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.
- [11] Wee Liang Gan and Liping Li. Noetherian property of infinite EI categories. arXiv :1407.8235, 2014.
- [12] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [13] Andrew Putman and Steven Sam. Representation stability and finite linear groups. arXiv : 1408.3694.
- [14] Steven Sam and Andrew Snowden. Gröbner methods for representations of combinatorial categories. arXiv : 1408.3694.