



HAL
open science

De la structure des foncteurs polynomiaux sur les espaces hermitiens

Aurélien Djament, Christine Vespa

► **To cite this version:**

Aurélien Djament, Christine Vespa. De la structure des foncteurs polynomiaux sur les espaces hermitiens. 2013. hal-00851869v2

HAL Id: hal-00851869

<https://hal.science/hal-00851869v2>

Preprint submitted on 25 Jun 2014 (v2), last revised 4 May 2017 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

De la structure des foncteurs polynomiaux sur les espaces hermitiens

Aurélien DJAMENT* et Christine VESPA†

25 juin 2014

Résumé

Nous introduisons et étudions une notion de foncteur polynomial depuis une petite catégorie monoïdale symétrique dont l'unité est objet initial vers une catégorie abélienne. Dans le cas où la catégorie source est une catégorie d'espaces hermitiens, nous classifions les foncteurs polynomiaux de degré n modulo les foncteurs de degré $n-1$. Une motivation importante provient de l'homologie des groupes de congruences ou des sous-groupes IA des automorphismes des groupes libres, dont l'étude fonctorielle s'insère naturellement dans ce formalisme.

Abstract

We introduce and study a notion of polynomial functor from a small symmetric monoidal category whose unit is an initial object to an abelian category. When the source category is a category of hermitian spaces, we classify polynomial functors of degree n modulo functors of degree $n-1$. An important motivation comes from homology of congruence groups or of subgroups IA of the automorphisms of free groups, whose functorial study is part in a natural way of this formalism.

Mots clefs : foncteurs polynomiaux ; espaces hermitiens ; catégories abéliennes ; catégories quotients.

Classification MSC 2010 : 18E15, 18A25, 18A40, 20J06.

Introduction

La notion de *foncteur polynomial* entre des catégories de modules remonte au travail fondamental [15] d'Eilenberg et Mac Lane, dans les années 1950, qui l'introduit à des fins de topologie algébrique (l'étude de la cohomologie des espaces qui portent leurs noms). Depuis, de nombreuses recherches autour des foncteurs polynomiaux¹, tant d'un point de vue intrinsèque (voir par exemple

*CNRS, Laboratoire de mathématiques Jean Leray (UMR 6629), aurelien.djament@univ-nantes.fr

†Institut de Recherche Mathématique Avancée, université de Strasbourg, vespa@math.unistra.fr

1. La notion de foncteur *strictement polynomial*, qu'ont introduite Friedlander et Suslin dans [17] et dont l'intérêt ne s'est pas démenti depuis (voir par exemple [38]) ne sera pas abordée dans cet article. Notons cependant que cette notion est reliée à celle de foncteur polynomial usuel, généralisée dans le présent article.

[29], [22] ou, plus récemment, [39] et [20]) que pour leur utilisation en topologie algébrique (qui a connu un renouveau au début des années 1990 grâce à l'article [21] de Henn, Lannes et Schwartz reliant la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod à ces foncteurs), en théorie des représentations (voir par exemple [25]) ou en K -théorie algébrique et (co)homologie des groupes (voir l'appendice de [16], [5], [6], [36], [14] ou [12]) se sont développées.

Même si les foncteurs polynomiaux entre différentes catégories de modules sont restés le cas le plus étudié, plusieurs de ces travaux utilisent des foncteurs polynomiaux dans d'autres contextes (voir [31], [20] ou [4] par exemple). Toutefois, ces généralisations reposent toujours sur la notion d'*effets croisés* inaugurée par Eilenberg et Mac Lane. Le cadre le plus général dans lequel on peut les définir commodément est celui d'une catégorie source monoïdale symétrique $(\mathcal{M}, \oplus, 0)$ dont l'unité 0 est **objet nul** (cf. [19], section 2 et les rappels du § 1.1 du présent article). Les effets croisés permettent de scinder naturellement l'évaluation d'un foncteur sur une somme (au sens de la structure monoïdale symétrique \oplus). Ce scindage repose sur l'observation que, 0 étant à la fois unité de \oplus et objet nul de \mathcal{M} , on dispose d'un endomorphisme idempotent

$$x \oplus y \rightarrow x = x \oplus 0 \rightarrow x \oplus y$$

naturel en les objets x et y de \mathcal{M} (voir la définition 1.2 et la proposition 1.3). Ces propriétés de scindage assurent un bon comportement des effets croisés et des sous-catégories $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ de foncteurs polynomiaux de degré au plus n , où n est un entier fixé et \mathcal{A} est une catégorie abélienne. Ces catégories sont notamment épaisses et stables par limites et colimites. En particulier, on peut former les catégories abéliennes quotients $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, dont la description constitue une partie fondamentale (bien connue lorsque \mathcal{M} est additive et que \oplus est la somme directe catégorique) de la théorie des foncteurs polynomiaux de \mathcal{M} dans \mathcal{A} . De fait, la compréhension fine de $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ s'avère en général délicate dès que n est supérieur ou égal à 2, même lorsque \mathcal{M} et \mathcal{A} sont des catégories assez simples (cf. par exemple [3], [20] et [19]), tandis que les catégories $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ sont beaucoup plus accessibles (cf. [29] et [13]).

Si les exemples de foncteurs polynomiaux s'insérant dans le cadre classique qu'on vient de rappeler abondent dans plusieurs parties des mathématiques, on rencontre également de nombreux foncteurs qui n'entrent pas dans ce cadre mais possèdent des propriétés analogues aux foncteurs polynomiaux classiques (cf. [8] § 2, par exemple). Ainsi, dans un contexte ensembliste, la notion fondamentale de Γ -module, i.e. de foncteur de la catégorie Γ des ensembles finis pointés vers les modules sur un anneau fixé, est parfois trop rigide. De nombreux foncteurs qui apparaissent naturellement (par exemple, la cohomologie des espaces de configurations) sont définis seulement sur la catégorie des ensembles finis avec injections, notée ici Θ et baptisée I dans [35] et FI dans [7]. Les FI -modules sont les foncteurs de la catégorie Θ vers les groupes abéliens ou les modules sur un anneau fixé. Dans [7], Church, Ellenberg et Farb étudient ces FI -modules et en donnent de nombreux exemples. Ils montrent que les FI -modules de type fini possèdent des propriétés polynomiales (valeurs polynomiales, à partir d'un certain rang, des dimensions lorsque celles-là sont des espaces vectoriels de dimension finie, ou raffinements en termes de caractères). Les FI -modules de type fini sont des foncteurs fortement polynomiaux, avec la terminologie introduite dans le présent article.

En fait, plusieurs des FI-modules considérés dans [7] possèdent une functorialité plus forte. Ainsi, si I est un anneau non unitaire, l'homologie du groupe linéaire (qui est un groupe de congruences) $GL_n(I) := \text{Ker}(GL_n(I_+) \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}))$ (où l'on note I_+ l'anneau unitaire obtenu en adjoignant formellement une unité à I ; le morphisme est induit par l'épimorphisme scindé d'anneaux $I_+ \rightarrow I_+/I \simeq \mathbb{Z}$) définit, lorsque n varie, un foncteur de Θ vers les groupes abéliens gradués, mais elle possède également une action de $GL_n(\mathbb{Z})$. Cette action s'avère cruciale dans l'étude de cette homologie (voir [32]). De fait, l'homologie des groupes de congruences sur I définit non seulement un foncteur sur Θ mais également un foncteur sur la catégorie $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ des groupes abéliens libres de rang fini avec monomorphismes scindés. Pour ces foncteurs d'homologie (en degré fixé) des groupes de congruences, les propriétés polynomiales sont difficiles à vérifier; certains cas particuliers dans cette direction sont établis par Suslin dans [37] (pour le plus petit degré homologique « non excisif ») et par Putman dans [32] (sous conditions sur l'anneau sans unité I et sur la caractéristique des coefficients). De fait, l'étude approfondie de l'homologie des groupes de congruences (dans un cadre général incluant d'autres types de groupes), à coefficients non seulement constants mais aussi dans des représentations données par des foncteurs polynomiaux appropriés (voir [11]), constitue la principale motivation de l'introduction et de l'étude de la notion de foncteur polynomial dans un contexte très général, qui fait l'objet du présent travail.

Notre cadre pour définir la propriété polynomiale est celui de foncteurs d'une (petite) catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{M}, \oplus, 0)$ telle que 0 soit **objet initial** de \mathcal{M} vers une catégorie abélienne \mathcal{A} (assez régulière). Il inclut en particulier les catégories Θ et $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ déjà évoquées, mais aussi les catégories d'espaces hermitiens. La première observation pour obtenir une notion correcte d'objet polynomial (par exemple, de sorte que les sous-catégories $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ soient épaisses) dans cette situation est que la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ des foncteurs de \mathcal{M} vers \mathcal{A} n'est pas la plus adaptée. On s'en convainc aisément, pour $\mathcal{M} = \Theta$, par l'examen du cas où \mathcal{A} est une catégorie d'espaces vectoriels de dimension finie : les exemples de foncteurs de ce type qu'on rencontre couramment prennent des valeurs dont les dimensions sont données par une fonction du cardinal de l'ensemble qui n'est polynomiale qu'à *partir d'un certain rang*. On ne souhaite pas tenir compte des « phénomènes instables » qui peuvent se produire sur les petits ensembles, qui ne s'insèrent pas bien dans la théorie. Pour y remédier, on travaille dans une catégorie $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ *quotient* de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ qui fait disparaître tous ces phénomènes instables (d'où la notation \mathbf{St} pour *stable*). Lorsque $\mathcal{M} = \Theta$, cette catégorie s'obtient en quotientant par la sous-catégorie épaisse des foncteurs $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ tels que

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} F(\{1, \dots, n\}) = 0.$$

Dans $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, on peut donner une définition des objets polynomiaux qui imite une variante de la définition classique (lorsque 0 est objet nul de \mathcal{M}), qui utilise les *foncteurs différences* plutôt que les effets croisés. Précisément, si x est un objet de \mathcal{M} , le foncteur différence $\delta_x : \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est donné sur les objets par

$$\delta_x(F)(t) = \text{Coker}(F(t) \rightarrow F(x \oplus t))$$

où le morphisme est induit par $t \simeq 0 \oplus t \xrightarrow{(0 \rightarrow x) \oplus t} x \oplus t$ (on utilise ici le

caractère initial de 0). En général, lorsque 0 n'est pas objet nul de \mathcal{M} , δ_x est exact à droite mais pas à gauche. Toutefois, ce foncteur induit un endofoncteur *exact* de la catégorie $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ (voir la proposition 1.28). On définit les objets polynomiaux de degré au plus n de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ comme les objets F tels que

$$\delta_{x_0} \delta_{x_1} \dots \delta_{x_n}(F) = 0$$

pour tous objets x_0, \dots, x_n de \mathcal{M} . Ceci nous permet de définir la sous-catégorie pleine de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ des foncteurs polynomiaux de degré n , $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. On montre (voir la proposition 1.36) que ces catégories sont épaisses et stables par limites et colimites.

La suite du présent article est consacrée à l'étude des catégories quotients $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ lorsque \mathcal{M} est une catégorie d'objets hermitiens $\mathbf{H}(\mathcal{C})$ sur une petite catégorie additive à dualité \mathcal{C} . C'est surtout le cas de catégories du type $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ que nous avons en vue pour les applications (le cas de la catégorie Θ se traite différemment et beaucoup plus simplement); c'est un cas particulier de ce cadre hermitien général, qui se traite sans plus de difficulté. Le résultat fondamental est le suivant :

Théorème 1. *Le foncteur d'oubli $\mathbf{H}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{P}ol_n(\mathcal{C}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}ol_n(\mathbf{H}(\mathcal{C}), \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathbf{H}(\mathcal{C}), \mathcal{A})$$

pour chaque entier n .

(Les catégories $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{C}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ sont bien comprises à partir des foncteurs additifs $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ et des représentations des groupes symétriques.)

La démonstration de ce résultat se décompose en deux étapes indépendantes. La première consiste à construire, pour toute catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{M}, \oplus, 0)$ telle que 0 soit objet initial de \mathcal{M} , une catégorie monoïdale symétrique $(\widetilde{\mathcal{M}}, \oplus, 0)$ dont l'unité 0 soit objet nul, munie d'un foncteur monoïdal $\mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ et universelle pour cette propriété. On montre à la proposition 2.6 que ce foncteur induit des équivalences de catégories

$$\mathcal{P}ol_n(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$$

pour tout entier n , par un raisonnement assez direct reposant sur la considération d'adjonctions appropriées.

La construction $\mathcal{M} \mapsto \widetilde{\mathcal{M}}$ redonne des catégories bien connues : la catégorie $\widetilde{\Theta}$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{FI}\#$ de [7] et est équivalente à une sous-catégorie de la catégorie Γ sur laquelle les foncteurs ont été très étudiés, notamment par Pirashvili (cf. supra). Lorsque \mathcal{M} est la catégorie des espaces quadratiques sur le corps à deux éléments \mathbb{F}_2 , $\widetilde{\mathcal{M}}$ est équivalente à la catégorie notée \mathcal{T}_q dans l'article [39], où le second auteur étudie des propriétés fines de la catégorie \mathcal{F}_{quad} des foncteurs de \mathcal{T}_q vers les \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels avant de les appliquer à la description des objets polynomiaux de cette catégorie.

La deuxième étape de la démonstration du théorème 1 adapte et généralise à notre cadre une partie des arguments de [39]. On montre ainsi que le foncteur d'oubli $\widetilde{\mathbf{H}(\mathcal{C})} \rightarrow \mathcal{C}$ induit une équivalence de catégories

$$\mathcal{P}ol_n(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}ol_n(\widetilde{\mathbf{H}(\mathcal{C})}, \mathcal{A})$$

pour tout n (pour \mathcal{F}_{quad} , c'est exactement le résultat principal de la dernière section de [39]). On déduit ce résultat d'un critère abstrait (voir proposition 3.2) qui pourrait s'appliquer à d'autres situations.

L'un des intérêts du théorème 1 vient de ce que de nombreux foncteurs utiles définis sur $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ sont très difficiles à étudier, une description complète étant hors d'atteinte raisonnable. Des cas importants sont fournis par les groupes d'automorphismes des groupes libres induisant l'identité sur l'abélianisation : les quotients successifs de leur suite centrale descendante ou leur homologie font l'objet de travaux féconds, mais encore très parcellaires (voir [1], [23] § 6, [33], [2] ou [28] par exemple). On voit facilement que ces objets induisent des foncteurs $\mathbf{S}(\mathbf{ab}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ et qu'ils sont polynomiaux, pour les quotients de la suite centrale descendante — pour l'homologie, le caractère polynomial semble très probable et fait l'objet d'un travail en cours. La détermination de leurs degrés exacts paraît encore plus délicate. La description de leurs images dans les sous-quotients appropriés de la filtration polynomiale de la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$ pourrait constituer un objectif ultérieur, moins inaccessible que la compréhension complète de ces foncteurs.

Quelques notations utilisées dans tout l'article Pour toute catégorie \mathcal{C} , on notera $\text{Ob}\mathcal{C}$ la classe des objets de \mathcal{C} , et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ ou $\mathcal{C}(x, y)$ l'ensemble des morphismes de \mathcal{C} de source x et de but y . Si \mathcal{C} est une petite catégorie et \mathcal{A} une catégorie quelconque, on désignera par $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} dans \mathcal{A} . On s'autorisera parfois, par abus, à appliquer cette construction (et d'autres relatives à des petites catégories) lorsque \mathcal{C} est seulement essentiellement petite.

Si $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur entre petites catégories et \mathcal{A} une catégorie, on désignera par $\Phi^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ le foncteur de précomposition par Φ .

On note \mathbf{Ab} la catégorie des groupes abéliens et \mathbf{ab} la sous-catégorie pleine des groupes abéliens libres de rang fini.

Si \mathcal{A} est une catégorie abélienne, A un objet de \mathcal{A} et E un ensemble, on notera $A[E]$ la somme de copies de A indexées par E . Dans le cas où $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ et $A = \mathbb{Z}$, si e est un élément de E , on notera $[e]$ le générateur correspondant de $\mathbb{Z}[E]$.

1 Foncteurs polynomiaux sur une catégorie monoïdale

On note Mon la catégorie des petites catégories monoïdales symétriques. Plus précisément, les objets de Mon sont les petites catégories monoïdales symétriques — qu'on notera généralement $(\mathcal{M}, \oplus, 0)$ (même si \oplus n'est pas une somme catégorique et 0 pas un objet nul, bien sûr) — strictes, c'est-à-dire telles que $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ et $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ (fonctoriellement en a , b et c), objet qu'on note donc $a \oplus b \oplus c$. Il est classique que toute catégorie monoïdale symétrique est équivalente à une telle catégorie stricte (cf. [26, Theorem 1 p. 257]). Les morphismes $(\mathcal{M}, \oplus, 0) \rightarrow (\mathcal{N}, \oplus, 0)$ de Mon sont les foncteurs monoïdaux stricts, c'est-à-dire les foncteurs $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ tels que $F(0) = 0$ et $F(a \oplus b) = F(a) \oplus F(b)$ fonctoriellement en les objets a et b de \mathcal{M} .

Si I est un ensemble fini, on peut définir de façon usuelle la somme $\bigoplus_{i \in I} a_i$ d'une famille $(a_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{M} \in \text{Ob } \text{Mon}$ (on omettra souvent, dans la suite, d'écrire explicitement la structure monoïdale, notée par défaut \oplus), et ce fonctoriellement en ladite famille. Cela est lié à la remarque suivante.

Remarque 1.1. La catégorie Σ des ensembles finis avec *bijections* (ou plutôt le squelette constitué des ensembles $\mathbf{n} := \{1, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$), la structure monoïdale étant donnée par la réunion disjointe, vérifie la propriété universelle suivante : pour tout objet \mathcal{M} de Mon , la fonction

$$\text{Mon}(\Sigma, \mathcal{M}) \rightarrow \text{Ob } \mathcal{M} \quad F \mapsto F(\mathbf{1})$$

est une bijection.

Si $(\mathcal{M}, \oplus, 0)$ est un objet de Mon , x un objet de \mathcal{M} et \mathcal{C} une catégorie, on notera $\tau_x : \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{C})$ le foncteur de translation par x , c'est-à-dire la précomposition par l'endomorphisme $x \oplus -$ de \mathcal{M} . La symétrie de la structure monoïdale se traduit par l'existence d'isomorphismes naturels $\tau_x \circ \tau_y \simeq \tau_y \circ \tau_x (\simeq \tau_{x \oplus y})$.

1.1 Cas où la catégorie source possède un objet nul

Les définitions et propriétés données dans ce paragraphe ne sont pas nouvelles. On pourra se référer à la section 2 du travail [19] qui traite de foncteurs polynomiaux dans le même cadre qu'ici.

On note Mon_{nul} la sous-catégorie pleine de Mon constituée des catégories monoïdales symétriques $(\mathcal{M}, \oplus, 0)$ dont l'unité 0 est objet nul.

Définition 1.2. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{nul} , E un ensemble fini, I une partie de E et $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in E}$ une famille d'objets de \mathcal{M} . On note $\epsilon_I(\mathbf{a})$ l'endomorphisme $\bigoplus_{i \in E} f_i$ de l'objet $\bigoplus_{i \in E} a_i$ de \mathcal{M} , où f_i est l'endomorphisme identique de a_i lorsque $i \in I$ et l'endomorphisme nul de a_i lorsque $i \notin I$.

Lorsqu'aucune ambiguïté ne peut en résulter, on notera ϵ_I pour $\epsilon_I(\mathbf{a})$.

Proposition 1.3. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{nul} , E un ensemble fini et $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in E}$ une famille d'objets de \mathcal{M} . Les endomorphismes $\epsilon_I(\mathbf{a})$ ($I \subset E$) de $x = \bigoplus_{i \in E} a_i$ forment une famille commutative d'idempotents. De plus :

1. $\epsilon_E = 1_x$ et $\epsilon_\emptyset = 0_x$;
2. $\epsilon_I \cdot \epsilon_J = \epsilon_{I \cap J}$ pour tous sous-ensembles I et J de E .

Corollaire 1.4. Sous les mêmes hypothèses, dans l'anneau $\mathbb{Z}[\mathcal{M}(x, x)]$, posons, pour $I \subset E$,

$$e_I = \epsilon_I(\mathbf{a}) = \sum_{J \subset I} (-1)^{|I| - |J|} [\epsilon_J(\mathbf{a})]$$

où $|J|$ désigne le cardinal de l'ensemble fini J . Alors les e_I forment, lorsque I parcourt les parties de E , une famille complète d'idempotents orthogonaux (i.e. $e_I \cdot e_J = 0$ pour $I \neq J$ et la somme de tous les e_I est égale à 1).

Les notions d'effets croisés et de foncteurs polynomiaux qu'on introduit maintenant sont dues, lorsque la catégorie source est une catégorie de modules, à Eilenberg et Mac Lane ([15], chap. II) ; le cadre dans lequel on se place, qui est le même que celui de la section 2 de [19], est a priori le plus général dans lequel les définitions et propriétés de ces notions fonctionnent de la même manière que dans ce travail originel fondamental. La situation d'une catégorie source avec objet nul et possédant des coproduits finis est aussi abordée dans [20] (§ 1).

Définition 1.5 (Effets croisés). Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{nul} , \mathcal{A} une catégorie additive dont les idempotents se scindent, E un ensemble fini, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in E}$ une famille d'objets de \mathcal{M} et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur.

On pose :

$$cr_E(F)(\mathbf{a}) := \text{Im } F(e_E(\mathbf{a})),$$

où $e_E(\mathbf{a})$ est l'idempotent introduit dans le corollaire précédent.

Le foncteur $cr_d(F) : \mathcal{M}^d \rightarrow \mathcal{A}$ sera appelé *d-ème effet croisé* de F .

Une conséquence immédiate du corollaire 1.4 est la propriété suivante.

Proposition 1.6. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{nul} , \mathcal{A} une catégorie additive dont les idempotents se scindent, E un ensemble fini, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in E}$ une famille d'objets de \mathcal{M} et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. On dispose dans \mathcal{A} d'un isomorphisme

$$F\left(\bigoplus_{i \in E} a_i\right) \simeq \bigoplus_{I \subseteq E} cr_I(F)(\mathbf{a}|_I)$$

naturel en F et en \mathbf{a} .

Proposition 1.7. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{nul} , \mathcal{A} une catégorie additive dont les idempotents se scindent, $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur, i et j des entiers naturels et $x_1, \dots, x_i, a_1, \dots, a_j$ des objets de \mathcal{M} . Alors :

1. $cr_i(F)(x_1, \dots, x_i)$ est nul si l'un des objets x_r est nul ;
2. pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_i$, l'isomorphisme entre $\bigoplus_{r=1}^i x_r$ et $\bigoplus_{r=1}^i x_{\sigma(r)}$ donné par la structure monoïdale symétrique induit un isomorphisme entre $cr_i(F)(x_1, \dots, x_i)$ et $cr_i(F)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)})$;
3. il existe un isomorphisme naturel

$$cr_{i+j}(F)(x_1, \dots, x_i, a_1, \dots, a_j) \simeq cr_i(cr_{j+1}(F)(a_1, \dots, a_j, -))(x_1, \dots, x_i);$$

4. pour tout $d \in \mathbb{N}$, le foncteur $cr_d : \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{M}^d, \mathcal{A})$ commute aux limites et colimites.

Le point 3. de cette proposition montre en particulier que la relation $cr_n(F) = 0$ implique $cr_m(F) = 0$ pour $m \geq n$.

Définition 1.8 (Foncteurs polynomiaux). Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{nul} , \mathcal{A} une catégorie additive dont les idempotents se scindent, $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. On dit que F est polynomial de degré au plus d si le foncteur $cr_{d+1}(F) : \mathcal{M}^{d+1} \rightarrow \mathcal{A}$ est nul. Le degré de F est par définition le plus petit d vérifiant cette propriété.

On note $\mathcal{Pol}_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ dont les objets sont les foncteurs polynomiaux de degré au plus d .

On remarque que les foncteurs polynomiaux de degré au plus 0 sont les foncteurs constants ; les foncteurs polynomiaux de degré au plus 1 sont les sommes directes d'un foncteur constant et d'un foncteur monoïdal (au sens fort).

La proposition 1.7.4. montre que les sous-catégories $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ sont stables par limites et colimites. De plus, on a la proposition suivante :

Proposition 1.9. *Soient \mathcal{A} une catégorie additive, \mathcal{B} et \mathcal{C} des catégories abéliennes, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ des foncteurs. Si F est polynomial de degré n et G est polynomial de degré m , alors $G \circ F$ est polynomial de degré nm .*

Avant d'aborder le paragraphe suivant, nous avons besoin de présenter une définition alternative des foncteurs polynomiaux sur un objet de $\mathcal{M}on_{\text{nul}}$.

Définition 1.10. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{\text{nul}}$, x un objet de \mathcal{M} et \mathcal{A} une catégorie additive dont les idempotents se scindent. On définit un foncteur $\delta_x : \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ naturel en x par $\delta_x(F) = \text{Im}(1 - \varepsilon)$, où ε est l'endomorphisme idempotent de $\tau_x(F)$ induit par l'endomorphisme idempotent 0 de x (on utilise la functorialité de $x \mapsto \tau_x$). On dispose ainsi d'un isomorphisme naturel $\tau_x(F) \simeq F \oplus \delta_x(F)$. Le foncteur δ_x s'appelle *foncteur différence* associé à x .

Cette définition est une généralisation du foncteur différence considéré pour les catégories de foncteurs entre espaces vectoriels (voir [34]).

Proposition 1.11. *Les endofoncteurs δ_x de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ commutent deux à deux (à isomorphisme canonique près) ; ils commutent également aux limites et colimites.*

On dispose d'un isomorphisme naturel $cr_2(F)(x, -) \simeq cr_1(\delta_x(F))$.

Proposition 1.12. *Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{\text{nul}}$, \mathcal{A} une catégorie additive dont les idempotents se scindent, $d \in \mathbb{N}$ et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. F appartient à $\mathcal{P}ol_d(\mathcal{M}, \mathcal{A})$;
2. pour tout objet x de \mathcal{M} , $\delta_x(F)$ appartient à $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ (pour $d = 0$, cela signifie que ce foncteur est nul).

1.2 Cas où la catégorie source possède un objet initial

On note $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}on$ constituée des catégories monoïdales symétriques $(\mathcal{M}, \oplus, 0)$ dont l'unité 0 est objet initial. Sous cette hypothèse plus faible, nous ne pouvons pas définir les idempotents introduits à la définition 1.2. Néanmoins, on dispose de morphismes canoniques $a(= a \oplus 0) \rightarrow a \oplus b$ et $b \rightarrow a \oplus b$; plus généralement, pour toute famille finie $(a_i)_{i \in E}$ d'objets de \mathcal{M} et tout sous-ensemble I de E , on dispose d'un morphisme canonique

$$r_I^E(\mathbf{a}) : \bigoplus_{i \in I} a_i \left(\simeq \bigoplus_{i \in E} a'_i \right) \rightarrow \bigoplus_{i \in E} a_i \quad (1)$$

(où $a'_i = a_i$ si $i \in I$, 0 sinon — morphisme induit par les $a'_i \rightarrow a_i$ égaux à l'identité si $i \in I$ et à l'unique morphisme sinon).

Les exemples de catégories dans $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$ mais pas dans $\mathcal{M}on_{\text{nul}}$ qui nous intéressent sont généralement des catégories de monomorphismes.

Exemple 1.13. 1. Un exemple important d'objet de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$ est la catégorie Θ des ensembles finis (ou plutôt le squelette constitué des \mathbf{n} , $n \in \mathbb{N}$), les morphismes étant les fonctions injectives et la structure monoïdale symétrique la réunion disjointe.

La catégorie Θ possède la propriété universelle suivante : pour tout objet \mathcal{M} de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$, la fonction

$$\mathcal{M}on(\Theta, \mathcal{M}) \rightarrow \text{Ob } \mathcal{M} \quad F \mapsto F(\mathbf{1})$$

est une bijection (cf. remarque 1.1). Pour une démonstration formelle de ce fait élémentaire, voir la remarque 2.4 ci-après.

2. Les catégories d'objets hermitiens $\mathbf{H}(\mathcal{A})$, pour lesquelles on renvoie le lecteur à la section 3.2, constituent des exemples fondamentaux d'objets de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$.
3. Soit \mathcal{A} une petite catégorie additive. On note $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ la catégorie ayant les mêmes objets que \mathcal{A} et dont les morphismes sont donnés par :

$$\mathbf{S}(\mathcal{A})(a, b) = \{(u, v) \in \mathcal{A}(b, a) \times \mathcal{A}(a, b) \mid u \circ v = \text{Id}_a\}.$$

Cette catégorie est un objet de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$, la structure monoïdale symétrique étant la somme directe. La catégorie $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ s'identifie à la catégorie d'objets hermitiens $\mathbf{H}(\mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A})$ (voir la remarque 3.5 ci-après).

1.2.1 Foncteurs polynomiaux forts

Nous commençons par donner une première définition naïve de foncteur polynomial sur un objet de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$. Nous la donnons en termes de foncteurs différences plutôt que d'effets croisés (voir la remarque 1.20 ci-dessous à ce sujet) car la définition de la « bonne » notion d'objet polynomial qu'on introduira après se prête davantage à cette approche.

Définition 1.14. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$, x un objet de \mathcal{M} , \mathcal{A} une catégorie abélienne, et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. On note $\kappa_x(F)$ (resp. $\delta_x(F)$) le noyau (resp. conoyau) du morphisme $i_x(F) : F = \tau_0(F) \rightarrow \tau_x(F)$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ induit par l'unique morphisme $0 \rightarrow x$ de \mathcal{M} .

L'endofoncteur δ_x de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ s'appelle *foncteur différence* associé à x .

Nous avons donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow \kappa_x \rightarrow \text{Id} \rightarrow \tau_x \rightarrow \delta_x \rightarrow 0.$$

Comme le foncteur τ_x est exact, le lemme du serpent montre que tout suite exacte courte

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$$

de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \kappa_x(F) \rightarrow \kappa_x(G) \rightarrow \kappa_x(H) \rightarrow \delta_x(F) \rightarrow \delta_x(G) \rightarrow \delta_x(H) \rightarrow 0,$$

observation que nous utiliserons couramment dans cet article.

Il est clair que, lorsque \mathcal{M} appartient à $\mathcal{M}on_{\text{mul}}$, cette définition s'identifie canoniquement à la définition 1.10. Avant d'utiliser ces foncteurs pour définir les foncteurs polynomiaux, nous en donnons quelques propriétés générales qui nous serviront à plusieurs reprises.

Proposition 1.15. *Soient x et y deux objets de \mathcal{M} (les notations sont les mêmes que dans la définition précédente).*

1. *Les endofoncteurs τ_x et τ_y de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ commutent à isomorphisme naturel près. Ils commutent aux limites et aux colimites.*
2. *Les endofoncteurs δ_x et δ_y de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ commutent à isomorphisme naturel près. Ils commutent aux colimites.*
3. *Les endofoncteurs κ_x et κ_y de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ commutent à isomorphisme naturel près. Ils commutent aux limites.*
4. *L'endofoncteur κ_x est idempotent : l'inclusion naturelle $(\kappa_x)^2 \hookrightarrow \kappa_x$ est un isomorphisme.*
5. *Les endofoncteurs τ_x et δ_y commutent à isomorphisme naturel près.*
6. *Les endofoncteurs τ_x et κ_y commutent à isomorphisme naturel près.*
7. *Il existe une suite exacte naturelle*

$$\delta_y \rightarrow \delta_{x \oplus y} \rightarrow \tau_y \delta_x \rightarrow 0.$$

Démonstration. La première assertion est claire.

En s'appuyant sur celle-ci, on forme un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tau_y \kappa_x & \longrightarrow & \tau_y & \longrightarrow & \tau_y \tau_x & \longrightarrow & \tau_y \delta_x & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ 0 & \longrightarrow & \kappa_x \tau_y & \longrightarrow & \tau_y & \longrightarrow & \tau_x \tau_y & \longrightarrow & \delta_x \tau_y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui établit les assertions 5. et 6.

Le foncteur δ_x , conoyau d'une transformation naturelle entre Id et τ_x , qui commutent aux colimites, commute aux colimites. En utilisant 5., l'exactitude à droite de δ_y et un raisonnement analogue au précédent, on en déduit l'assertion 2.; la propriété 3. est similaire.

L'assertion 4. est une conséquence formelle de ce que κ_x est le noyau d'une transformation naturelle de l'identité vers un foncteur exact à gauche.

La propriété 7. s'obtient en formant le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Id} & \longrightarrow & \tau_{x \oplus y} & \longrightarrow & \delta_{x \oplus y} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow i_y & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \tau_y & \longrightarrow & \tau_y \tau_x & \longrightarrow & \tau_y \delta_x & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

□

La proposition 1.12 conduit à introduire la définition suivante :

Définition 1.16 (Foncteurs fortement polynomiaux). *Sous les hypothèses précédentes, on définit par récurrence sur n une suite de sous-catégories pleines $\mathcal{P}ol_n^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ comme suit.*

1. *Pour $n < 0$, $\mathcal{P}ol_n^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \{0\}$;*
2. *pour $n \geq 0$, $\mathcal{P}ol_n^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est constitué des foncteurs F tels que $\delta_x(F)$ appartienne à $\mathcal{P}ol_{n-1}^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pour tout objet x de \mathcal{M} .*

On dit qu'un foncteur F est *fortement polynomial* s'il existe n tel que F appartienne à $\mathcal{P}ol_n^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Le minimum dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de ces n s'appelle le *degré fort* de F .

Proposition 1.17. *Les sous-catégories $\mathcal{P}ol_n^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ sont stables par quotients, extensions et colimites. Elles sont également stables sous l'action des foncteurs de translation τ_x .*

Si E est un ensemble d'objets de \mathcal{M} tel que tout objet de \mathcal{M} est isomorphe à une somme (au sens de \oplus) finie d'éléments de E , alors un foncteur F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ appartient à $\mathcal{P}ol_n^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ si $\delta_x(F)$ appartient à $\mathcal{P}ol_{n-1}^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. On s'appuie sur la proposition 1.15 : comme les foncteurs δ_x commutent aux colimites, on voit aussitôt par récurrence sur n que $\mathcal{P}ol_n^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est stable par quotients, extensions et colimites. La commutation des foncteurs δ_x aux foncteurs de translation implique que ces derniers préservent $\mathcal{P}ol_n^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

La dernière assertion se déduit, par récurrence sur n , du point 7. de la proposition 1.15, en utilisant la stabilité de $\mathcal{P}ol_n^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ par extensions, quotients et par les foncteurs de translation. \square

Contrairement à ce qui advient dans la situation du paragraphe précédent (proposition 1.11), les foncteurs δ_x *ne commutent généralement pas aux limites* (même si \mathcal{A} est une catégorie abélienne très régulière), en raison de l'absence de scindage aux morphismes canoniques $t \rightarrow x \oplus t$ qui servent à les définir. C'est ce qui explique que la définition 1.16 ne se comporte pas très bien : un sous-foncteur d'un foncteur fortement polynomial n'est pas forcément fortement polynomial, et même lorsqu'il l'est, son degré fort peut excéder celui du foncteur initial.

Exemple 1.18. Considérons la catégorie $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathbf{Ab})$. On note tout d'abord que, grâce à la dernière partie de la proposition 1.17, un foncteur F dans cette catégorie est fortement polynomial de degré fort au plus n si et seulement si $\delta_1^{n+1}(F) = 0$.

Le foncteur constant \mathbb{Z} de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathbf{Ab})$ est fortement polynomial de degré 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il possède un sous-foncteur $\mathbb{Z}_{\geq n}$ qui est nul sur les ensembles de cardinal strictement inférieur à n et égal à \mathbb{Z} sur les autres ensembles finis. Le foncteur $\mathbb{Z}_{\geq n}$ est polynomial fort de degré exactement n . Pour le voir, on effectue les calculs suivants dans $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathbf{Ab})$:

$$\forall (n, i) \in \mathbb{N}^2 \quad \delta_1(\mathbb{Z}_{\geq n}) = \mathbb{Z}_{n-1}, \quad \delta_1(\mathbb{Z}_i) = \mathbb{Z}_{i-1}$$

où \mathbb{Z}_i est le foncteur égal à \mathbb{Z} sur les ensembles de cardinal i et nul ailleurs.

Remarque 1.19. Disons qu'un foncteur F de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$, où \mathcal{A} est une catégorie abélienne, est *engendré en cardinal au plus n* si tout sous-foncteur G de F tel que l'inclusion $G(\mathbf{i}) \subset F(\mathbf{i})$ soit une égalité pour $i \leq n$ est égal à F . Il revient au même de demander que F soit isomorphe à un quotient d'une somme directe de foncteurs du type $A[\Theta(\mathbf{i}, -)]$ avec $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ et $i \leq n$.

Un objet de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ est fortement polynomial de degré fort au plus n si et seulement s'il est engendré en cardinal au plus n .

D'un autre côté, un objet de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ est de type fini si et seulement s'il existe un entier n tel qu'il soit engendré en degré au plus n et qu'il prend des valeurs de type fini dans \mathcal{A} (on peut d'ailleurs se restreindre aux valeurs sur

\mathbf{i} pour $i \leq n$). Par conséquent, tout foncteur de type fini de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ est fortement polynomial, et la réciproque est vraie pour les foncteurs prenant des valeurs de type fini.

On retrouve, avec notre vocabulaire, le théorème 1.2 de [8] (étendant lui-même le théorème 1.3 de [7]), sous la forme générale suivante. Notons $G_0(\mathcal{A})$ le groupe de Grothendieck des objets noethériens de \mathcal{A} (il existe toujours si \mathcal{A} est une catégorie de Grothendieck, par exemple) et, pour un foncteur $F : \Theta \rightarrow \mathcal{A}$ prenant des valeurs noethériennes, $\mathrm{dv}_F : \mathbb{N} \rightarrow G_0(\mathcal{A})$ la fonction associant à n la classe de $F(\mathbf{n})$ dans $G_0(\mathcal{A})$. Si F est noethérien, alors cette fonction est polynomiale de degré n à partir d'un certain rang (i.e. sa n -ème déviation — au sens de [15], § 8, où l'on peut remplacer à la source le groupe abélien par un monoïde abélien comme \mathbb{N} sans changement — est nulle sur tout $n + 1$ -uplet d'entiers assez grands), où n est le degré fort de F . Cela se montre en observant que pour F noethérien, le morphisme canonique $i_1(F)(\mathbf{i}) : F(\mathbf{i}) \rightarrow F(\mathbf{i} + \mathbf{1})$ est un monomorphisme pour i assez grand, de sorte que $\mathrm{dv}_F(i + 1) = \mathrm{dv}_F(i) + \mathrm{dv}_{\delta F}(i)$ (pour i assez grand).

Remarque 1.20 (Effets croisés). On peut aussi définir les foncteurs fortement polynomiaux à l'aide d'effets croisés : soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{Mon}_{\mathrm{ini}}$, \mathcal{A} une catégorie additive possédant des colimites finies et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. Pour toute famille finie $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in E}$ d'objets de \mathcal{M} , on note

$$cr_E(F)(\mathbf{a}) = \mathrm{Coker} \left(\bigoplus_{i \in E} F \left(\bigoplus_{j \in E \setminus \{i\}} a_j \right) \rightarrow F \left(\bigoplus_{i \in E} a_i \right) \right)$$

(morphisme dont les composantes sont les $F(r_{E \setminus \{i\}}^E(\mathbf{a}))$ — on rappelle que les r_I^E sont définis par (1) à la page 8).

Lorsque $E = \mathbf{d}$ pour un $d \in \mathbb{N}$, on note $cr_d(F)(a_1, \dots, a_d)$ pour $cr_E(F)(\mathbf{a})$. Le foncteur $cr_d(F) : \mathcal{M}^d \rightarrow \mathcal{A}$ ainsi obtenu s'appelle *d-ème effet croisé de F* .

La proposition 1.6 permet de voir que cette définition s'identifie canoniquement avec la définition 1.5 lorsque \mathcal{M} appartient à $\mathcal{Mon}_{\mathrm{nul}}$.

On voit facilement que F est fortement polynomial de degré au plus d si et seulement $cr_{d+1}(F) = 0$, et que toutes les propriétés données dans la proposition 1.7 subsistent dans ce cadre plus général, *excepté la commutation des effets croisés aux limites*.

On souhaite maintenant modifier la définition 1.16 de manière à ce qu'un sous-foncteur d'un foncteur polynomial de degré d soit polynomial de degré au plus d , par exemple. Cela se fait au prix du passage de la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ à une catégorie quotient. Par commodité, on se placera d'emblée dans le cas où \mathcal{A} est une « bonne » catégorie abélienne. On renvoie le lecteur à [18], par exemple, pour les généralités sur les catégories abéliennes, notamment les catégories de Grothendieck (les catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes de [18], chap. II, § 6) et les catégories abéliennes quotients (op. cit., chap. III).

1.2.2 La catégorie stable $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$

Définition 1.21. Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{Mon}_{\mathrm{ini}}$, \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur. On note $\kappa(F)$ le sous-foncteur $\sum_{x \in \mathrm{Ob} \mathcal{M}} \kappa_x(F)$ de F .

On dit que F est *stablement nul* si $\kappa(F) = F$.

On note $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ constituée des foncteurs stablement nuls.

Exemple 1.22. Les foncteurs $\mathbb{Z}_i : \Theta \rightarrow \mathbf{Ab}$ introduits dans l'exemple 1.18 sont stablement nuls.

D'autre part, on vérifie facilement qu'un objet F de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathcal{A})$ est stablement nul si et seulement si

$$\operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} F(\mathbf{n}) = 0.$$

Proposition 1.23. *Le foncteur κ est exact à gauche.*

Démonstration. Les inclusions $\kappa_x(F) \subset \kappa_{x \oplus y}(F)$ et $\kappa_y(F) \subset \kappa_{x \oplus y}(F)$ (dédites des flèches canoniques $x \rightarrow x \oplus y$ et $y \rightarrow x \oplus y$) montrent que la famille $(\kappa_x(F))$ de sous-objets de F est *filtrante*. Le foncteur κ est donc exact à gauche en tant que colimite filtrante des foncteurs exacts à gauche κ_x . \square

Proposition 1.24. *Soient \mathcal{M} un objet de $\mathbf{Mon}_{\text{ini}}$ et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck. La catégorie $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est une sous-catégorie épaisse stable par colimites de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.*

Démonstration. Le foncteur κ commute aux colimites filtrantes d'inclusions. Cette observation implique que $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est stable par colimites filtrantes d'inclusions.

La stabilité de $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ par sous-objets se déduit formellement de ce que κ est un foncteur exact à gauche : si G est un sous-foncteur de F , le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \kappa(G) & \longrightarrow & \kappa(F) & \longrightarrow & \kappa(F/G) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F/G \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les colonnes sont les inclusions implique (par le lemme des cinq) que si $\kappa(F) \subset F$ est une égalité, alors il en est de même pour $\kappa(G) \subset G$.

Si $f : F \rightarrow G$ est un épimorphisme de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ avec F dans $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \kappa(F) & \xrightarrow{\kappa(f)} & \kappa(G) \\ \parallel & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

(dont les flèches verticales sont les inclusions canoniques) montre que l'inclusion $\kappa(G) \subset G$ est une égalité, d'où la stabilité de $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ par quotients.

Pour la stabilité par extensions, considérons une suite exacte courte

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{u} F \rightarrow A \rightarrow 0$$

de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ avec A et B dans $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. En écrivant A comme colimite filtrante des $\kappa_x(A)$, en formant le produit fibré des morphismes $F \rightarrow A$ et $\kappa_x(A) \hookrightarrow A$ et en utilisant l'exactitude des colimites filtrantes dans \mathcal{A} (et l'observation du début de la démonstration sur les colimites filtrantes d'inclusions),

on voit qu'il suffit de montrer que F appartient à $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ s'il existe $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$ tel que $i_x(A) = 0$. On en déduit un morphisme $\varphi : F \rightarrow \tau_x(B)$ rendant commutatif le diagramme aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & F & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow i_x(B) & & \downarrow i_x(F) & & \downarrow i_x(A)=0 & & \\ 0 & \longrightarrow & \tau_x(B) & \longrightarrow & \tau_x(F) & \longrightarrow & \tau_x(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Pour tout $y \in \text{Ob } \mathcal{M}$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & & F & & & \\ & & & \downarrow i_x(F) & & & \\ & & & \tau_x(F) & & & \\ & & & \downarrow i_y(\tau_x(F)) & & & \\ & & & \tau_y \tau_x(F) & \xrightarrow{\cong} & \tau_{x \oplus y}(F) & \\ & & & \uparrow \tau_y \tau_x(u) & & & \\ & & & \tau_x(B) & \xrightarrow{\tau_x(u)} & \tau_x(F) & \\ & & & \downarrow i_y(\tau_x(B)) & & & \\ & & & \tau_y \tau_x(B) & \xrightarrow{\cong} & \tau_x \tau_y(B) & \\ & & & \downarrow \tau_x(i_y(B)) & & & \\ & & & \tau_x(B) & & & \\ & & & \downarrow \varphi & & & \\ & & & F & & & \end{array}$$

montre l'inclusion

$$\kappa_{x \oplus y}(F) \supset \varphi^{-1}(\tau_x(\kappa_y(B)))$$

d'où l'on tire $F = \kappa(F)$, ce qui achève la démonstration. \square

Définition 1.25. Sous les hypothèses de la définition précédente, on note $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ la catégorie quotient $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, $\pi_{\mathcal{M}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ le foncteur canonique et $s_{\mathcal{M}} : \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ le foncteur section, c'est-à-dire l'adjoint à droite du foncteur $\pi_{\mathcal{M}}$ (voir [18] chap. III).

Ainsi, $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est une catégorie de Grothendieck et $\pi_{\mathcal{M}}$ est un foncteur exact, essentiellement surjectif et commutant à toutes les colimites.

Toutes ces constructions sont fonctorielles en \mathcal{M} en le sens suivant : si $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est une flèche de Mon_{ini} qui est essentiellement surjective, ou plus généralement telle que pour tout objet b de \mathcal{N} existe un objet a de \mathcal{M} et un morphisme $b \rightarrow \Phi(a)$, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S}n(\mathcal{N}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\text{incl}} & \mathbf{Fct}(\mathcal{N}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{N}}} & \mathbf{St}(\mathcal{N}, \mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \Phi^* & & \downarrow \\ \mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\text{incl}} & \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{M}}} & \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \end{array}$$

de catégories abéliennes (dont toutes les flèches sont exactes et commutent aux colimites).

Dans toute la suite de ce paragraphe, \mathcal{M} désigne un objet de Mon_{ini} et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck.

Le lemme suivant nous aidera à mener à bien certains raisonnements sur les morphismes de la catégorie $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Lemme 1.26. *Soit $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur.*

1. Le foncteur $\kappa(F)$ est le plus grand sous-objet de F appartenant à $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.
2. On a $\text{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}(S, F) = 0$ pour tout objet S de $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ si et seulement si $i_x(F) : F \rightarrow \tau_x(F)$ est un monomorphisme pour tout objet x de \mathcal{M} .
3. Si $i_x(F) : F \rightarrow \tau_x(F)$ est un monomorphisme scindé pour tout objet x de \mathcal{M} , alors $\text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}^*(S, F) = 0$ pour tout objet S de $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Par conséquent, le morphisme naturel

$$\text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}^*(G, F) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}^*(\pi_{\mathcal{M}}G, \pi_{\mathcal{M}}F)$$

est un isomorphisme pour tout objet G de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

4. Si F appartient à $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et que $X : \mathcal{M}^{op} \rightarrow \mathcal{A}$ est un foncteur tel que la transformation naturelle $i_x : \tau_x(X) \rightarrow X$ soit un épimorphisme scindé pour tout $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$, alors $\text{Tor}_*^{\mathcal{M}}(X, F) = 0$.
5. En particulier, $H_*(\mathcal{M}; F) = 0$ si F appartient à $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Démonstration. Le premier point est un fait formel classique qui découle de la propriété d'idempotence des foncteurs κ_x (proposition 1.15.4) : elle implique que les $\kappa_x(F)$, donc aussi leur somme $\kappa(F)$, appartiennent à $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$; réciproquement, si G est un sous-foncteur de F appartenant à $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, alors $G = \kappa(G) \subset \kappa(F)$ puisque κ est exact à gauche d'après la proposition 1.23.

Le deuxième point en résulte : $\text{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}(S, F) = 0$ pour tout objet S de $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ si et seulement si $\kappa(F) = 0$, ce qui signifie bien que $\kappa_x(F) = 0$, i.e. $i_x(F)$ est injective, pour tout $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$.

Pour le troisième point, comme $S \in \text{Ob } \mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est la colimite *filtrante* de ses sous-objets $\kappa_x(S)$ et que $i_x(\kappa_x) = 0$ il suffit de montrer la nullité de $\text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}^*(S, F) = 0$ lorsqu'existe un $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$ tel que $i_x(S) = 0$. En ce cas, on considère le diagramme commutatif (dédit de la naturalité de i_x et de l'exactitude de τ_x)

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}^*(S, F) & \xrightarrow{i_x(F)^*} & \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}^*(S, \tau_x(F)) \\ (\tau_x)_* \downarrow & \nearrow i_x(S)^* & \\ \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}^*(\tau_x(S), \tau_x(F)) & & \end{array}$$

la flèche oblique est nulle par hypothèse sur S , tandis que la flèche horizontale est un monomorphisme (scindé) par hypothèse sur F , d'où la nullité souhaitée.

Le quatrième point est dual et se démontre de la même façon. Le cinquième s'en déduit en prenant pour X le foncteur constant en \mathbb{Z} . \square

On déduit aussitôt du dernier point de ce lemme le résultat suivant, que l'on utilisera dans la section 2.

Proposition 1.27. *Le foncteur homologique $H_*(\mathcal{M}; -) : \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}_{gr}$ (l'indice gr désignant les objets gradués) se factorise par $\pi_{\mathcal{M}}$, induisant un foncteur homologique $h_*^{\mathcal{M}} : \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}_{gr}$.*

On montre maintenant que τ_x et δ_x induisent des endofoncteurs de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ qui se comportent comme on l'attend.

Proposition 1.28. 1. Pour tout objet x de \mathcal{M} , les endofoncteurs τ_x et δ_x de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ induisent des endofoncteurs de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ exacts et commutant aux colimites, encore notés τ_x et δ_x . Ils vérifient les relations $\pi_{\mathcal{M}}\delta_x = \delta_x\pi_{\mathcal{M}}$ et $\pi_{\mathcal{M}}\tau_x = \tau_x\pi_{\mathcal{M}}$ et s'insèrent dans une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Id} \rightarrow \tau_x \rightarrow \delta_x \rightarrow 0$$

naturelle en x .

2. Pour tous objet x et y de \mathcal{M} , les endofoncteurs $\tau_x, \tau_y, \delta_x, \delta_y$ de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ commutent deux à deux à isomorphisme naturel près.

Démonstration. La commutation de τ_x au foncteur κ (qui découle de la commutation de τ_x aux colimites et aux foncteurs κ_y — cf. proposition 1.15) et le fait que τ_x est exact et commute aux colimites implique que ce foncteur induit un endofoncteur de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ exact et commutant aux colimites.

Par ailleurs, la proposition 1.15. 4. montre que le foncteur κ_x prend ses valeurs dans $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Il s'en suit que la transformation naturelle $i_x : \text{Id} \rightarrow \tau_x$ d'endofoncteurs de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ induit un *monomorphisme* naturel d'endofoncteurs de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Comme Id et τ_x sont exacts dans $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, cela implique, grâce au lemme du serpent, que leur conoyau est un endofoncteur exact de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, qui est induit par l'endofoncteur δ_x de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. Cet endofoncteur de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ commute aux colimites puisqu'il en est de même pour Id et τ_x . Cela achève d'établir la première assertion. La deuxième se déduit directement de la proposition 1.15. \square

Avant d'étudier le comportement des foncteurs τ_x et δ_x relativement au foncteur section, on rappelle (voir [18] chap. III) qu'un foncteur F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est dit $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ -fermé si

$$\text{Ext}^i(H, F) = 0$$

pour $i \leq 1$ et $H \in \mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, ce qui équivaut à dire que l'unité $\eta : F \rightarrow s_{\mathcal{M}}\pi_{\mathcal{M}}(F)$ de l'adjonction entre $\pi_{\mathcal{M}}$ et $s_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme (voir le corollaire de la page 371 de [18]).

Dans la proposition suivante et sa démonstration, tous les ensembles de morphismes sont pris sur la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Proposition 1.29. 1. Soient F un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et x un objet de \mathcal{M} .

- (a) Si $\text{Hom}(N, F) = 0$ pour tout N dans $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, alors $\tau_x(F)$ possède la même propriété — autrement dit, l'unité $\tau_x(F) \rightarrow s_{\mathcal{M}}\pi_{\mathcal{M}}(\tau_x(F))$ de l'adjonction entre $\pi_{\mathcal{M}}$ et $s_{\mathcal{M}}$ est un monomorphisme.
- (b) Si F est $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ -fermé, alors $\text{Hom}(N, \delta_x(F)) = 0$ pour tout N dans $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.
- (c) Si F est $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ -fermé et que $0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow N \rightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, alors $\kappa_x(N) \simeq \kappa_x\delta_x(G)$.

- 2. (a) Il existe un isomorphisme naturel de foncteurs $\tau_t s_{\mathcal{M}} \simeq s_{\mathcal{M}} \tau_t$ pour tout objet t de \mathcal{M} .
- (b) Il existe un monomorphisme naturel de foncteurs $\delta_t s_{\mathcal{M}} \hookrightarrow s_{\mathcal{M}} \delta_t$ pour tout objet t de \mathcal{M} .

Démonstration. 1. (a) La condition $\text{Hom}(N, F) = 0$ pour tout N dans $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ équivaut à $\kappa(F) = 0$ par la première assertion du lemme 1.26. Le premier point résulte donc de la commutation des foncteurs τ_x et κ (cf. proposition 1.15).

- (b) Comme F est $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ -fermé, $i_x : F \rightarrow \tau_x(F)$ est injectif, de sorte qu'on a une suite exacte

$$\text{Hom}(N, \tau_x(F)) \rightarrow \text{Hom}(N, \delta_x(F)) \rightarrow \text{Ext}^1(N, F)$$

déduite de la suite exacte courte $0 \rightarrow F \xrightarrow{i_x} \tau_x(F) \rightarrow \delta_x(F) \rightarrow 0$. Si N appartient à $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, alors $\text{Hom}(N, F)$ est nul, par conséquent $\text{Hom}(N, \tau_x(F))$ est nul d'après le point précédent, et $\text{Ext}^1(N, F)$ est nul par hypothèse sur F , d'où la nullité de $\text{Hom}(N, \delta_x(F))$.

- (c) Par le lemme du serpent, la suite exacte de l'hypothèse induit une suite exacte

$$0 \rightarrow \kappa_x(G) \rightarrow \kappa_x(F) \rightarrow \kappa_x(N) \rightarrow \delta_x(G) \rightarrow \delta_x(F) \rightarrow \delta_x(N) \rightarrow 0.$$

Puisque F est $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ -fermé, $\kappa_x(F)$ est nul, et $\kappa_x \delta_x(F)$ l'est également grâce à ce qu'on vient de démontrer au point précédent et au lemme 1.26. Appliquant le foncteur exact à gauche κ_x à la suite exacte $0 \rightarrow \kappa_x(N) \rightarrow \delta_x(G) \rightarrow \delta_x(F)$ et utilisant le caractère idempotent de κ_x (proposition 1.15.4), on obtient bien un isomorphisme $\kappa_x(N) \simeq (\kappa_x)^2(N) \xrightarrow{\cong} \kappa_x \delta_x(G)$.

2. (a) Il s'agit de montrer que, si F est un objet $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ -fermé de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, alors $\tau_t(F)$ est $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ -fermé. Soit G le foncteur $s_{\mathcal{M}}\pi_{\mathcal{M}}(\tau_t F) : \text{ce qu'on a démontré en 1.(a) implique que l'unité } \tau_t(F) \rightarrow G \text{ de l'adjonction entre } \pi_{\mathcal{M}} \text{ et } s_{\mathcal{M}} \text{ est un monomorphisme. Soit } N \text{ son conoyau : par le point 1.(c), pour tout objet } x \text{ de } \mathcal{M}, \text{ on a } \kappa_x(N) \simeq \kappa_x \delta_x \tau_t(F). \text{ On en déduit } \kappa_x(N) \simeq \tau_t \kappa_x \delta_x(F) \text{ par la proposition 1.15. Mais 1.(b) entraîne la nullité de } \kappa_x \delta_x(F), \text{ d'où } \kappa_x(N) = 0. \text{ Comme c'est vrai pour tout } x \in \text{Ob } \mathcal{M} \text{ et que } N \text{ appartient à } \mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A}), \text{ on en déduit } N = 0, \text{ d'où notre assertion.}$

- (b) C'est une conséquence directe du point 1.(b). □

Cette proposition implique le résultat de compatibilité aux limites suivant des endofoncteurs τ_x et δ_x de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Corollaire 1.30. *Soit x un objet de \mathcal{M} .*

1. *L'endofoncteur τ_x de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ commute aux limites.*
2. *Il existe un monomorphisme naturel $\delta_x(\lim_{\mathcal{T}} \Phi) \hookrightarrow \lim_{\mathcal{T}} (\delta_x \Phi)$ pour tout foncteur Φ d'une petite catégorie \mathcal{T} vers $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.*

Démonstration. L'assertion relative à τ_x résulte de ce que l'endofoncteur τ_x de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ commute aux limites d'après la proposition 1.15.1. et de la proposition 1.29.2(a), les limites dans $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ étant obtenues en appliquant le foncteur $s_{\mathcal{M}}$, en prenant la limite de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ puis en appliquant le foncteur $\pi_{\mathcal{M}}$.

L'assertion relative à δ_x s'en déduit en utilisant la suite exacte courte $0 \rightarrow \text{Id} \rightarrow \tau_x \rightarrow \delta_x \rightarrow 0$ d'endofoncteurs de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, qui permet de former un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \lim_{\mathcal{T}} \Phi & \longrightarrow & \tau_x(\lim_{\mathcal{T}} \Phi) & \longrightarrow & \delta_x(\lim_{\mathcal{T}} \Phi) \longrightarrow 0 : \\
& & \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \dashv \\
0 & \longrightarrow & \lim_{\mathcal{T}} \Phi & \longrightarrow & \lim_{\mathcal{T}} (\tau_x \Phi) & \longrightarrow & \lim_{\mathcal{T}} (\delta_x \Phi)
\end{array}$$

le carré commutatif de gauche fournit l'existence de la flèche verticale de droite (en pointillé), qui est un monomorphisme. \square

1.2.3 Foncteurs polynomiaux dans $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$

Définition 1.31 (Objets polynomiaux de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$). On définit par récurrence une suite $(\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A}))_n$ de sous-catégories pleines de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ de la façon suivante :

1. $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \{0\}$ si $n < 0$;
2. pour $n \geq 0$, $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est constituée des objets X de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ tels que $\delta_x(X)$ appartienne à $\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pour tout objet x de \mathcal{M} .

Un objet de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est dit *polynomial* s'il appartient à une sous-catégorie $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$; son degré est le plus petit $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ pour lequel cela advient et on note $\text{deg}(F)$ le degré d'un objet F de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

En fait, on peut se contenter d'appliquer les foncteurs δ_x pour certains objets x de \mathcal{M} :

Proposition 1.32. *Si E est un ensemble d'objets de \mathcal{M} tel que tout objet de \mathcal{M} est isomorphe à une somme (au sens de \oplus) finie d'éléments de E , alors un objet X de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ appartient à $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ si $\delta_x(X)$ appartient à $\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. La démonstration est la même que celle de la deuxième partie de la proposition 1.17. \square

La description des objets de degré 0 est sans surprise :

Proposition 1.33 (Objets de degré 0 de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$). *Le foncteur*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{c} \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{M}}} \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A}),$$

où la flèche c est l'inclusion des foncteurs constants, induit une équivalence de catégories

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{P}ol_0(\mathcal{M}, \mathcal{A}).$$

Démonstration. Comme \mathcal{M} possède un objet initial 0, le foncteur c est adjoint à gauche au foncteur $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ d'évaluation en 0. Cela montre en particulier que c est pleinement fidèle. Maintenant, grâce au troisième point du lemme 1.26, on voit que l'application

$$\text{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}(F, c(A)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}(\pi_{\mathcal{M}}(F), \pi_{\mathcal{M}}(c(A)))$$

induite par $\pi_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme pour tout objet F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, puis que $\pi_{\mathcal{M}} \circ c$ est pleinement fidèle.

Il est clair que ce foncteur prend ses valeurs dans $\mathcal{P}ol_0(\mathcal{M}, \mathcal{A})$; vérifions que son image essentielle est exactement $\mathcal{P}ol_0(\mathcal{M}, \mathcal{A})$. En effet, si X est un objet de $\mathcal{P}ol_0(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et x un objet de \mathcal{M} , $\delta_x(X)$ est nul, donc $\delta_x s_{\mathcal{M}}(X)$, qui est un sous-objet de $s_{\mathcal{M}}\delta_x(X)$ d'après la dernière assertion de la proposition 1.29, est également nul. Autrement dit, posant $F = s_{\mathcal{M}}(X)$, $i_x(F) : F \rightarrow \tau_x(F)$ est surjectif. Ce morphisme est également injectif (par le deuxième point du lemme 1.26), c'est donc un isomorphisme. En évaluant en 0, on en déduit que $F(0) \rightarrow F(x)$ est un isomorphisme, ce qui signifie bien que F est constant. \square

La deuxième partie de la démonstration précédente consiste à établir que l'image par le foncteur section d'un objet polynomial de degré nul est un foncteur fortement polynomial de degré fort nul. En revanche, l'assertion analogue pour les degrés supérieurs est fautive, dès le degré 1, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.34. Notons P le foncteur $E \mapsto \mathbb{Z}[E]$ de $\mathbf{Fct}(\Theta, \mathbf{Ab})$, on dispose d'un morphisme $P \rightarrow \mathbb{Z}$ donné par l'augmentation $\mathbb{Z}[E] \rightarrow \mathbb{Z}$; son conoyau est \mathbb{Z}_0 (on conserve les notations de l'exemple 1.18), nous noterons F son noyau. Un calcul facile montre que $\delta_1(F) \simeq \mathbb{Z}_{>1}$, de sorte que F est polynomial fort de degré fort 2 (on utilise ici l'exemple 1.18), tandis que $\pi_{\Theta}(F)$ est polynomial de degré 1 (utiliser la proposition 1.32). Pour autant, F est $\mathcal{S}n(\Theta, \mathbf{Ab})$ -fermé, de sorte que $F \simeq s_{\Theta}\pi_{\Theta}(F)$. Cela se déduit directement de la suite exacte

$$0 \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow \mathbb{Z}$$

et de la nullité de $\text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\Theta, \mathbf{Ab})}^i(S, P)$ pour $i \leq 1$ et de $\text{Hom}_{\mathbf{Fct}(\Theta, \mathbf{Ab})}(S, \mathbb{Z})$ pour S stablement nul, qu'on tire du lemme 1.26.3.

Remarque 1.35. Le phénomène illustré par l'exemple précédent est d'autant plus spectaculaire que, si X est un objet de degré 1 de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, s'il existe un représentant G de X fortement polynomial de degré fort 1, alors $s_{\mathcal{M}}(X)$ est de degré fort 1, comme on va le voir plus bas. (Nous ignorons si ce résultat persiste en remplaçant 1 par un degré supérieur.) Ainsi, l'objet $\pi_{\Theta}(F)$ de $\mathbf{St}(\Theta, \mathbf{Ab})$ de notre exemple, bien que de degré 1, n'admet aucun représentant de degré fort strictement inférieur à 2! (Voir toutefois la remarque 2.8 ci-après, pour nuancer ce phénomène contre-intuitif.)

Démontrons l'assertion ci-dessus : notons $F = s_{\mathcal{M}}(X)$. Quitte à remplacer G par son image par l'unité $G \rightarrow F$ de l'adjonction (qui est de degré fort au plus 1 puisque $\mathcal{P}ol_1^{\text{fort}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est stable par quotients), on peut supposer que celle-ci est injective. Notons N son conoyau : on a donc une suite exacte courte $0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow N \rightarrow 0$ avec F $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ -fermé et N dans $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Soient x et t des objets de \mathcal{M} . Notons H l'image du morphisme $\delta_x(G) \rightarrow \delta_x(F)$ induit par l'inclusion $G \rightarrow F$. La suite exacte courte $0 \rightarrow H \rightarrow \delta_x(F) \rightarrow \delta_x(N) \rightarrow 0$ induit une suite exacte

$$\kappa_t \delta_x(F) \rightarrow \kappa_t \delta_x(N) \rightarrow \delta_t(H).$$

Mais $\delta_t(H)$, quotient de $\delta_t \delta_x(G)$, est nul puisque G est par hypothèse de degré fort 1. Quant à $\kappa_t \delta_x(F)$, il est nul par la proposition 1.29. Donc $\kappa_t \delta_x(N)$ est nul pour tout t (et tout x). Comme $\delta_x(N)$ est stablement nul comme N (c'est

un quotient de $\tau_x(N)$, et la commutation des foncteurs κ_a et τ_x implique que $\mathcal{S}n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est stable par τ_x , on en déduit $\delta_x(N) = 0$, i.e. que N est fortement polynomial de degré fort (au plus) 0. Par conséquent, la suite exacte courte $0 \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow N \rightarrow 0$ montre que F est fortement polynomial de degré fort au plus 1 (utiliser la proposition 1.17), comme souhaité.

La proposition suivante montre que, dans la catégorie quotient $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, les sous-catégories d'objets polynomiaux possèdent les mêmes propriétés de régularité que dans le cadre usuel revu au § 1.1 (contrairement aux foncteurs fortement polynomiaux).

Proposition 1.36. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-catégorie $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est bilocalisante, c'est-à-dire épaisse et stable par limites et colimites.*

De plus, pour tout objet x de \mathcal{M} et tout objet F de $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, $\tau_x(F)$ (resp. $\delta_x(F)$) est polynomial de degré au plus n (resp. de degré strictement inférieur à n).

Démonstration. Le caractère localisant (i.e. épais et stable par colimites) de $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ provient de ce que les endofoncteurs δ_t sont exacts et commutent aux colimites (cf. proposition 1.28). La stabilité par limites se déduit de la deuxième assertion du corollaire 1.30.

La dernière assertion découle des propriétés de commutation données dans la proposition 1.28. \square

La première partie de cette proposition peut se reformuler en disant qu'il existe un *diagramme de recollement*

$$\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A}) / \mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A}).$$

La suite du présent article permet de décrire, dans certains cas importants, la catégorie quotient qui apparaît à droite de ce diagramme.

1.2.4 Quelques exemples fondamentaux

Nous donnons maintenant quelques exemples de foncteurs de $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ dans \mathbf{Ab} dont l'image dans la catégorie $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$ est polynomiale et dont la compréhension fine constitue l'une des motivations de cet article. Le recours à la catégorie quotient est indispensable dans la mesure où la description complète des foncteurs semble hors de portée (et fait de surcroît manifestement apparaître des phénomènes instables qu'on souhaite écarter dans un premier temps).

Exemple 1.37. Notons \mathcal{G} , comme dans [13], la catégorie (ou un squelette de celle-ci) dont les objets sont les groupes libres de type fini et les morphismes $G \rightarrow H$ sont les couples (u, K) formés d'un monomorphisme de groupes $u : G \hookrightarrow H$ et d'un sous-groupe K de H tels que $H = K * u(G)$. On dispose alors d'un foncteur \mathbf{Aut} de \mathcal{G} vers la catégorie \mathbf{Gr} des groupes associant à un groupe libre son groupe d'automorphismes et à un tel morphisme le morphisme

$$\mathbf{Aut} G \rightarrow \mathbf{Aut} H \quad \varphi \mapsto (K * u\varphi u^{-1} : H = K * u(G) \rightarrow H).$$

On dispose de même d'un foncteur $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Gr}$ donné sur les objets par $G \mapsto \mathbf{Aut}(G_{ab})$, qu'on peut voir comme la composée

$$\mathcal{G} \xrightarrow{G \mapsto G_{ab}} \mathbf{S}(\mathbf{ab}) \xrightarrow{\mathbf{Aut}} \mathbf{Gr}$$

(le Aut n'étant pas le même que le précédent !); le morphisme canonique $G \rightarrow G_{ab}$ induit un épimorphisme de groupes naturel $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G_{ab})$ dont le noyau est noté $IA(G)$. On définit ainsi un sous-foncteur $IA : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Gr}$ de Aut . L'étude de ces groupes est d'une grande difficulté (voir [41], § 7, par exemple). Voici des foncteurs fondamentaux vers les groupes abéliens construits à partir de ceux-ci qu'on aimerait bien comprendre, au moins stablement :

1. les groupes d'homologie $H_n(IA) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$ (on connaît une réponse complète seulement pour $n \leq 1$);
2. les foncteurs $\gamma_n(IA)/\gamma_{n+1}(IA) : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$, où $\gamma_n : \mathbf{Gr} \rightarrow \mathbf{Gr}$ est le foncteur associant à un groupe le n -ème terme de sa suite centrale descendante (i.e. $\gamma_1(G) = G$ et $\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$);
3. la filtration (dite parfois de Johnson, mais due à Andreadakis [1]) $(\mathcal{A}_n(G))_{n \in \mathbb{N}}$ de $\text{Aut}(G)$ est définie par

$$\mathcal{A}_n(G) = \text{Ker}(\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G/\gamma_{n+1}(G))).$$

On a, en particulier, $\mathcal{A}_0(G) = \text{Aut}(G)$ et $\mathcal{A}_1(G) = IA(G)$. On obtient ainsi une suite décroissante de sous-groupes de $IA(G)$ fonctorielle en G ; elle est centrale, de sorte que $\gamma_n(IA) \subset \mathcal{A}_n$ et que $\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n+1}$ définit un foncteur $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

En fait, tous les foncteurs précédents se factorisent (à isomorphisme près, et de façon unique) par le foncteur canonique $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{ab})$ qui est l'abélianisation sur les objets (nous noterons encore, par abus, de la même façon les foncteurs $\mathbf{S}(\mathbf{ab}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ ainsi obtenus). Cela provient formellement de ce que les automorphismes intérieurs d'un objet de \mathcal{G} ont une action triviale sur tous ces foncteurs.

Le cas $n = 1$, dans lequel tous ces foncteurs coïncident, est le seul qu'on sache décrire de façon complète, grâce à l'isomorphisme fonctoriel

$$IA_{ab}(V) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(V, \Lambda^2(V)) \quad (V \in \text{Ob } \mathbf{S}(\mathbf{ab}))$$

(cf. par exemple [23], § 6). On en déduit que $IA_{ab} : \mathbf{S}(\mathbf{ab}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ est la composée des foncteurs $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{S}(\mathbf{ab}) \rightarrow \mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab}$ qui a un groupe abélien G associe (G, G) et $\text{Hom}(Id, \Lambda^2) : \mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Le premier foncteur est monoïdal fort et le second est fortement polynomial de degré 3. Par conséquent, IA_{ab} est fortement polynomial de degré fort 3 (et son image dans $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$ est également de degré 3) — ce qui est équivalent, bien sûr, aux mêmes propriétés pour $IA_{ab} : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

À partir de $n \geq 2$, la description de $H_n(IA)$ devient très largement inaccessible (pour $n = 2$, voir les résultats partiels de Pettet [28]). Dans un travail futur, on montrera que ces foncteurs ont tous une image polynomiale dans $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$, en s'inspirant des travaux de Putman [32] et de Church-Ellenberg-Farb-Nagpal [8]. Toutefois, déterminer le degré exact de ces objets semble un problème particulièrement délicat.

La compréhension partielle des deux autres familles de foncteurs est facilitée par les foncteurs de Lie : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose d'un foncteur $\mathcal{L}^n : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$ qui est polynomial de degré n (c'est un quotient non nul de la n -ème puissance tensorielle) et d'un épimorphisme $\mathcal{L}^n(G_{ab}) \rightarrow \gamma_{n-1}(G)/\gamma_n(G)$ naturel en le groupe G ; cet épimorphisme est un isomorphisme si G est libre (voir par exemple [10], § 3). Le foncteur $\mathcal{L}^{n+1}(IA_{ab})$ est obtenu par composition des foncteurs $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{S}(\mathbf{ab}) \rightarrow \mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab}$ et $\mathcal{L}^{n+1} \circ \text{Hom}(Id, \Lambda^2)$. Le premier foncteur

est monoïdal fort et le second est fortement polynomial de degré $3(n+1)$ d'après la proposition 1.9. On en déduit que le foncteur $\gamma_n(IA)/\gamma_{n+1}(IA)$, quotient de $\mathcal{L}^{n+1}(IA_{ab})$, est fortement polynomial de degré fort au plus $3(n+1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dispose d'un morphisme naturel injectif classique (dit parfois de Johnson)

$$(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n+1})(V) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(V, \mathcal{L}^{n+2}(V)) \quad (V \in \text{Ob } \mathbf{S}(\mathbf{ab}))$$

qui montre que

$$\text{deg}(\pi_{\mathbf{S}(\mathbf{ab})}(\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n+1})) \leq n + 3. \quad (2)$$

Une conjecture d'Andreadakis ([1]) énonce que l'inclusion $\gamma_n(IA) \subset \mathcal{A}_n$ est une égalité. Celle-ci a été récemment infirmée par Bartholdi [2], qui montre toutefois que le quotient prend ses valeurs dans les groupes *finis*. En particulier, si l'on tensorise nos foncteurs par \mathbb{Q} , $\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n+1}$ et $(\gamma_n/\gamma_{n+1})(IA)$ deviennent isomorphes. Satoh donne des renseignements précis sur les $GL(V)$ -modules $(\gamma_n/\gamma_{n+1})(IA)(V) \otimes \mathbb{Q}$ dans [33], qui montrent en particulier que

$$\text{deg}(\pi_{\mathbf{S}(\mathbf{ab})}((\gamma_n/\gamma_{n+1})(IA))) \geq \text{deg}(\pi_{\mathbf{S}(\mathbf{ab})}((\gamma_n/\gamma_{n+1})(IA) \otimes \mathbb{Q})) \geq n + 3.$$

En combinant cette inégalité avec (2), on en déduit donc que $\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n+1}$ est de degré $n + 3$. Ceci suggère que la majoration de $\text{deg}(\pi_{\mathbf{S}(\mathbf{ab})}((\gamma_n/\gamma_{n+1})(IA)))$ par $3(n+1)$ n'est probablement pas optimale ; la détermination de ce degré est une question non triviale. Malheureusement, les méthodes de Bartholdi ne semblent pas suffire pour le calculer exactement (sans rationalisation).

On notera que le caractère polynomial des foncteurs $(\gamma_n/\gamma_{n+1})(IA)$ est essentiellement équivalent au théorème 5.12 de [7] (par l'intermédiaire de la remarque 1.19).

Outre la détermination du degré, les notions introduites dans le présent article peuvent être appliquées pour comprendre de façon qualitative tous ces foncteurs (notamment, comprendre à quel point la conjecture d'Andreadakis est fautive) sans les déterminer entièrement, notamment en étudiant leurs images dans les catégories quotients $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})/\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$.

Une autre classe fondamentale d'exemples est donnée par l'homologie des groupes de congruences, qu'on discute maintenant brièvement.

Exemple 1.38. Soient I un anneau sans unité, $I_+ = \mathbb{Z} \oplus I$ l'anneau unitaire obtenu en ajoutant formellement une unité à I .

Dans la catégorie $\mathbf{S}(I_+)$ des I_+ -modules libres de rang fini avec monomorphismes scindés, le scindage étant donné dans la structure, on dispose d'un foncteur d'automorphismes $\text{Aut} : \mathbf{S}(I_+) \rightarrow \mathbf{Gr}$ (sur les objets, il associe simplement à un I_+ -module le groupe de ses automorphismes linéaires), ainsi que d'un foncteur $\text{Aut} \circ (\mathbb{Z} \otimes_{I_+} -) : \mathbf{S}(I_+) \rightarrow \mathbf{Gr}$. Notons Γ_I le foncteur noyau de la transformation naturelle $\text{Aut} \rightarrow \text{Aut} \circ (\mathbb{Z} \otimes_{I_+} -)$ induite par l'épimorphisme scindé d'anneaux $I_+ \twoheadrightarrow I_+/I \simeq \mathbb{Z}$. Ainsi, $\Gamma_I(I_+^n)$ n'est autre que le groupe de congruences $GL_n(I) := \text{Ker}(GL_n(I_+) \twoheadrightarrow GL_n(\mathbb{Z}))$. Cette situation est très analogue à celle discutée dans l'exemple précédent avec les groupes IA ; [11] donne un cadre général pour l'étude homologique de ce genre de groupes.

Du fait que la conjugaison par les éléments de $GL_n(I)$ opère trivialement sur $H_*(GL_n(I))$, ce groupe est muni d'une action naturelle de $GL_n(\mathbb{Z})$, de sorte

qu'on voit facilement que $H_*(\Gamma_I)$ se factorise de manière unique à isomorphisme près par le foncteur $\mathbf{S}(I_+) \rightarrow \mathbf{S}(\mathbb{Z}) = \mathbf{S}(\mathbf{ab})$. L'étude des foncteurs $\mathbf{S}(\mathbf{ab}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ ainsi obtenus (qu'on notera encore $H_*(\Gamma_I)$ par abus) constitue un problème profond et difficile, relié à la question de l'excision en K -théorie algébrique. On peut vérifier que l'anneau sans unité I est excisif en K -théorie algébrique si et seulement l'image de $H_n(\Gamma_I)$ dans $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$ est constante (i.e. dans $\mathcal{P}ol_0(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$). L'un des résultats principaux de l'article [37] de Suslin s'exprime, avec notre vocabulaire, comme suit : si $n > 0$ est un entier tel que $\mathrm{Tor}_i^{I+}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ pour $0 < i < n$, alors on dispose dans $\mathbf{Fct}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$ d'un morphisme

$$H_n(\Gamma_I(M)) \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M) \otimes \mathrm{Tor}_n^{I+}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$$

(pour $M \in \mathrm{Ob} \mathbf{S}(\mathbf{ab})$) dont noyau et conoyau sont stablement constants. En particulier, l'image de $H_n(\Gamma_I)$ dans $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$ est polynomiale de degré exactement $2n$ si $\mathrm{Tor}_n^{I+}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \neq 0$ (et $\mathrm{Tor}_i^{I+}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ pour $0 < i < n$). L'un des objectifs du travail [11] est de retrouver et généraliser ce résultat. Mais l'homologie de Γ_I au-delà de ce premier degré non excisif est très mystérieuse. Le résultat principal de Putman dans [32] équivaut à dire que, sous des hypothèses assez restrictives sur I (et en prenant l'homologie à coefficients dans un corps de caractéristique convenable), l'homologie $H_n(\Gamma_I)$ est polynomiale pour tout $n \in \mathbb{N}$; en utilisant des méthodes fonctorielles, Church, Ellenberg, Farb et Nagpal ont amélioré, dans [8], le résultat de Putman, mais dans un cadre encore assez restrictif, et surtout avec des bornes de degré clairement non optimales. Il semble très raisonnable de penser que ces foncteurs (ou plutôt leur image dans $\mathbf{St}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$) sont toujours polynomiaux.

2 L'adjoint à gauche de l'inclusion $\mathcal{M}on_{\mathrm{nul}} \hookrightarrow \mathcal{M}on_{\mathrm{ini}}$

Le but de cette section est de donner une description explicite de l'adjoint à gauche de l'inclusion $\mathcal{M}on_{\mathrm{nul}} \hookrightarrow \mathcal{M}on_{\mathrm{ini}}$ et d'en étudier le comportement sur les foncteurs polynomiaux.

Soit $(\mathcal{M}, \oplus, 0)$ un objet de $\mathcal{M}on$. On définit une catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}$ par :

1. $\mathrm{Ob} \widetilde{\mathcal{M}} = \mathrm{Ob} \mathcal{M}$;
2. $\widetilde{\mathcal{M}}(a, b) = \mathrm{colim}_{\mathcal{M}} \tau_b \mathcal{M}(a, -)$;
3. la composition $\widetilde{\mathcal{M}}(b, c) \times \widetilde{\mathcal{M}}(a, b) \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}(a, c)$ s'obtient en prenant la colimite sur les objets t et u de \mathcal{M} des fonctions

$$\mathcal{M}(b, c \oplus u) \times \mathcal{M}(a, b \oplus t) \xrightarrow{(-\oplus t)_* \times \mathrm{Id}} \mathcal{M}(b \oplus t, c \oplus u \oplus t) \times \mathcal{M}(a, b \oplus t) \xrightarrow{\circ} \mathcal{M}(a, c \oplus u \oplus t)$$

puis en appliquant la fonction

$$\mathrm{colim}_{(t,u) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}} \mathcal{M}(a, c \oplus u \oplus t) \rightarrow \mathrm{colim}_{s \in \mathcal{M}} \mathcal{M}(a, c \oplus s)$$

induite par le foncteur $\oplus : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

On vérifie aussitôt que $\widetilde{\mathcal{M}}$ est bien une catégorie et que \oplus induit une structure monoïdale symétrique dessus (encore notée de la même manière) dont 0 est l'unité. (Noter ici qu'on a besoin de la symétrie : cette structure est obtenue sur

les morphismes — disons $\widetilde{\mathcal{M}}(a, b) \times \widetilde{\mathcal{M}}(c, d) \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}(a \oplus c, b \oplus d)$ — à partir des fonctions

$$\mathcal{M}(a, b \oplus t) \times \mathcal{M}(c, d \oplus u) \rightarrow \mathcal{M}(a \oplus c, b \oplus t \oplus d \oplus u) \simeq \mathcal{M}(a \oplus c, b \oplus d \oplus t \oplus u)$$

où la première flèche est induite par \oplus et la dernière par l'isomorphisme structural $t \oplus d \simeq d \oplus t$, puis en prenant la colimite sur t et u .)

On remarque que, pour tout objet a de \mathcal{M} , l'ensemble $\widetilde{\mathcal{M}}(a, 0)$ est la colimite du foncteur $\mathcal{M}(a, -)$. Par le lemme de Yoneda, on en déduit que $\widetilde{\mathcal{M}}(a, 0)$ est l'ensemble à un élément. Autrement dit, 0 est toujours *objet final* de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}$. Il est clair également que, si 0 est objet initial de \mathcal{M} , alors il en est de même dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. Ainsi, si \mathcal{M} est objet de Mon_{ini} , alors $\widetilde{\mathcal{M}}$ est objet de Mon_{nul} .

On dispose d'un foncteur $\eta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ égal à l'identité sur les objets et donné sur les morphismes par l'application canonique

$$\mathcal{M}(a, b) = (\tau_b \mathcal{M}(a, -))(0) \rightarrow \operatorname{colim}_{\mathcal{M}} \tau_b \mathcal{M}(a, -) = \widetilde{\mathcal{M}}(a, b).$$

Ce foncteur est monoïdal (au sens strict).

Remarque 2.1. Si \mathcal{M} est la catégorie des espaces quadratiques (non dégénérés) de dimension finie sur le corps à deux éléments, la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}$ est équivalente à la catégorie notée \mathcal{T}_q dans les articles [40] et [39]. L'équivalence est l'identité sur les objets et associe à un morphisme de $\widetilde{\mathcal{M}}(A, B)$, représenté par un morphisme quadratique $f : A \rightarrow B \overset{\perp}{\oplus} H$ de \mathcal{M} , le morphisme $[A \xrightarrow{f} B \overset{\perp}{\oplus} H \leftrightarrow B]$ de \mathcal{T}_q (cf. [39], § 1 pour les notations), où la flèche de droite est l'inclusion canonique $B \hookrightarrow B \overset{\perp}{\oplus} H$. La remarque 1.2 de [39] permet de voir que c'est effectivement une équivalence.

On peut donner une description analogue de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}$, où \mathcal{M} est la catégorie des espaces quadratiques (ou symplectiques, hermitiens) non dégénérés sur un anneau quelconque, en termes de classes de triplets.

D'une manière générale, pour tout objet \mathcal{M} de Mon , on peut voir les foncteurs depuis $\widetilde{\mathcal{M}}$ comme des *foncteurs de Mackey généralisés* sur \mathcal{M} , suivant le même point de vue que [40].

Proposition 2.2. *Soit $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un morphisme de Mon_{ini} . On suppose que \mathcal{N} appartient à Mon_{nul} . Alors il existe un et un seul morphisme $\Psi : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{N}$ tel que $\Phi = \Psi \circ \eta_{\mathcal{M}}$.*

Démonstration. Le foncteur Ψ est défini comme suit : sur les objets, il coïncide avec Φ ; si $f : a \rightarrow b \oplus t$ est un morphisme de \mathcal{M} représentant un élément ξ de $\widetilde{\mathcal{M}}(a, b)$, Ψ envoie ξ sur

$$\Phi(a) \xrightarrow{\Phi(f)} \Phi(b \oplus t) = \Phi(b) \oplus \Phi(t) \rightarrow \Phi(b)$$

(où la deuxième flèche est le morphisme canonique déduit de ce que 0 est objet final de \mathcal{N}) — on vérifie aussitôt que cette flèche de \mathcal{N} ne dépend pas du choix du représentant f de ξ , puis que cette construction est compatible à la composition des morphismes de $\widetilde{\mathcal{M}}$ et aux unités. L'égalité $\Phi = \Psi \circ \eta_{\mathcal{M}}$ et le caractère monoïdal de Ψ sont clairs. L'unicité de Ψ découle de ce qu'un morphisme vérifiant les conditions de l'énoncé envoie nécessairement la flèche canonique $b \oplus t \rightarrow b$ de $\widetilde{\mathcal{M}}$ sur la flèche canonique $\Psi(b) \oplus \Psi(t) \rightarrow \Psi(b)$ de \mathcal{N} et de ce que $\widetilde{\mathcal{M}}$ est engendrée par \mathcal{M} et ces flèches canoniques. \square

Comme conséquence, pour tout morphisme $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$, il existe un et un seul morphisme $\tilde{\Phi} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{M}on_{\text{nul}}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{N} \\ \eta_{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \eta_{\mathcal{N}} \\ \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \tilde{\mathcal{N}} \end{array} .$$

Cela permet de faire de $\mathcal{M} \mapsto \tilde{\mathcal{M}}$ un foncteur $\mathcal{M}on_{\text{ini}} \rightarrow \mathcal{M}on_{\text{nul}}$; la proposition 2.2 peut se reformuler comme suit :

Corollaire 2.3. *Le foncteur $\mathcal{M} \mapsto \tilde{\mathcal{M}}$ est adjoint à gauche à l'inclusion $\mathcal{M}on_{\text{nul}} \hookrightarrow \mathcal{M}on_{\text{ini}}$.*

Remarque 2.4. On peut procéder de façon entièrement analogue pour l'inclusion dans $\mathcal{M}on$ de la sous-catégorie pleine des catégories monoïdales symétriques dont l'unité est objet final (qu'on n'aborde pas dans le présent article car, dans toutes les catégories qui nous intéressent, l'unité est objet initial).

La catégorie Θ est équivalente à $\tilde{\Sigma}^{op}$. En effet, en considérant deux entiers $n \leq m$ et en notant encore G la catégorie à un objet associée au groupe G on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(n, m) &= \text{colim}_{\Sigma} \tau_m(\Sigma(n, -)) = \text{colim}_{i \in \Sigma} \Sigma(n, i + m) = \text{colim}_{i \in \Sigma_{n-m}} \Sigma_n \\ &= (\Sigma_n)_{\Sigma_{n-m}} = \Sigma_n / \Sigma_{n-m} \simeq \Theta(m, n). \end{aligned}$$

Cela permet de vérifier la propriété universelle de l'exemple 1.13.1 à partir de celle (plus directe) de la remarque 1.1.

Proposition 2.5. *Soient \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{\text{ini}}$ et \mathcal{A} une catégorie possédant des colimites. La précomposition par $\eta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ possède un adjoint à gauche $\alpha_{\mathcal{M}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ donné sur les objets par*

$$(\alpha_{\mathcal{M}}(F))(x) = \text{colim}_{\mathcal{M}} \tau_x(F).$$

Démonstration. Expliquons d'abord comment faire de $\alpha_{\mathcal{M}}(F)$ tel que défini dans l'énoncé un foncteur de $\tilde{\mathcal{M}}$ vers \mathcal{A} . Si $j : x \rightarrow y \oplus u$ est un morphisme de \mathcal{M} , on vérifie aussitôt que le morphisme

$$(\alpha_{\mathcal{M}}(F))(x) = \text{colim}_{t \in \mathcal{M}} F(x \oplus t) \rightarrow \text{colim}_{t \in \mathcal{M}} F(y \oplus u \oplus t) \rightarrow \text{colim}_{t' \in \mathcal{M}} F(y \oplus t') = (\alpha_{\mathcal{M}}(F))(y),$$

où la première flèche est induite par j et la seconde par l'endofoncteur $u \oplus -$ de \mathcal{M} , ne dépend que de la classe de j dans

$$\text{colim}_{u \in \mathcal{M}} \mathcal{M}(x, y \oplus u) = \tilde{\mathcal{M}}(x, y).$$

Cela donne l'effet de $\alpha_{\mathcal{M}}(F)$ sur les morphismes de $\tilde{\mathcal{M}}$; on a ainsi défini un foncteur $\alpha_{\mathcal{M}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ qui commute aux colimites.

Pour tous objets A et a de \mathcal{A} et \mathcal{M} respectivement, le foncteur $A[\mathcal{M}(a, -)] : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ est envoyé par $\alpha_{\mathcal{M}}$ sur $A[\tilde{\mathcal{M}}(\eta_{\mathcal{M}}(a), -)]$. On en déduit le résultat par un argument formel classique (variation sur le lemme de Yoneda). \square

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de cette section.

Proposition 2.6. *Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} et \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les foncteurs $\eta_{\mathcal{M}}^* : \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $\alpha_{\mathcal{M}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $\mathcal{P}ol_n(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$.*

Démonstration. Les propositions 1.27 et 1.28 montrent que $\alpha_{\mathcal{M}}$ se factorise par $\pi_{\mathcal{M}}$ en un foncteur $\bar{\alpha} : \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$. Ce foncteur est le degré 0 d'un foncteur homologique $\bar{\alpha}_* : \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})_{gr}$ donné sur les objets par

$$\bar{\alpha}_*(F)(x) = h_*^{\mathcal{M}}(\tau_x(F)).$$

Notons $\bar{\eta} : \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ la composée de $\eta_{\mathcal{M}}^*$ et $\pi_{\mathcal{M}}$. Alors $\bar{\alpha}$ est adjoint à gauche à $\bar{\eta}$. Cette adjonction provient de celle entre $\alpha_{\mathcal{M}}$ et $\eta_{\mathcal{M}}^*$ et de l'observation suivante. Pour tous objets x et t de \mathcal{M} , l'image dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ du morphisme canonique $x \rightarrow t \oplus x$ est scindée *naturellement* puisque 0 est objet nul de $\widetilde{\mathcal{M}}$. On en déduit que, pour tous objets F de $\mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ et t de \mathcal{M} , la flèche

$$i_t(\eta_{\mathcal{M}}^*(F)) : \eta_{\mathcal{M}}^*(F) \rightarrow \tau_t(\eta_{\mathcal{M}}^*(F))$$

est un monomorphisme scindé. Par le lemme 1.26, on conclut que le morphisme

$$\text{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}(X, \eta_{\mathcal{M}}^*(F)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})}(\pi(X), \pi(\eta_{\mathcal{M}}^*(F)))$$

induit par $\pi_{\mathcal{M}}$ est, pour tous $X \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$, un isomorphisme, ce qui établit notre adjonction (à partir de celle de la proposition 2.5).

On note à présent que le foncteur $\bar{\eta}$ commute (à isomorphisme naturel près) aux foncteurs τ_t et δ_t , puisque c'est la composition de $\eta_{\mathcal{M}}^*$, précomposition par un foncteur monoïdal, et de $\pi_{\mathcal{M}}$, qui commute également à ces foncteurs. Il en est de même pour les foncteurs $\bar{\alpha}_i$: la commutation aux foncteurs τ_t est claire ; pour δ_t , considérer la suite exacte longue obtenue en appliquant $\bar{\alpha}_*$ à la suite exacte courte $0 \rightarrow \text{Id} \rightarrow \tau_t \rightarrow \delta_t \rightarrow 0$ d'endofoncteurs de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$.

Ces propriétés de commutation montrent que $\bar{\eta}$ et $\bar{\alpha}_*$ envoient un objet polynomial de degré au plus n sur un objet polynomial de degré au plus n . Comme $\bar{\eta}$ est exact, il induit par conséquent des foncteurs (exacts)

$$E_n : \mathcal{P}ol_n(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A}).$$

On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ les assertions suivantes :

1. pour $i > 0$, les foncteurs $\bar{\alpha}_i$ envoient $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ dans $\mathcal{P}ol_{n-1}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$, ce qui implique que le foncteur exact à droite $\bar{\alpha}_0$ induit un foncteur exact

$$A_n : \mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{P}ol_n(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A}) ;$$

2. les foncteurs A_n et E_n sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Pour $n = 0$, on utilise la proposition 1.33 : comme l'homologie réduite de la catégorie \mathcal{M} à coefficients constants est nulle (puisque \mathcal{M} possède un objet initial), on a $\bar{\alpha}_i(X) = 0$ pour $i > 0$ et X polynomial de degré 0. Il est également clair que A_0 et E_0 sont des équivalences mutuellement quasi-inverses, l'effet de $\alpha_{\mathcal{M}}$ et $\eta_{\mathcal{M}}^*$ sur les foncteurs constants étant transparent.

Supposons désormais $n > 0$ et les assertions vérifiées pour $n - 1$. Pour $i > 0$, l'inclusion $\bar{\alpha}_i(\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})) \subset \mathcal{P}ol_{n-2}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ et la commutation de $\bar{\alpha}_i$ aux foncteurs différences δ_x observée plus haut impliquent que $\bar{\alpha}_i$ envoie $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ dans $\mathcal{P}ol_{n-1}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$. On raisonne de même avec l'unité $\text{Id} \rightarrow \bar{\eta}\bar{\alpha}_0$ et la coïunité $\bar{\alpha}_0\bar{\eta} \rightarrow \text{Id}$ de l'adjonction : elles commutent aux foncteurs différences, et leurs noyaux et conoyaux sont polynomiaux de degré au plus $n - 2$ sur les objets polynomiaux de degré au plus $n - 1$ (c'est ce que signifie que A_{n-1} et E_{n-1} sont des équivalences mutuellement quasi-inverses). Par conséquent, comme les foncteurs différences de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $\mathbf{Fct}(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ commutent également aux foncteurs différences, ces noyaux et conoyaux envoient les objets polynomiaux de degré au plus n sur des objets polynomiaux de degré au plus $n - 1$. Cela termine la démonstration. \square

Exemple 2.7. Un cas particulier du théorème de Pirashvili à la Dold-Kan (cf. [30]) montre que $\mathbf{Fct}(\tilde{\Theta}, \mathcal{A}) \simeq \mathbf{Fct}(\Sigma, \mathcal{A}) \simeq \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Fct}(\Sigma_n, \mathcal{A})$ pour toute catégorie abélienne \mathcal{A} , l'équivalence étant fournie à l'aide d'effets croisés. Ce résultat apparaît également dans [7] (théorème 2.24). En effet, la catégorie $\tilde{\Theta}$ est équivalente à la catégorie $\text{FI}\#$ de [7] des ensembles finis avec injections partiellement définies (catégorie qui apparaît également dans [9], où elle est notée Θ , avec des considérations d'effets croisés analogues) : l'équivalence est l'identité sur les objets et associe à un morphisme $f \in \tilde{\Theta}(A, B)$, représenté par une fonction injective (partout définie) $u : A \rightarrow B \sqcup E$, l'injection partielle de A vers B définie sur $u^{-1}(A)$ coïncidant avec f .

On peut d'ailleurs remarquer que les considérations classiques sur la combinatoire élémentaire des effets croisés données au paragraphe 1.1 relèvent uniquement de la catégorie $\tilde{\Theta}$ (et elles permettraient de démontrer assez rapidement l'équivalence ci-dessus).

Par conséquent, on déduit de la proposition 2.6 des équivalences de catégories

$$\mathcal{P}ol_n(\Theta, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\Theta, \mathcal{A}) \simeq \mathcal{P}ol_n(\tilde{\Theta}, \mathcal{A})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\tilde{\Theta}, \mathcal{A}) \simeq \mathbf{Fct}(\Sigma_n, \mathcal{A}).$$

En revanche, contrairement à $\mathcal{P}ol_n(\tilde{\Theta}, \mathcal{A})$, $\mathcal{P}ol_n(\Theta, \mathcal{A})$ ne se décrit pas simplement à partir des seules représentations (dans \mathcal{A}) des groupes symétriques Σ_i pour $i \leq n$.

Remarque 2.8. L'image par $\eta_{\mathcal{M}}^*$ d'un foncteur polynomial de degré d est un foncteur *fortement* polynomial dont le degré fort est égal à d . La proposition 2.6 tempère donc en quelque sorte le phénomène observé dans la remarque 1.35 : elle implique que tout objet polynomial de degré d de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est isomorphe *modulo* $\mathcal{P}ol_{d-1}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ à l'image par le foncteur $\pi_{\mathcal{M}}$ d'un foncteur fortement polynomial de degré fort d . Ainsi, l'objet $\pi_{\Theta}(F)$ de $\mathbf{St}(\Theta, \mathbf{Ab})$, considéré dans l'exemple 1.34 qui est polynomial de degré 1, est isomorphe, modulo $\mathcal{P}ol_{d-1}(\Theta, \mathbf{Ab})$ à $\pi_{\Theta}(P)$ (P est fortement polynomial de degré 1 puisque $\delta_1(P) \simeq \mathbb{Z}$.)

La variation suivante de la proposition 2.6 nous sera également utile.

Proposition 2.9. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} , \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck, $n \in \mathbb{N}$. La catégorie $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est la plus petite sous-catégorie pleine \mathcal{C}_n de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ contenant l'image de $\mathcal{P}ol_n(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ par $\pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{M}}^*$ et vérifiant les deux conditions suivantes :

1. pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, si B et C appartiennent à \mathcal{C}_n , alors A appartient à \mathcal{C}_n ;
2. pour toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, si A et C appartiennent à \mathcal{C}_n , alors B appartient à \mathcal{C}_n .

Démonstration. La sous-catégorie $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ est épaisse (proposition 1.36), elle vérifie donc les conditions de stabilité de l'énoncé, et contient l'image de $\mathcal{P}ol_n(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ par $\pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{M}}^*$ puisque ce foncteur préserve le degré polynomial. Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur n : la proposition 2.6 montre que, pour tout objet X de $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{M}, \mathcal{A})$, les noyau N et conoyau C de l'unité $u : X \rightarrow \pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{M}}^*(Y)$, où $Y := \bar{\alpha}(X)$ (cf. les notations de la démonstration de la proposition 1.36), sont de degré au plus $n - 1$, ils appartiennent donc, par l'hypothèse de récurrence, à la sous-catégorie $\mathcal{C}_{n-1} \subset \mathcal{C}_n$. Les suites exactes courtes

$$0 \rightarrow D \rightarrow \pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{M}}^*(X) \rightarrow C \rightarrow 0,$$

où D est l'image de u , et

$$0 \rightarrow N \rightarrow X \rightarrow D \rightarrow 0$$

permettent donc de conclure. \square

Remarque 2.10. On ne peut pas se contenter de la stabilité par noyaux dans la proposition précédente. En effet, il peut exister des objets X de $\mathbf{St}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pour lesquels l'unité $X \rightarrow \pi_{\mathcal{M}}\eta_{\mathcal{M}}^*\bar{\alpha}(X)$ n'est pas un monomorphisme. Donnons un exemple d'un tel foncteur pour $\mathcal{M} = \Theta$ et \mathcal{A} égale à la catégorie des espaces vectoriels sur \mathbb{F}_2 .

Notons $P_2 := \mathbb{F}_2[\Theta(\mathbf{2}, -)]$ et $A := \mathbb{F}_2[\Theta(\mathbf{2}, -)/\Sigma_2]$. Il existe une unique (à isomorphisme près) suite exacte courte non scindée

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0 ;$$

le foncteur F peut être construit comme la somme amalgamée des morphismes $\nu : A \hookrightarrow P_2$ (donné par la norme, dont le conoyau est également isomorphe à A) et de l'augmentation $A \rightarrow \mathbb{F}_2$ (qui est surjective dans $\mathbf{St}(\Theta, \mathcal{A})$). On en déduit un diagramme cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \alpha(A) & \longrightarrow & \alpha(P_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha(\mathbb{F}_2) & \longrightarrow & \alpha(F) \end{array}$$

dont on vérifie facilement qu'il est isomorphe à

$$\begin{array}{ccc} A \oplus \mathbb{F}_2[-] \oplus \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & P_2 \oplus \mathbb{F}_2[-]^{\oplus 2} \oplus \mathbb{F}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & A \oplus \mathbb{F}_2[-] \oplus \mathbb{F}_2 \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure est la somme directe de ν , de l'inclusion diagonale $\mathbb{F}_2[-] \rightarrow \mathbb{F}_2[-]^{\oplus 2}$ et du morphisme nul $\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ et la flèche verticale de gauche la projection évidente ; la flèche horizontale inférieure est *nulle*. Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \eta^* \alpha(\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{0} & \eta^* \alpha(F) \end{array}$$

dont la flèche horizontale du haut est l'inclusion et les flèches verticales sont les unités montre donc que $F \rightarrow \eta^* \alpha(F)$ n'est pas injective (même dans $\mathbf{St}(\Theta, \mathcal{A})$).

3 Classification des foncteurs polynomiaux sur les espaces hermitiens

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soient \mathcal{A} une petite catégorie additive munie d'un foncteur de dualité $D : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{A}$ et $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ la catégorie des objets hermitiens associés à la situation. On a une équivalence de catégories*

$$\mathcal{P}ol_n(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{B}) / \mathcal{P}ol_{n-1}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) / \mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute catégorie de Grothendieck \mathcal{B} .

Pour ce faire, nous donnons dans la proposition 3.2 un critère abstrait permettant de comparer les foncteurs polynomiaux sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ et sur \mathcal{A} pour \mathcal{M} un objet de $\mathcal{M}on_{ini}$ et \mathcal{A} un objet de $\mathcal{M}on_{nul}$ reliés par une flèche $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ de $\mathcal{M}on_{ini}$. Nous appliquons ensuite ce critère aux espaces hermitiens pour obtenir dans la proposition 3.8 une description des foncteurs polynomiaux sur $\widetilde{\mathbf{H}(\mathcal{A})}$. En combinant cette proposition au résultat de la section 2 on en déduit le théorème 3.1.

3.1 Un critère abstrait

Dans ce paragraphe, nous donnons un résultat technique permettant de comparer certaines catégories de foncteurs polynomiaux. La preuve de ce résultat nécessite de considérer des catégories sans unités baptisées semi-catégories dans [27, § 4], et dont on rappelle ici brièvement les aspects qui seront utiles dans cet article.

Une *semi-catégorie* \mathcal{C} est définie de la même manière qu'une catégorie mis à part l'existence de morphismes identités. Ainsi, pour C un objet de \mathcal{C} , l'ensemble $\mathcal{C}(C, C)$ peut être vide. Une *sous-semi-catégorie* \mathcal{C}' d'une catégorie est par définition une semi-catégorie vérifiant les mêmes conditions qu'une sous-catégorie, à l'exception de l'appartenance des morphismes identités à \mathcal{C}' . Une sous-semi-catégorie est dite *idéale* si elle est stable par composition à droite et à gauche par des morphismes arbitraires. Un *semi-foncteur* entre semi-catégories vérifie les mêmes conditions qu'un foncteur, excepté la préservation des identités.

Proposition 3.2. Soient \mathcal{M} un objet de Mon_{ini} , \mathcal{A} un objet de Mon_{mul} , $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ une flèche de Mon_{ini} et \mathcal{C} une sous-catégorie monoïdale de \mathcal{A} . On fait les hypothèses suivantes :

1. \mathcal{C} contient toutes les flèches $0 \rightarrow a$ de \mathcal{A} (en particulier, \mathcal{C} a les mêmes objets que \mathcal{A}) ; plus généralement, appartient à \mathcal{C} tout morphisme $a \rightarrow b \oplus c$ de \mathcal{A} dont la composée avec la projection canonique $b \oplus c \rightarrow b$ ou $b \oplus c \rightarrow c$ appartient à \mathcal{C} ;
2. pour tout objet a de \mathcal{A} , il existe un objet x de \mathcal{A} tel que $a \oplus x$ appartienne à l'image essentielle de Φ ;
3. Φ est à valeurs dans \mathcal{C} ;
4. pour tout morphisme $f : x \rightarrow y$ de \mathcal{M} , il existe un objet z et un morphisme $g : y \rightarrow x \oplus z$ de \mathcal{M} tels que $g \circ f$ soit égal au morphisme canonique $x \rightarrow x \oplus z$;
5. pour tous objets a, b de \mathcal{M} et tout morphisme $f : \Phi(a) \rightarrow \Phi(b)$ de \mathcal{A} , il existe un objet t et un morphisme $\varphi : a \rightarrow b \oplus t$ de \mathcal{M} tels que la composée

$$\Phi(a) \xrightarrow{\Phi(\varphi)} \Phi(b \oplus t) = \Phi(b) \oplus \Phi(t) \rightarrow \Phi(b)$$

(où la deuxième flèche est le morphisme canonique) soit égale à f et que la composée

$$\Phi(a) \xrightarrow{\Phi(\varphi)} \Phi(b \oplus t) = \Phi(b) \oplus \Phi(t) \rightarrow \Phi(t)$$

appartienne à \mathcal{C} .

De plus, si $\varphi' : a \rightarrow b \oplus t'$ est un autre morphisme possédant la même propriété, alors il existe un objet u et des morphismes $\psi : t \rightarrow u$, $\psi' : t' \rightarrow u$ de \mathcal{M} tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\varphi} & b \oplus t \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow b \oplus \psi \\ b \oplus t' & \xrightarrow{b \oplus \psi'} & b \oplus u \end{array}$$

commute.

Alors la précomposition par le prolongement $\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$ de Φ donné par la proposition 2.2 induit une équivalence de catégories

$$\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_n(\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{B})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute catégorie additive \mathcal{B} où les idempotents se scindent.

Démonstration. La sous-catégorie \mathcal{A}' de \mathcal{A} image essentielle de Φ est telle que l'inclusion $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ induit des équivalences de catégories $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$ et $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \simeq \mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}', \mathcal{B})$ pour tout n , d'après l'hypothèse 2, de sorte que, quitte à remplacer \mathcal{A} par \mathcal{A}' , on peut renforcer cette hypothèse en supposant que Φ est essentiellement surjectif.

Notons $\hat{\mathcal{A}}$ la sous-semi-catégorie de $\widetilde{\mathcal{M}}$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes $a \rightarrow b$ sont les classes dans $\widetilde{\mathcal{M}}$ des morphismes $f : a \rightarrow b \oplus t$ de \mathcal{M} tels que la composée

$$\Phi(a) \xrightarrow{\Phi(f)} \Phi(b \oplus t) = \Phi(b) \oplus \Phi(t) \rightarrow \Phi(t)$$

appartienne à \mathcal{C} . On note que cette condition ne dépend que de la classe de f dans $\widetilde{\mathcal{M}}(a, b)$, puisque \mathcal{C} est monoïdale et contient les flèches dans l'image de Φ (hypothèse 3). En utilisant les hypothèses 3 et 1, on voit que $\hat{\mathcal{A}}$ est une sous-semi-catégorie idéale de $\widetilde{\mathcal{M}}$. L'hypothèse 5 montre que le semi-foncteur

$$\hat{\mathcal{A}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{A}$$

composé de l'inclusion et du prolongement de Φ donné par la proposition 2.2 est pleinement fidèle. Comme il est également essentiellement surjectif par l'hypothèse faite en début de démonstration, il s'en suit que la catégorie \mathcal{A} est équivalente au quotient de $\widetilde{\mathcal{M}}$ par les relations $h_x = 1_x$ (pour tout $x \in \text{Ob } \mathcal{M}$), où h_x est l'idempotent de $\widetilde{\mathcal{M}}(x, x)$ obtenu par l'hypothèse 5 à partir de l'identité de $\Phi(x)$.

Par conséquent, pour conclure, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, dans la catégorie préadditive $\mathbb{Z}[\widetilde{\mathcal{M}}]$, les flèches $h_x - 1_x$ appartiennent à l'idéal \mathcal{I}^n engendré par les $e_n(x_1, \dots, x_n)$ pour tous objets x_1, \dots, x_n de $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Pour cela, on note que l'hypothèse 5 entraîne (par récurrence sur n) l'existence, pour tout $x \in \text{Ob } \widetilde{\mathcal{M}}$ d'un morphisme $f : x \rightarrow x_1 \oplus \dots \oplus x_n$ de \mathcal{M} tel que chaque composée

$$\Phi(x) \xrightarrow{\Phi(f)} \Phi(x_1 \oplus \dots \oplus x_n) = \Phi(x_1) \oplus \dots \oplus \Phi(x_n) \twoheadrightarrow \Phi(x_i)$$

appartienne à \mathcal{C} , ce qui implique (par l'hypothèse 1) que, pour toute partie non vide I de \mathbf{n} , la composée

$$\Phi(x) \xrightarrow{\Phi(f)} \Phi(x_1 \oplus \dots \oplus x_n) \twoheadrightarrow \bigoplus_{i \in I} \Phi(x_i)$$

appartient également à \mathcal{C} . Donc $\epsilon_J(x_1, \dots, x_n).f$ appartient à $\hat{\mathcal{A}}$, soit

$$\epsilon_J(x_1, \dots, x_n).f.(h_x - 1_x) = 0,$$

pour toute partie *stricte* J de \mathbf{n} . Par suite, comme $\epsilon_{\mathbf{n}}(x_1, \dots, x_n) = 1$,

$$f.(h_x - 1_x) = \sum_{J \subset \mathbf{n}} (-1)^{n-|J|} \epsilon_J(x_1, \dots, x_n).f.(h_x - 1_x) = e_n(x_1, \dots, x_n).f.(h_x - 1_x) \in \mathcal{I}^n$$

Par ailleurs, l'hypothèse 4 montre que tout morphisme de \mathcal{M} devient inversible à gauche, comme les morphismes canoniques $t \rightarrow t \oplus u$, dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. La relation précédente implique donc $h_x - 1_x \in \mathcal{I}^n$, ce qui termine la démonstration. \square

3.2 Application aux catégories d'objets hermitiens

On commence par rappeler la définition d'une catégorie additive à dualité qui est le cadre classique pour traiter la théorie générale des formes hermitiennes ou symplectiques. Ces rappels sont issus de [24], chap. II, § 2 et de [12], § 4 dont on suit de près la terminologie.

Soit \mathcal{A} une petite catégorie additive. Un *foncteur de dualité* sur \mathcal{A} est un foncteur $D : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathcal{A}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. D est auto-adjoint : on dispose d'isomorphismes naturels

$$\sigma_{X,Y} : \mathcal{A}(X, DY) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(Y, DX) ;$$

2. D est symétrique (i.e. $\sigma_{Y,X} = \sigma_{X,Y}^{-1}$);
3. l'unité $\text{Id}_{\mathcal{A}} \rightarrow D^2$ (qui coïncide avec la coïunité par symétrie) est un isomorphisme (en particulier, D est une équivalence de catégories).

On notera \bar{a} pour $\sigma_{X,Y}(a)$, où $a \in \mathcal{A}(X, DY)$.

Exemple 3.3. (Cas fondamental) Soit A un anneau muni d'une involution (i.e. un anti-automorphisme de A). On note $\mathbf{P}(A)$ (un squelette de) la catégorie des A -modules à gauche projectifs de type fini. Pour tout A -module à gauche M , l'involution de A permet de munir le groupe abélien $\text{Hom}_A(M, A)$ d'une action naturelle à gauche de A . Par conséquent, $D = \text{Hom}_A(-, A)$ est un foncteur de dualité sur $\mathbf{P}(A)$.

Soient $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et \mathbb{Z}_ε la représentation \mathbb{Z} de $\mathbb{Z}/2$ avec action de l'élément non trivial par ε . On note $TD^2 : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ le foncteur $\mathcal{A}^{op} \xrightarrow{(\text{Id}, D)} \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}} \mathbf{Ab}$ qui est muni d'une action de $\mathbb{Z}/2$ induite par l'involution $\sigma_{X,X}$ de $\mathcal{A}(X, DX)$. On en définit un sous-foncteur ΓD_ε^2 et un quotient SD_ε^2 par :

$$\Gamma D_\varepsilon^2 = \text{Hom}_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{Z}_\varepsilon, TD^2) \quad \text{et} \quad SD_\varepsilon^2 = \mathbb{Z}_\varepsilon \otimes_{\mathbb{Z}/2} TD^2.$$

On note $\bar{S}D_\varepsilon^2$ l'image du morphisme de norme $N : SD_\varepsilon^2 \rightarrow \Gamma D_\varepsilon^2$ défini par $N(1 \otimes x) = x + \varepsilon \bar{x}$. On suppose que $T : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est l'un des foncteurs SD_ε^2 ou $\bar{S}D_\varepsilon^2$. On note \mathcal{A}^T la catégorie d'éléments associée à T (ou plutôt à sa composée avec le foncteur d'oubli vers les ensembles) et $\pi^T : \mathcal{A}^T \rightarrow \mathcal{A}$ le foncteur d'oubli.

La sous-catégorie pleine $\mathbf{H}^T(\mathcal{A})$ (on omettra souvent l'exposant T) formé des objets (A, u) pour lesquels l'image de $u \in T(A)$ dans $\mathcal{A}(A, DA)$ est inversible est la catégorie des *objets hermitiens* associés à la situation (\mathcal{A}^T étant la catégorie des objets hermitiens éventuellement dégénérés).

Exemple 3.4. (Suite du cas fondamental) Soit A un anneau muni d'une involution et $\mathbf{P}(A)$ la catégorie additive munie de la dualité introduite à l'exemple 3.3. Si M est un objet de $\mathbf{P}(A)$, un élément de $SD_\varepsilon^2(M)$ est une forme hermitienne sur M (éventuellement dégénérée; si A est commutatif et l'involution triviale c'est donc une forme quadratique) et un élément de $\bar{S}D_{-1}^2(M)$ est une forme symplectique (éventuellement dégénérée).

Remarque 3.5. Soit \mathcal{A} une petite catégorie additive. La catégorie additive $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$ possède une dualité naturelle, donnée par l'échange des deux facteurs du produit cartésien. La catégorie $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ (définie dans l'exemple 1.13.3) s'identifie à $\mathbf{H}(\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A})$.

Les catégories \mathcal{A}^T et $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ sont munies de la structure monoïdale symétrique donnée par la somme orthogonale (la somme de (A, x) et (B, y) est $A \oplus B$ muni de l'image de (x, y) par le morphisme canonique $T(A) \oplus T(B) \rightarrow T(A \oplus B)$); ainsi \mathcal{A}^T et $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ sont des objets de Mon_{ini} et les foncteurs d'inclusion $\mathbf{H}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{A}^T$ et $\pi^T : \mathcal{A}^T \rightarrow \mathcal{A}$ sont des flèches de Mon_{ini} .

Notation 3.6. On note $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie de \mathcal{A} ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les monomorphismes scindables de \mathcal{A} .

Pour appliquer la proposition 3.2, on utilisera le résultat élémentaire suivant (qui est partiellement contenu dans le lemme 5.2 de [12], par exemple).

Lemme 3.7. 1. Soit A un objet de \mathcal{A}^T . Il existe un morphisme $\varphi : A \rightarrow H$ de \mathcal{A}^T dont le but H appartient à $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ et dont l'image par π^T appartient à $\mathbf{M}(\mathcal{A})$. De plus, si $f : A \rightarrow E$ est un autre morphisme possédant ces propriétés, on peut trouver un morphisme $g : H \rightarrow E \oplus H$ de $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & H \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ E & \longrightarrow & E \oplus H \end{array}$$

commute, où la flèche horizontale inférieure est l'inclusion canonique.

2. Soient A et B deux objets de $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ et $u \in \mathcal{A}(\pi^T(A), \pi^T(B))$. Il existe $H \in \text{Ob } \mathbf{H}(\mathcal{A})$ et $\varphi \in \mathbf{H}(\mathcal{A})(A, B \oplus H)$ dont la composante $A \rightarrow B$ (dans \mathcal{A}) est u et dont la composante $A \rightarrow H$ est dans $\mathbf{M}(\mathcal{A})$. De plus, si $\psi \in \mathbf{H}(\mathcal{A})(A, B \oplus E)$ est un autre morphisme possédant ces propriétés, on peut trouver un morphisme $g \in \mathbf{H}(\mathcal{A})(H, E \oplus H)$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \oplus H \\ \psi \downarrow & & \downarrow B \oplus g \\ B \oplus E & \longrightarrow & B \oplus E \oplus H \end{array}$$

de $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ commute, où la flèche horizontale inférieure est l'inclusion canonique.

Démonstration. Pour la première assertion, on prend pour H l'espace hyperbolique associé à $V = \pi^T(A)$, c'est-à-dire $V \oplus DV$ muni de l'élément de

$$T(V \oplus DV) \simeq T(V) \oplus T(DV) \oplus \mathcal{A}(DV, DV)$$

dont les composantes sont nulles dans $T(V)$ et $T(DV)$ et dont la dernière composante est 1_{DV} (c'est un objet de $\mathbf{H}(\mathcal{A})$) : l'élément de $\mathcal{A}(V \oplus DV, D(V \oplus DV)) \simeq \mathcal{A}(V \oplus DV, DV \oplus V)$ associé a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$. Si $r \in \mathcal{A}(V, DV)$ est un relevé de l'élément de $T(V)$ qui définit la structure hermitienne (éventuellement dégénérée) sur A , alors le morphisme $V \rightarrow V \oplus DV$ de \mathcal{A} dont les composantes sont 1_V et r appartient à $\mathbf{M}(\mathcal{A})$, il définit un morphisme $\varphi : A \rightarrow H$ de \mathcal{A}^T .

Supposons maintenant que $f : A \rightarrow E$ est un autre morphisme de \mathcal{A}^T ayant les propriétés requises. On définit $g \in \mathcal{A}(V \oplus DV, \pi^T(E) \oplus V \oplus DV)$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} f - \alpha r & \alpha \\ -\beta r & \beta \\ -r & 1_{DV} \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathcal{A}(DV, \pi^T(E))$ est tel que $\bar{\alpha} s f = 1_V$, s désignant l'élément de $\mathcal{A}(E, DE)$ associé à la forme hermitienne sur E (un tel β existe car s est un isomorphisme et f un monomorphisme scindé) et $\beta \in \mathcal{A}(DE, E)$ est le dual d'un relèvement de $-\alpha^* s$ (i.e. $-\alpha^* s = \bar{\beta} + \epsilon \beta$). On vérifie par un calcul facile que g définit un

morphisme $H \rightarrow E \oplus H$ de $\mathbf{H}(\mathcal{A})$; de plus, il est clair que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi^T(\varphi)} & V \oplus DV \\ \pi^T(f) \downarrow & & \downarrow g \\ \pi^T(E) & \longrightarrow & \pi^T(E) \oplus V \oplus DV \end{array}$$

de \mathcal{A} commute, ce qui termine l'établir la première partie du lemme.

Le deuxième point découle du premier, qu'on applique à $\pi^T(A)$ muni de l'élément $\xi - u^*\zeta$ de $T(A)$, où $\xi \in \mathcal{A}(A, DA)$ (resp. $\zeta \in \mathcal{A}(B, DB)$) est la forme hermitienne sur A (resp. B). \square

Combiné au résultat général de la proposition 3.2, le lemme permet facilement d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 3.8. *Le foncteur $\pi^T : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{P}ol_n(\widetilde{\mathbf{H}(\mathcal{A})}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute catégorie additive \mathcal{B} où les idempotents se scindent.

Démonstration. On établit que les hypothèses de la proposition 3.2 sont vérifiées pour le foncteur monoïdal $\Phi = \pi^T : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ et la sous-catégorie $\mathcal{C} = \mathbf{M}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} . La propriété 1 est évidente; la propriété 2 résulte de ce que tout objet de \mathcal{A} du type $V \oplus DV$ porte une forme hermitienne non dégénérée (par exemple hyperbolique — cf. démonstration du lemme 3.7). La propriété 3 découle immédiatement de ce que les espaces hermitiens considérés dans $\mathbf{H}(\mathcal{A})$ sont non dégénérés; la propriété 4 en est également une conséquence classique et facile (cf. par exemple la proposition 4.6 de [12]). Quant à l'hypothèse 5 de la proposition 3.2, elle est satisfaite d'après le lemme 3.7. \square

Remarque 3.9. La proposition précédente est une généralisation du théorème 4.5 obtenu par le second auteur dans [39] sur la classification des foncteurs polynomiaux sur les espaces quadratiques. En effet, pour $\mathcal{A} = \mathcal{E}^f$ (la catégorie des \mathbb{F}_2 -espaces vectoriels de dimension finie), on a $\mathbf{H}^{SD_1^2}(\mathcal{E}^f) = \mathcal{E}_q$ (la catégorie des espaces quadratiques (non dégénérés) de dimension finie sur le corps \mathbb{F}_2) et $\widetilde{\mathbf{H}^{SD_1^2}(\mathcal{E}^f)} = \mathcal{T}_q$ (voir la remarque 2.1). Ainsi, la proposition précédente fournit la reformulation suivante du théorème 4.5 de [39] : $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{T}_q, \mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_n(\mathcal{E}^f, \mathcal{B})$. Alors que la preuve de ce théorème donnée dans [39] s'appuyait sur une classification des foncteurs simples de la catégorie des foncteurs de source \mathcal{T}_q , on remplace ici cet argument par une généralisation du théorème 2.6 de [39] où on montre que le cran 0 de la filtration des projectifs standard introduite dans cet article se scinde.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal du présent travail.

Théorème 3.10. *Le foncteur $\pi^T : \mathbf{H}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{B}) / \mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}ol_n(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{B}) / \mathcal{P}ol_{n-1}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{B})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute catégorie de Grothendieck \mathcal{B} .

Démonstration. Combiner les propositions 2.6 et 3.8. □

La catégorie $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est bien comprise : si \mathcal{A} est la catégorie des modules à gauche projectifs de type fini sur un anneau A , par exemple, et \mathcal{B} la catégorie des groupes abéliens, cette catégorie quotient est équivalente à la catégorie des modules à droite sur l'algèbre de groupe tordue du groupe symétrique Σ_n sur l'anneau $A^{\otimes n}$ (le produit tensoriel étant pris sur \mathbb{Z} ; l'algèbre de groupe est tordue par l'action du groupe symétrique par permutation des facteurs du produit tensoriel) — cf. [29]. Dans le cas général, $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})/\mathcal{P}ol_{n-1}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est équivalente à la catégorie des n -multifoncteurs sur \mathcal{A} à valeurs dans \mathcal{B} qui sont additifs par rapport à chacune des n variables, l'effet croisé cr_n procurant l'équivalence.

En utilisant également la proposition 2.9, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.11. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la catégorie $\mathcal{P}ol_n(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{B})$ est la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathbf{St}(\mathbf{H}(\mathcal{A}), \mathcal{B})$ contenant l'image de $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ par le foncteur $\pi_{\mathbf{H}(\mathcal{A})}(\pi^T)^*$ de $\mathcal{P}ol_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et stable par noyaux d'épimorphismes et extensions.*

Exemple 3.12. Revenons aux foncteurs

$$F_n := (\mathcal{A}_n/\mathcal{A}_{n+1}) \otimes \mathbb{Q} \simeq (\gamma_n/\gamma_{n+1})(IA) \otimes \mathbb{Q}$$

de $\mathbf{Fct}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}), \mathbf{Ab})$ dont on a discuté dans l'exemple 1.37. Le résultat principal de [33] procure une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \pi_{\mathbf{S}(\mathbf{ab})}(F_n) \rightarrow \pi_{\mathbf{S}(\mathbf{ab})}(\Delta_{\mathbb{Z}}^* A_n \otimes \mathbb{Q}) \rightarrow \pi_{\mathbf{S}(\mathbf{ab})}(\Delta_{\mathbb{Z}}^* B_n \otimes \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

où $\Delta_{\mathbb{Z}} : \mathbf{S}(\mathbf{ab}) \rightarrow \mathbf{ab}^{op} \times \mathbf{ab}$ est le foncteur défini à la page 21 et

$$A_n(U, V) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(U, \mathcal{L}^{n+2}(V)) \quad \text{et} \quad B_n(U, V) = (V^{\otimes(n+1)})_{\mathbb{Z}/(n+1)}$$

(où le groupe cyclique opère sur la puissance tensorielle par permutation circulaire).

Nous terminons cette section en montrant comment le théorème 3.10 permet de généraliser un résultat sur l'homologie rationnelle des groupes linéaires qui découle des résultats de Scorichenko [36] (voir aussi [12]). Si A est un anneau, on note $\mathbf{S}(A)$ pour $\mathbf{S}(\mathbf{P}(A))$ (catégorie des A -modules à gauche projectifs de type fini avec monomorphismes scindés).

Théorème 3.13. *Soient A un sous-anneau d'une extension algébrique du corps \mathbb{Q} des nombres rationnels et $F : \mathbf{S}(A) \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Vect}$ un foncteur polynomial. Alors le morphisme naturel*

$$\mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_*(GL_n(A); F(A^n)) \rightarrow H_*(GL_{\infty}(A); \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} (H_0(GL_n(A); F(A^n)))$$

de \mathbb{Q} -espaces vectoriels gradués est un isomorphisme.

Démonstration. Lorsque F est la composée d'un foncteur polynomial $\mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A) \rightarrow \mathbb{Q}\text{-Vect}$ avec le foncteur $\Delta_A : \mathbf{S}(A) \rightarrow \mathbf{P}(A)^{op} \times \mathbf{P}(A)$ défini sur les objets par $\Delta_A(M) = (M, M)$, le résultat est une conséquence du résultat fondamental de Scorichenko [36] (voir [12], corollaire 5.11 et remarque 5.12).

On note aussi que le résultat est équivalent à la nullité de $H_i(\mathbf{S}(A); F)$ pour $i > 0$ (cf. [12], §1). Mais la classe des objets F de $\mathbf{St}(\mathbf{S}(A), \mathbb{Q}\text{-Vect})$ vérifiant cette propriété d’annulation (on utilise ici la proposition 1.27 pour raisonner sur l’image de F dans cette catégorie quotient) est stable par extensions et par noyaux d’épimorphismes. La conclusion résulte donc du corollaire 3.11. \square

Références

- [1] S. Andreadakis. On the automorphisms of free groups and free nilpotent groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 15 :239–268, 1965.
- [2] Laurent Bartholdi. Automorphisms of free groups. I. *New York J. Math.*, 19 :395–421, 2013.
- [3] Hans-Joachim Baues, Winfried Dreckmann, Vincent Franjou, and Teimuraz Pirashvili. Foncteurs polynomiaux et foncteurs de Mackey non linéaires. *Bull. Soc. Math. France*, 129(2) :237–257, 2001.
- [4] Hans-Joachim Baues and Teimuraz Pirashvili. Quadratic endofunctors of the category of groups. *Adv. Math.*, 141(1) :167–206, 1999.
- [5] Stanislaw Betley. Stable K -theory of finite fields. *K-Theory*, 17(2) :103–111, 1999.
- [6] Stanislaw Betley. Twisted homology of symmetric groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(12) :3439–3445 (electronic), 2002.
- [7] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, and Benson Farb. FI-modules : a new approach to stability for S_n -representations. arXiv :1204.4533, 2012.
- [8] Thomas Church, Jordan S. Ellenberg, Benson Farb, and Rohit Nagpal. FI-modules over noetherian rings. arXiv :1210.1854, 2012.
- [9] Gaël Collinet, Aurélien Djament, and James T. Griffin. Stabilité homologique pour les groupes d’automorphismes des produits libres. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19) :4451–4476, 2013.
- [10] Edward Curtis. Lower central series of semi-simplicial complexes. *Topology*, 2 :159–171, 1963.
- [11] Aurélien Djament. Sur l’homologie des groupes de congruences à coefficients polynomiaux. En préparation.
- [12] Aurélien Djament. Sur l’homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.
- [13] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l’homologie des groupes d’automorphismes des groupes libres à coefficients polynomiaux. Accepté à *Commentarii Mathematici Helvetici*.
- [14] Aurélien Djament and Christine Vespa. Sur l’homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 43(3) :395–459, 2010.
- [15] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.
- [16] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.

- [17] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. Cohomology of finite group schemes over a field. *Invent. Math.*, 127(2) :209–270, 1997.
- [18] Pierre Gabriel. Des catégories abéliennes. *Bull. Soc. Math. France*, 90 :323–448, 1962.
- [19] Manfred Hartl, Teimuraz Pirashvili, and Christine Vespa. Polynomial functors from algebras over a set-operad and non-linear Mackey functors. Accepted à Int Math Res Notices doi :10.1093/imrn/rnt242.
- [20] Manfred Hartl and Christine Vespa. Quadratic functors on pointed categories. *Adv. Math.*, 226(5) :3927–4010, 2011.
- [21] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Amer. J. Math.*, 115(5) :1053–1106, 1993.
- [22] Mamuka Jibladze and Teimuraz Pirashvili. Cohomology of algebraic theories. *J. Algebra*, 137(2) :253–296, 1991.
- [23] Nariya Kawazumi. Cohomological aspects of Magnus expansions. arXiv : math.GT/0505497, 2006.
- [24] Max-Albert Knus. *Quadratic and Hermitian forms over rings*, volume 294 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. With a foreword by I. Bertuccioni.
- [25] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II. *K-Theory*, 8(4) :395–428, 1994.
- [26] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [27] Barry Mitchell. The dominion of Isbell. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 167 :319–331, 1972.
- [28] Alexandra Pettet. The Johnson homomorphism and the second cohomology of IA_n . *Algebr. Geom. Topol.*, 5 :725–740, 2005.
- [29] T. I. Pirashvili. Polynomial functors. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 91 :55–66, 1988.
- [30] Teimuraz Pirashvili. Dold-Kan type theorem for Γ -groups. *Math. Ann.*, 318(2) :277–298, 2000.
- [31] Teimuraz Pirashvili. Hodge decomposition for higher order Hochschild homology. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(2) :151–179, 2000.
- [32] Andrew Putman. Stability in the homology of congruence subgroups. arXiv :1201.4876, 2012.
- [33] Takao Satoh. On the lower central series of the IA -automorphism group of a free group. *J. Pure Appl. Algebra*, 216(3) :709–717, 2012.
- [34] Lionel Schwartz. *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan’s fixed point set conjecture*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
- [35] Stefan Schwede. On the homotopy groups of symmetric spectra. *Geom. Topol.*, 12(3) :1313–1344, 2008.

- [36] Alexander Scorichenko. *Stable K-theory and functor homology over a ring*. PhD thesis, Evanston, 2000.
- [37] A. A. Suslin. Excision in integer algebraic K -theory. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 208(Teor. Chisel, Algebra i Algebr. Geom.) :290–317, 1995. Dedicated to Academician Igor' Rostislavovich Shafarevich on the occasion of his seventieth birthday (Russian).
- [38] Antoine Touzé. Cohomology of classical algebraic groups from the functorial viewpoint. *Adv. Math.*, 225(1) :33–68, 2010.
- [39] Christine Vespa. Generic representations of orthogonal groups : projective functors in the category $\mathcal{F}_{\text{quad}}$. *Fund. Math.*, 200(3) :243–278, 2008.
- [40] Christine Vespa. Generic representations of orthogonal groups : the functor category $\mathcal{F}_{\text{quad}}$. *J. Pure Appl. Algebra*, 212(6) :1472–1499, 2008.
- [41] Karen Vogtmann. The cohomology of automorphism groups of free groups. In *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 1101–1117. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.