



**HAL**  
open science

## Graphes d'événements temporisés : représentation entrée/sortie, commande en juste-à-temps

Sébastien Lahaye, Jean-Louis Boimond, Laurent Hardouin

### ► To cite this version:

Sébastien Lahaye, Jean-Louis Boimond, Laurent Hardouin. Graphes d'événements temporisés : représentation entrée/sortie, commande en juste-à-temps. JDA'99, Journées Doctorales d'Automatique, Sep 1999, Nancy, France. pp.293-296. hal-00844522

**HAL Id: hal-00844522**

**<https://hal.science/hal-00844522>**

Submitted on 15 Jul 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Graphes d'événements temporisés : représentation entrée/sortie, commande en juste-à-temps

Lahaye Sébastien

Boimond Jean-Louis

Hardouin Laurent

LISA, 62, Avenue Notre Dame du lac, 49000 Angers.

E-mail : [lahaye, boimond, hardouin]@istia.univ-angers.fr

**Résumé :** On présente comment l'initialisation, la relation entrée/sortie ainsi que la commande en juste-à-temps des graphes d'événements temporisés s'expriment dans l'algèbre  $(\min, +)$ .

**Mots-clés :** Systèmes à événements discrets, graphes d'événements temporisés, algèbre des dioïdes, conditions initiales, juste-à-temps.

## 1 Introduction

Les systèmes dynamiques à événements discrets mettant en jeu uniquement des phénomènes de synchronisation peuvent être modélisés par des Graphes d'Événements Temporisés (GET). Une théorie des systèmes linéaires, analogue à la théorie conventionnelle, a été développée pour cette classe de systèmes sur une structure algébrique particulière appelée dioïde, et dont l'algèbre  $(\min, +)$  est un exemple [1], [5], [6], [7]. La linéarité de ces systèmes s'entend au sens des opérateurs  $\min$  et  $+$  (addition usuelle); en d'autres termes, un tel système  $\mathcal{S}$  vérifie :

- quelles que soient deux entrées  $u_1$  et  $u_2$ 
$$\mathcal{S}(\min(u_1, u_2)) = \min(\mathcal{S}(u_1), \mathcal{S}(u_2)),$$
- quels que soient une entrée  $u$  et un scalaire  $a$ 
$$\mathcal{S}(a + u) = a + \mathcal{S}(u).$$

Dans ce papier, on s'intéresse à l'initialisation de ces systèmes modélisés dans l'algèbre  $(\min, +)$ . Vis-à-vis du modèle GET, cela revient à étudier les instants de disponibilité des jetons du marquage initial. Cette question a été étudiée dans l'algèbre  $(\max, +)$  [1], [5]; notre travail est une simple traduction dans l'algèbre  $(\min, +)$  de ces résultats. Quelques compléments sont néanmoins donnés par rapport à l'étude faite par Libeaut [4]. On traduit également la synthèse de la commande en juste-à-temps formulée de manière plus générale dans le dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{a,x}[[\gamma, \delta]]$  [1, §5.6]. L'expression de cette loi de commande s'avère plus simples et moins coûteuse en calculs que celle proposée par [4].

## 2 Préliminaires

### 2.1 Dioïde, résiduation, résolution d'équations linéaires

**Définition 1 (dioïde)** Un dioïde  $\mathcal{D}$  est un ensemble muni de deux lois internes  $(\oplus, \otimes)$ , associatives et possédant un élément neutre noté respectivement  $\varepsilon$  et  $e$ , telles que la loi  $\oplus$  est commutative et idempotente (i.e.,  $a \oplus a = a$ ). La loi  $\otimes$  distribue sur la loi  $\oplus$ , et l'élément neutre  $\varepsilon$  de la loi  $\oplus$  est absorbant pour la loi  $\otimes$ .

Si  $\otimes$  est commutative,  $\mathcal{D}$  est un dioïde dit **commutatif**. Dans tout dioïde, un **ordre** naturel peut être défini par :  $a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$ .  $(\mathcal{D}, \preceq)$  est un **dioïde complet** si tout sous-ensemble  $A$  de  $\mathcal{D}$  admet une borne supérieure notée  $\bigoplus_{x \in A} x$ , et si  $\otimes$  distribue sur les sommes infinies. En particulier,  $T = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x$  est le plus grand élément de  $\mathcal{D}$ . Dans un dioïde complet, la borne inférieure, notée  $\wedge$ , de deux éléments existe toujours; on a  $a \wedge b = \bigoplus_{x \preceq a, x \preceq b} x$ .

**Exemple 1** Soit  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  l'ensemble  $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$  muni du  $\min$  pour la loi  $\oplus$  et de l'addition usuelle pour la loi  $\otimes$ .  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  est un dioïde complet commutatif d'éléments neutres  $\varepsilon = +\infty$  et  $e = 0$  ( $T = -\infty$ ). Notons que l'ordre  $(\preceq)$  dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  est l'inverse de l'ordre usuel  $(\leq)$ .

**Exemple 2** Partant d'un dioïde scalaire  $\mathcal{D}$ , nous considérons les matrices  $p \times p$  à éléments dans  $\mathcal{D}$ . Le produit et la somme de matrices sont définies conventionnellement à partir de la somme et du produit de scalaires. Cet ensemble de matrices muni de ces deux opérations est également un dioïde, noté  $\mathcal{D}^{p \times p}$ .

Par la suite, nous serons amenés à manipuler des équations du type  $a \otimes x = b$ . Les lois  $(\oplus$  et  $\otimes)$  d'un dioïde n'étant en général pas inversibles, nous ferons appel à la théorie de la résiduation [1, chap. 4] qui permet en particulier de trouver les plus grandes sous-solutions de telles équations.

**Définition 2** Une application  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , où  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  sont des ensembles ordonnés, est dite **résiduable** si pour tout  $y \in \mathcal{D}$ , la borne supérieure du sous-ensemble  $\{x \in \mathcal{C} \mid f(x) \preceq y\}$  existe et appartient à ce sous-ensemble. Cette borne est notée

$f^\sharp(y)$ . L'application  $f^\sharp : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  est appelée **résiduée** de  $f$ . Par définition, on a  $f[f^\sharp(y)] \preceq y, \forall y \in \mathcal{D}$ .

**Propriété 1** L'application  $L_a : x \rightarrow a \otimes x$  d'un dioïde complet dans lui-même est résiduée. La plus grande solution de l'inéquation  $a \otimes x \preceq b$  existe et est égale à  $L_a^\sharp(b)$ , également notée  $a \backslash b$  ou  $\frac{b}{a}$ .

Ce 'quotient' vérifie entre autres les formules suivantes :

$$a \otimes (a \backslash x) \preceq x \quad (f.1)$$

$$a \backslash (x \wedge y) = (a \backslash x) \wedge (a \backslash y) \quad (f.2)$$

$$(a \otimes b) \backslash x = \frac{a \backslash x}{b} \quad (f.3)$$

Dans ce papier, nous serons également amenés à résoudre des équations implicites du type  $x = ax \oplus b$  dans un dioïde.

**Théorème 1** Dans un dioïde complet, l'équation  $x = ax \oplus b$  admet comme plus petite solution  $x = a^*b$  où l'opérateur  $*$  (étoile de Kleene) est défini par :  $a^* = \bigoplus_{i \geq 0} a^i$ , et  $a^0 = e$ .

## 2.2 Représentation des GET

Il est possible de décrire le comportement temporisé des GET par des équations linéaires dans l'algèbre des dioïdes [1], [7]. On se concentre ici sur leur représentation dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  (cf. ex. 1). On considère que les GET sont temporisés uniquement au niveau des places, et que les temporisations sont commensurables. La démarche consiste à associer à chaque transition du GET une variable du temps, communément appelée *fonction compteur*, qui renvoie le nombre cumulé de tir(s) de la transition. Par exemple, à la transition  $x_1$  du GET de la figure 1, on associe le compteur  $x_1(t)$ , qui vérifie les inégalités suivantes :

$$x_1(t) \leq 1 + x_2(t - \tau_2) \text{ et } x_1(t) \leq u_1(t).$$

Sous l'hypothèse que le graphe fonctionne au plus tôt (i.e., les transitions sont tirées dès qu'elles sont validées), on obtient l'égalité

$$x_1(t) = \min(1 + x_2(t - \tau_2), u_1(t)).$$

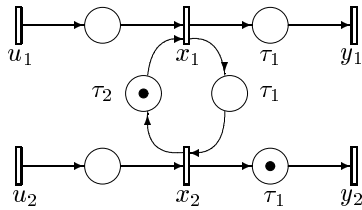


FIG. 1 – un GET

Après diverses manipulations (sans perte de généralités), il est possible de se ramener au modèle linéaire d'état standard suivant :

$$\begin{cases} x(t) = A \otimes x(t-1) \oplus B \otimes u(t) \\ y(t) = C \otimes x(t) \end{cases} \quad (1)$$

## 2.3 Systèmes (min,+)<sup>linéaires</sup>

Un système  $\mathcal{S}$  est une application d'un ensemble de signaux admissibles vers un ensemble de signaux admissibles.

Les signaux mis en jeu dans les GET sont des fonctions compteurs, i.e., des fonctions non-décroissantes de  $\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{min}$ . On note  $\Sigma$ , cet ensemble de signaux, qui peut être muni

- du min point-à-point pour loi  $\oplus$   
 $(u \oplus v)(t) = u(t) \oplus v(t) = \min(u(t), v(t)),$
- de l'inf-convolution pour multiplication, notée  $*$ ,  
 $(u * v)(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} [u(t-s) \otimes v(s)] = \inf_{s \in \mathbb{Z}} [u(t-s) + v(s)].$

$(\Sigma, \oplus, *)$  est un dioïde complet dont les éléments neutres sont définis par

$$\varepsilon(t) = +\infty, \forall t \in \mathbb{Z}, \text{ et } e(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ +\infty & , t > 0 \end{cases}.$$

La relation d'ordre de ce dioïde est définie par

$$u \preceq v \Leftrightarrow u(t) \preceq v(t), \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Les notions de continuité, causalité, et stationnarité ont été définies pour les systèmes  $(\min,+)$  linéaires de manière analogue à la théorie conventionnelle [7], [1]. Dans les références précédentes, il est également montré que les systèmes  $(\min,+)$  linéaires continus peuvent se représenter par un opérateur à noyau. En particulier, pour un système également stationnaire sur  $\Sigma$ , cet opérateur à noyau se résume à un produit d'inf-convolution.

**Théorème 2** Soit un système  $\mathcal{S} : \Sigma \rightarrow \Sigma$  linéaire continu stationnaire, alors il existe une unique application  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{min}$ , appelée **réponse impulsionnelle** telle  $y = \mathcal{S}(u)$  peut être obtenue par :

$$y(t) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} h(j)u(t-j) = (h * u)(t).$$

## 3 Relation entrée-sortie des GET

Pour établir le modèle d'état standard (1) d'un GET, on a considéré que les transitions étaient tirées 'au plus tôt'. Sans information supplémentaire, le fonctionnement du graphe n'est pas entièrement spécifié car rien n'a été dit sur son initialisation, c.-à-d. sur la disponibilité des jetons initialement présents dans le graphe.

Dans la section 3.1, on met en évidence que si les jetons du marquage initial sont disponibles depuis l'instant  $-\infty$ , un GET, en tant que système  $(\min,+)$  linéaire, admet une relation entrée-sortie linéaire qui s'exprime comme un produit d'inf-convolution de l'entrée et de la réponse impulsionnelle. Cette initialisation correspond à considérer que le système est relaxé (on parlera aussi de conditions initiales canoniques). On explicite l'expression de sa réponse impulsionnelle ainsi que les conditions initiales canoniques.

A la section 3.2, on s'intéresse à la prise en compte de conditions initiales dites faiblement compatibles. Les jetons du marquage initial ne peuvent alors être consommés qu'après  $t = 0$ . Cette hypothèse est couramment considérée dans le cadre des réseaux de Petri (RdP), où le graphe est supposé "gelé" avant  $t = 0$ . On montre que la relation entrée-sortie est alors affine.

### 3.1 GET relaxé

Dans [1], les *conditions initiales canoniques d'un GET* ont été définies en considérant que les jetons du marquage initial sont disponibles pour le tir des transitions aval depuis l'instant  $-\infty$ .

Pour des GET modélisés dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ , cela revient à considérer que

$$x(t) = A^*Bu(0) \text{ pour } t < 0.$$

En effet, sachant que les signaux mis en jeu sont causaux [2], *i.e.*, pour  $t < 0$  :

$$u(t) = u(0), x(t) = x(0), \text{ et } y(t) = y(0),$$

la première équation de (1) est alors implicite pour  $t < 0$ , *i.e.*,

$$x(0) = A \otimes x(0) \oplus B \otimes u(0).$$

La plus petite solution de cette équation (cf. th. 1) est

$$x(0) = A^*Bu(0).$$

Cette plus petite solution donne le nombre maximal (pour l'ordre usuel) d'événements pouvant avoir lieu initialement. Pour que cet état initial soit atteint, il suffit que :

- que le graphe fonctionne au plus tôt,
- que les jetons du marquage initial soient disponibles le plus tôt possible, *c.-à-d.* à l'instant  $-\infty$ .

**Remarque 1** Dans [4], il a été défini l'ensemble  $\mathcal{X}_0$  des états initiaux  $x(0)$  qui quelque soit l'entrée  $u \geq e$  engendre des trajectoires  $x$  et  $y$  non décroissantes, dénommé ensemble des *conditions initiales admissibles* :

$$\mathcal{X}_0 = \{x_0 \in \mathbb{N}^{n \times 1} \mid x_0 \succeq Ax_0 \oplus Be\}$$

Si  $u(0) = e$ , la *condition initiale canonique*  $x(0) = A^*Be$  est la *plus petite* (au sens de  $\preceq$ ) *condition initiale admissible*.

**Remarque 2** Prendre des conditions initiales canoniques revient à considérer que le graphe a fonctionné "librement" à  $t = -\infty$ , de telle sorte que l'état s'est stabilisé à la valeur  $A^*Bu(0)$  à  $t = -\infty$ . Le marquage du GET à  $t = 0$  est alors tel que :

- tout chemin élémentaire allant d'une entrée à une sortie est vide de jeton,
- toute transition possède au moins une place amont vide de jeton. En particulier dans un circuit, seules les places amont à une transition synchronisée peuvent contenir des jetons. Autrement dit les "ressources" du système sont considérées comme disponibles à  $t = 0$ .

Pour un système initialisé de la sorte, on parle également de *système relaxé*. Cette appellation se justifie par le fait que si aucune "excitation" n'est apportée en entrée du système, ni l'état, ni la sortie de celui-ci n'évolueront.

On montre maintenant qu'avec des conditions initiales canoniques la relation entrée-sortie d'un GET est linéaire.

En développant la récurrence, la première équation de (1) peut s'écrire :

$$x(t) = A^p x(t-p) \oplus \bigoplus_{j=0}^{p-1} A^j Bu(t-j)$$

Avec  $u(t) = u(0)$  et  $x(t) = A^*Bu(0)$  pour  $t < 0$ ; dès que  $p > t$ , on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= A^p A^*Bu(0) \oplus \bigoplus_{j=0}^{p-1} A^j Bu(t-j), \\ x(t) &= \bigoplus_{j \geq p} A^j Bu(0) \oplus \bigoplus_{j=0}^{p-1} A^j Bu(t-j), \\ x(t) &= \bigoplus_{j=0}^{+\infty} A^j Bu(t-j). \end{aligned}$$

D'où

$$y(t) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} h(j)u(t-j) = (h * u)(t),$$

où la *réponse impulsionnelle*  $h$  est donnée par :

$$h(j) = \begin{cases} CB & , j \leq 0 \\ CA^j B & , j > 0 \end{cases}.$$

### 3.2 GET non relaxé

On suppose ici que les GET considérés sont "gelés" avant l'instant 0. En d'autres termes, on considère que les jetons ne peuvent pas se déplacer avant la date  $t = 0$ . C'est l'hypothèse classique pour l'étude du *régime autonome* dans la littérature des RdP.

Les jetons du marquage initial sont alors "visibles" à  $t = 0$ , et on suppose qu'ils sont entrés dans les places avant cette date. A  $t = 0$ , un jeton du marquage initial est donc soit en train d'effectuer son temps de séjour, soit disponible pour le tir de la transition aval.

La démarche décrite dans [1] consiste alors à définir pour chaque place  $p_i$  un compteur  $w_i(t)$ , qui renvoie le nombre de jetons du marquage initial de  $p_i$  disponibles pour le tir de la transition aval à  $p_i$  à la date  $t$ . Ce compteur doit vérifier les hypothèses suivantes :

- On note  $\tau_i$  et  $M_i$  respectivement la temporisation et le marquage initial de la place  $p_i$ . A l'instant  $\tau_i$  tous les jetons du marquage initial de  $p_i$  doivent être disponibles pour la transition aval à  $p_i$ , *i.e.*,  $w_i(\tau_i) \geq M_i$ . Pour cela, on pose par convention  $w_i(t) = +\infty$  pour  $t \geq \tau_i$ .
- Les jetons du marquage initial de  $p_i$  ne peuvent pas être disponibles avant l'instant 0, *i.e.*,  $w_i(t) = w_i(0) = 0$  pour  $t < 0$ .

Par analogie avec les études menées dans l'algèbre  $(\max, +)$  dans [1, §2.5.2] et [5, §2.1], on qualifiera de *conditions initiales faiblement compatibles* celles vérifiant les hypothèses précédentes.

Pour obtenir les équations d'évolution du GET, on définit un vecteur  $v(t)$  par :

$$v_j(t) = \bigoplus_{\{i \mid p_i \in \bullet x_j\}} w_i(t),$$

où  $\bullet x_j$  est l'ensemble des places amont à la transition  $x_j$ . Chaque élément  $v_j$  est le compteur d'une transition fictive adjointe en amont de la transition  $x_j$ , de telle sorte que les jetons du marquage initial des places amont à  $x_j$  sont "retenus" dans celles-ci selon les conditions initiales faiblement compatibles définies par les compteurs  $w_i$ .

Le fonctionnement du GET peut alors être représenté par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} x(t) &= Ax(t-1) \oplus Bu(t) \oplus v(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

On notera que la deuxième hypothèse sur les conditions initiales impose que :

$$v(t) = v(0) \text{ pour } t < 0.$$

La démarche pour obtenir l'état initial faiblement compatible est analogue au cas relaxé : celui-ci correspond à la plus petite solution de l'équation d'état implicite pour  $t \leq 0$ , i.e.,

$$x(0) = A^* B u(0) \oplus A^* v(0).$$

On obtient alors la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = (h * u)(t) \oplus y_0(t),$$

où  $y_0(t) = (h_0 * v)(t)$ , avec

$$h_0(j) = \begin{cases} C & , j \leq 0 \\ C A^j & , j > 0 \end{cases}.$$

Comme dans la théorie des systèmes conventionnels, un système non relaxé engendre une relation entrée-sortie affine.

## 4 Commande optimale des GET

On a vu que la relation entrée-sortie d'un GET relaxé peut s'écrire

$$y = h * u.$$

Etant donnée une trajectoire de sortie désirée  $\{z(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , on cherche à calculer la trajectoire de commande  $\{u(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  la plus tardive (la plus grande pour l'ordre  $\preceq$ ) telle que la réponse en sortie  $\{y(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  soit inférieure à  $\{z(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Une telle commande est dite optimale vis-à-vis du critère de *juste-à-temps*. Plus formellement, cette commande, notée  $u_{opt}$ , est la plus grande solution de l'inéquation

$$h * u \preceq z. \quad (2)$$

$(\Sigma, \oplus, *)$  étant un dioïde complet (cf. section 2.3), l'application  $x \rightarrow h * x$  est résiduelle (cf. propriété 1). La commande  $u_{opt}$  existe donc et est définie par :

$$u_{opt} = h \backslash z.$$

**Proposition 1** Les commandes  $u_{opt}(t)$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  sont données par

$$u_{opt}(t) = \bigwedge_{i \geq t} h(i-t) \backslash z(i). \quad (3)$$

**Preuve**

•  $\forall t \in \mathbb{Z}$ , on a

$$(h * u_{opt})(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h(t-s) u_{opt}(s) = \bigoplus_{s \leq t} h(t-s) u_{opt}(s) =$$

$$\bigoplus_{s \leq t} h(t-s) \left[ \bigwedge_{i \geq s} \frac{z(i)}{h(i-s)} \right] \preceq \bigoplus_{s \leq t} h(t-s) \frac{z(t)}{h(t-s)} \preceq z(t),$$

ce qui montre que  $u_{opt}$  est solution de (2).

•  $\forall x$  solution de (2), on a

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h(t-s) x(s) = \bigoplus_{s \leq t} h(t-s) x(s) \preceq z(t)$$

$$\forall t, s \in \mathbb{Z}, s \leq t; \quad h(t-s) x(s) \preceq z(t)$$

$$\forall t, s \in \mathbb{Z}, s \leq t; \quad x(s) \preceq h(t-s) \backslash z(t)$$

$$\forall s \in \mathbb{Z}, \quad x(s) \preceq \bigwedge_{t \geq s} h(t-s) \backslash z(t) = u_{opt}(s)$$

□

On montre ici que  $u_{opt}$  est solution d'un système d'équations "backward" analogue aux équations du système adjoint en théorie de la commande optimale.

**Proposition 2** La commande  $u_{opt}$  (3) est la plus grande solution de

$$\begin{cases} \xi(t) & = A \backslash \xi(t+1) \wedge C \backslash z(t) \\ u(t) & = B \backslash \xi(t) \end{cases}, \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

**Preuve** En utilisant la formule (f.3), on pose tout d'abord :  $u_{opt}(t) = B \backslash \xi_{opt}(t)$ , avec  $\xi_{opt}(t) = \bigwedge_{i \geq t} (A^{i-t} C) \backslash z(i)$ .

• Montrons que  $\xi_{opt}$  est solution de (4).  $\forall t \in \mathbb{Z}$ ,

$$\frac{\xi_{opt}(t+1)}{A} \wedge \frac{z(t)}{C} = \frac{\bigwedge_{i \geq t+1} C A^{i-t-1} \backslash z(i)}{A} \wedge \frac{z(t)}{C}$$

$$= \bigwedge_{i \geq t+1} \frac{C A^{i-t-1} \backslash z(i)}{A} \wedge \frac{z(t)}{C} \quad (\text{cf f.2})$$

$$= \bigwedge_{i \geq t+1} \frac{z(i)}{C A^{i-t}} \wedge \frac{z(t)}{C} \quad (\text{cf f.3})$$

$$= \bigwedge_{i \geq t+1} \frac{z(i)}{C A^{i-t}} \wedge \frac{z(t)}{C}$$

$$= \bigwedge_{i \geq t} \frac{z(i)}{C A^{i-t}}$$

$$= \xi_{opt}(t)$$

• Soit  $\xi$  une solution de (4). En développant la récurrence, on a  $\forall t \in \mathbb{Z}$

$$\xi(t) = \frac{\xi(t+t_0)}{A^{t_0}} \wedge \bigwedge_{j=t}^{t+t_0-1} \frac{z(j)}{C A^{j-t}}$$

Lorsque  $t_0 \rightarrow -\infty$ , il est clair que  $\xi(t) \preceq \xi_{opt}(t)$ . □

**Remarque 3** Des conditions initiales faiblement compatibles engendrent une relation entrée-sortie affine (section 3.2). La synthèse d'une commande optimale avec de telles conditions initiales a été traitée dans [5, §4.2] dans le cadre de l'algèbre  $(\max, +)$ , et peut se transposer à l'algèbre  $(\min, +)$ . Elle consiste à ajouter (au sens du  $\oplus$ ) à la sortie désirée  $\{z(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  la séquence  $\{y_0(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , la commande résultante est la plus tardive telle que la sortie se comporte au plus tard avant la consigne "réalisable"  $z \oplus y_0$ , c.-à-d. au plus tard avant ou au plus tôt après la consigne  $z$ .

## 5 Conclusion

Dans cet article, on donne les formulations de l'initialisation, de la relation entrée-sortie et de la commande en juste-à-temps des GET dans l'algèbre  $(\min, +)$ . Il s'agit d'une simple transposition de résultats existants dans l'algèbre  $(\max, +)$  ou plus généralement dans le dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . Ce travail a constitué un préliminaire à l'extension de ces résultats aux systèmes non stationnaires [3].

## Références

- [1] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. Wiley, 1992.
- [2] S. Gaubert. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse, Ecole des Mines de Paris, July 1992.
- [3] Lahaye S., Boimond J.L., and Hardouin L. Optimal Control of  $(\min, +)$  Linear Time-Varying Systems. In *PNPM'99*, Zaragoza, 1999.
- [4] L. Libeaut. *Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes à événements discrets*. Ph. D. thesis, Ecole Centrale de Nantes, Sept 1996.
- [5] E. Menguy. *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Ph. D. thesis, ISTIA - Université d'Angers, Nov 1997.
- [6] M. Plus. A linear system theory for systems subject to synchronization and saturation constraints. In *Proceedings of the first European Control Conference*, Grenoble, July 1991.
- [7] M. Plus. Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems. In *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, Dec. 1991.