



HAL
open science

Graphes d'événements temporisés avec ajout/retrait dynamique de jetons: comportement asymptotique, représentation dans l'algèbre $(\min,+)$

Sébastien Lahaye, Jean-Louis Boimond, Laurent Hardouin

► **To cite this version:**

Sébastien Lahaye, Jean-Louis Boimond, Laurent Hardouin. Graphes d'événements temporisés avec ajout/retrait dynamique de jetons: comportement asymptotique, représentation dans l'algèbre $(\min,+)$. 2e Congrès sur la Modélisation des systèmes réactifs (MSR'99), Mar 1999, Cachan, France. pp.27-37. hal-00844471

HAL Id: hal-00844471

<https://hal.science/hal-00844471>

Submitted on 15 Jul 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Graphes d'Événements Temporisés avec ajout/retrait dynamique de jetons : comportement asymptotique, représentation dans l'algèbre (min, +)

Lahaye Sébastien — Boimond Jean-Louis — Hardouin Laurent

LISA, 62 avenue Notre Dame du lac, 49000 Angers
e-mail: {lahaye, boimond, hardouin }@istia.univ-angers.fr

RÉSUMÉ. Notre but est de montrer que l'approche algébrique développée pour les graphes d'événements temporisés peut s'étendre à une classe particulière de réseaux de Petri autorisant l'ajout de transitions source et/ou puits sur certaines places d'un graphe d'événements temporisé.

Des éléments d'évaluation de performance, et une représentation linéaire de ces graphes dans l'algèbre (min, +) - à l'aide d'équations à paramètres variables - sont donnés.

ABSTRACT. Our aim is to exhibit that the algebraic approach evolved for Timed Event Graphs may be extended to a subclass of Petri Nets : some source and/or sink transitions can be added to some places of a Timed Event Graph.

Elements of performance evaluation and a linear representation of these systems over the (min, +) algebra with variable parameters equations are proposed.

MOTS-CLÉS : Réseaux de Petri Temporisés, évaluation de performance, Algèbre (min, +)

KEY WORDS : Timed Petri Nets, performance evaluation, (min, +) Algebra

Figure 1. *Un GET (a), un GET avec ajout/retrait dynamique de jetons (b)*

Cet article est organisé comme suit : on rappelle brièvement au §2 les définitions et notations relatives aux RdP considérés. La classe des systèmes à laquelle on s'intéresse, nommée par la suite *GET avec ajout/retrait dynamique de jetons*, est définie

au §3 : il s'agit d'une classe particulière de réseaux de Petri à choix libres englobant les GET. On évalue au §4 leurs performances au moyen d'une étude de leurs comportements asymptotiques. Une représentation linéaire à paramètres variables dans l'algèbre $(\min,+)$ de ces systèmes est donnée au §5, une illustration est proposée à partir du graphe de la figure 1.b.

2. Réseaux de Petri temporisés

On rappelle ici plusieurs définitions et notations utilisées par la suite (cf. [Mur89] pour une présentation exhaustive).

Un *réseau de Petri ordinaire* est un quadruplet $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{C}, M)$, où \mathcal{P} est un ensemble fini de *places*, \mathcal{T} un ensemble fini de *transitions*, $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{P} \times \mathcal{T}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{P})$ une relation entre places et transitions, et où M est une application $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$. L'entier M_p est appelé le *marquage initial* de la place p . Un RdP est un graphe biparti avec deux types de sommets, les places $p \in \mathcal{P}$ (représentées par des cercles), et les transitions $q \in \mathcal{T}$ (représentées par des rectangles). Un élément de \mathcal{C} est un arc orienté reliant soit une place à une transition, soit une transition à une place. Le marquage M_p est visualisé sous la forme de M_p jetons dans la place p et évolue selon la *règle de tir* :

1. une transition est *validée* s'il y a au moins un jeton dans chacune de ses places amont,
2. une transition validée peut être *tirée*, et le tir transforme le marquage : un jeton est retiré de chacune des places amont, et un jeton est ajouté dans chacune des places aval.

Par la suite, on supposera que les RdP fonctionnent *au plus tôt* : les transitions sont tirées dès qu'elles sont validées. Soit $q \in \mathcal{T}$, on note $\bullet q = \{p \in \mathcal{P} \mid (p, q) \in \mathcal{C}\}$ l'ensemble des places amont à q . De manière similaire, q^\bullet , $\bullet p$, et p^\bullet désignent respectivement l'ensemble des places aval à q , l'ensemble des transitions amont à p et l'ensemble des transitions aval à p . Un RdP est dit *P temporisé* lorsqu'à chaque place p est associée une temporisation notée τ_p ($\tau_p \geq 0$). Un jeton arrivé à l'instant t dans p peut contribuer au tir des transitions dans p^\bullet après l'instant $t + \tau_p$.

Un *graphe d'événements* (GE) est un RdP pour lequel chaque place a exactement une transition amont et une transition aval, *i.e.*, $\forall p \in \mathcal{P}, |\bullet p| = |p^\bullet| = 1$.

Un *réseau de Petri à choix libres* (RCL) est un RdP tel que si deux transitions partagent la même place amont, alors elles n'ont pas d'autre place amont, *i.e.*,

$$\forall p \in \mathcal{P}, q_1, q_2 \in p^\bullet, \text{ si } q_1 \neq q_2 \text{ alors } \bullet q_1 = \bullet q_2 = \{p\}.$$

Les RCL permettent de modéliser des systèmes pour lesquels les synchronisations et les conflits sont séparés. Notons que les GE sont par construction des RCL.

Figure 2. Une classification des sous-classes de RdP

Sur le plan structurel, un GE avec ajout/retrait dynamique de jetons peut être vu comme un GE sur lequel des transitions source ($\in \mathcal{I}$) et des transitions puits ($\in \mathcal{O}$) sont adjointes à certaines places. On prendra comme point de vue que les tirs des transitions source et puits provoquent respectivement des arrivées et des retraits exogènes de jetons dans le GE sous-jacent (\mathcal{G}_X). Par la suite, les évolutions temporelles de ces transitions ($\in \mathcal{I} \cup \mathcal{O}$) sont supposées connues *a priori* (ou mesurées).

Afin d'étudier le comportement temporisé des *GET avec ajout/retrait dynamique de jetons*, on associe à chaque transition $x \in \mathcal{X}$, $i \in \mathcal{I}$, $o \in \mathcal{O}$ une *fonction compteur* notée respectivement $x(t)$, $i(t)$ et $o(t)$. Un compteur $q(t)$ indique le nombre de fois que la transition q ($\in \mathcal{X} \cup \mathcal{I} \cup \mathcal{O}$) a été tirée jusqu'à l'instant t . Par convention, les jetons ne se déplacent qu'à partir de l'instant 0, et les temporisations associées aux places sont à valeurs entières. Une fonction compteur est donc définie de \mathbb{N} vers \mathbb{N} .

On suppose d'autre part qu'une place ne peut avoir plus d'une transition amont (resp. aval) appartenant à \mathcal{I} (resp. \mathcal{O}), *i.e.*, $\forall p \in \mathcal{P}$, $|\bullet p \cap \mathcal{I}| \leq 1$ et $|p \bullet \cap \mathcal{O}| \leq 1$. Cette hypothèse n'est pas restrictive : un ensemble de transitions d'entrées d'une place p , caractérisé par la collection de compteurs $\{i(t) | i \in \bullet p \cap \mathcal{I}\}$, est équivalent à une unique transition ayant pour compteur associé $\sum_{i \in (\bullet p \cap \mathcal{I})} i(t)$ (il en est de même pour les transitions de sorties).

Figure 3. *Circuit élémentaire c*

Proposition 1 (unicité du taux de production) *Toutes les transitions $x_k, k \in [1, n]$, du circuit c ont le même taux de production si, et seulement si, $\forall k, \lambda_{i_k} = \lambda_{o_k}$.*

Preuve Supposons sans perte de généralité que seule la place p_k possède une transition amont $i_k \in \mathcal{I}$, et une transition aval $o_k \in \mathcal{O}$.

- $\lambda_{i_k} = \lambda_{o_k} \implies \forall j, l \in [1, n], \lambda_{x_j} = \lambda_{x_l}$

Soient x_j, x_l ($j \neq l$) deux transitions de c , on note M_1 (resp. M_2) la somme finie des marquages initiaux des places appartenant au chemin de x_j à x_l (resp. x_l à x_j). On suppose que p_k appartient au chemin allant de x_j à x_l . On a quel que soit t

$$x_j(t) - M_2 \leq x_l(t) \leq x_j(t) + M_1 + i_k(t) - o_k(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_j(t) - M_2}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_l(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_j(t) + M_1 + i_k(t) - o_k(t)}{t}.$$

Comme M_1 et M_2 sont finis, et $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i_k(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{o_k(t)}{t}$, on en déduit que :

$$\lambda_{x_j} \leq \lambda_{x_l} \leq \lambda_{x_j}, \text{ soit } \lambda_{x_j} = \lambda_{x_l}.$$

- $\forall j, l \in [1, n], \lambda_{x_j} = \lambda_{x_l} \implies \lambda_{i_k} = \lambda_{o_k}$

L'hypothèse de tir au plus tôt permet d'écrire :

$$x_{k+1}(t) + o_k(t) = x_k(t - \tau_{p_k}) + i_k(t - \tau_{p_k}),$$

d'où $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1}(t)}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{o_k(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_k(t - \tau_{p_k})}{t} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i_k(t - \tau_{p_k})}{t}$.

Avec pour hypothèse $\lambda_{x_{k+1}} = \lambda_{x_k}$, on a bien $\lambda_{o_k} = \lambda_{i_k}$. \square

Remarque 1 Si la transition i_k (resp. o_k) n'existe pas, la condition nécessaire et suffisante devient $\lambda_{i_k} = 0$ (resp. $\lambda_{o_k} = 0$).

La proposition suivante donne la valeur maximale du taux de production des transitions x_j , $j \in [1, n]$. Ceci revient à considérer qu'aucune transition x_j n'est synchronisée, i.e., $\forall j \in [1, n], |\bullet x_j| = 1$, de telle sorte que l'évolution des jetons dans le circuit c ne peut pas être retardée par les autres circuits du graphe.

Notons $T(c)$, $M(c)$ la somme des temporisations et le nombre total de jetons initialement contenus dans le circuit c , $\bar{q}(t)$ la valeur moyenne du compteur $q(t)$ sur l'intervalle $[0, t]$, et \bar{q} sa limite lorsque t tend vers l'infini :

$$\bar{q}(t) = \left(\sum_{j=0}^t q(j) \right) / t, \quad \bar{q} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{q}(t), \quad t \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2 (taux de production maximal) Si $\forall j \in [1, n], \lambda_{i_j} = \lambda_{o_j}$, et $|\bullet x_j| = 1$, alors le taux de production λ_c , identique pour toutes les transitions x_j du circuit c , est donné par

$$\lambda_c = \frac{M(c) + \sum_{j=1}^n \bar{i}_j - \bar{o}_j - \tau_{p_j} \lambda_{i_j}}{T(c)}.$$

Preuve Comme pour la preuve précédente, on considère que seule la place p_k est dotée d'une entrée (i_k) et d'une sortie (o_k). On utilise ici la notion de *produit temps-ressource* définie dans [Mur89]. Le produit temps-ressource d'une place est le produit du nombre de jetons (ressources) par le temps durant lequel ces jetons résident dans la place. Si on note $\overline{M}_{p_j}(t)$ le marquage moyen de la place p_j sur l'intervalle $[0, t]$, son produit temps-ressource sur ce même intervalle de temps est $\overline{M}_{p_j}(t) \cdot t$.

La grandeur $\tau_{p_j} \cdot x_j(t - \tau_{p_j})$ est également un produit entre une durée de séjour et un nombre de jetons. La variable $x_j(t - \tau_{p_j})$ est égale au nombre de jetons entrés dans p_j via x_j jusqu'à l'instant $t - \tau_{p_j}$, les jetons du marquage initial ainsi que ceux arrivés entre les instants $t - \tau_{p_j}$ et t ne sont pas comptabilisés. Le temps de séjour des jetons arrivant dans p_j est exactement τ_{p_j} unités de temps puisque par hypothèse la transition x_{j+1} n'est pas synchronisée. Dans le produit $\tau_{p_j} \cdot x_j(t - \tau_{p_j})$ le nombre de jetons ayant été présents dans p_j sur l'intervalle $[0, t]$ est minoré, d'où $\tau_{p_j} \cdot x_j(t - \tau_{p_j}) \leq \overline{M}_{p_j}(t) \cdot t$. Au contraire, dans le produit $\tau_{p_j} (M_{p_j} + x_j(t))$, où M_{p_j} est le marquage initial de p_j , tous les jetons ayant été présents dans p_j sur l'intervalle $[0, t]$ sont comptabilisés, mais le temps de séjour de certains jetons est majoré. En effet, les M_{p_j} jetons initiaux et ceux arrivés entre les instants $t - \tau_{p_j}$ et t ont résidé moins de τ_{p_j} unités de temps dans p_j . Finalement, il est possible d'encadrer le produit temps-ressource de la place p_j sur

Figure 4. *Exemple d'évaluation du taux de production c*

On a $\lambda_i = \lambda_o = 1$, le taux de production est donc identique pour les deux transitions du circuit et peut s'évaluer à l'aide de la proposition 2. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\forall t \geq 4, i(t) - o(t) = 3$ (resp. 4) si t est pair (resp. impair), et par conséquent $\sum_{j=0}^t (i(j) - o(j))$ tend vers $\frac{7}{2}t$ lorsque t tend vers l'infini, d'où $\lim_{t \rightarrow \infty} (\sum_{j=0}^t i(j) - o(j))/t = \bar{i} - \bar{o} = \frac{7}{2}$. On en déduit le taux de production $\lambda = \frac{1+7/2-1}{1} = \frac{7}{2}$. A titre de comparaison, si les transitions i et o n'existaient pas, le graphe serait un GET et le taux de production serait égal à un 1.

5. Modèle (min,+) linéaire à paramètres variables

Le comportement d'un GET peut être décrit de manière linéaire dans l'algèbre (min,+). Cette propriété a motivé de nombreux travaux relatifs notamment à l'évaluation de performance, la stabilisation et la commande des GET ([BCOQ92], [CMQV89]). On montre dans cette section que les GET avec ajout/retrait dynamique de jetons peuvent également être décrits par des équations (min,+) linéaires, la particularité du modèle obtenu est d'être à paramètres variables.

Rappelons brièvement les propriétés sur l'algèbre (min,+) utilisées par la suite. Un ensemble D muni des opérations \oplus et \otimes est un dioïde s'il s'agit d'un demi-anneau pour lequel l'opération \oplus est idempotente ($\forall a, a \oplus a = a$), soient ϵ et e les éléments neutres respectifs des opérations \oplus et \otimes . L'algèbre (min,+) consiste à munir l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ des opérations min pour \oplus et + pour \otimes , avec $\epsilon = +\infty$, $e = 0$.

A partir d'un dioïde "scalaire" D , on considère les matrices $p \times p$ à éléments dans D . La somme et le produit de matrices sont définis de façon conventionnelle à partir de la somme et du produit de scalaires dans D . L'ensemble de ces matrices muni de ces deux opérations est aussi un dioïde noté $D^{p \times p}$.

Le comportement d'un GET est décrit dans l'algèbre (min,+) par les équations linéaires standard :

$$\begin{cases} X(t) = A \otimes X(t-1) \oplus B \otimes U(t) \\ Y(t) = C \otimes X(t) \end{cases}$$

où $U(t)$, $X(t)$ et $Y(t)$ sont les vecteurs de compteurs respectifs des transitions d'entrée (source), d'état et de sortie (puits).

5.1. Résolution des conflits

Dans un GET avec ajout/retrait dynamique de jetons, une place p peut avoir deux transitions aval. Une telle configuration dans un RdP exhibe un indéterminisme appelé *conflit* [Mur89]. L'approche classique pour résoudre les conflits consiste à considérer que les transitions aval à p consomment les jetons selon une politique "premier arrivé, premier servi" (*politique de la course*). Dans ce papier, on utilise plutôt l'approche introduite dans [Gau94] qui revient à munir la place p d'un mécanisme de *routage*. Un conflit est alors résolu à l'aide d'une *fonction de routage* dont une définition gé-

Figure 5. x aval à des places de \mathcal{S} (a), x et o aval à une place de \mathcal{R} (b).

(i) $x \in \{q \in \mathcal{X} \mid \bullet q \subset \mathcal{S}\}$ (cas de la figure 5.a)

Comme $\forall p \in \bullet x, |p \bullet| = 1$, on a $\Pi_x^p = \text{Id}$. D'autre part, $(\mathcal{P}, \mathcal{X}, \mathcal{C}_{\mathcal{X}}, M)$ étant un GET, pour un $p \in \bullet x$ donné, l'ensemble $\bullet p \cap \mathcal{X}$ admet un unique élément que l'on note x' , et l'ensemble $\bullet p \cap \mathcal{I}$ peut éventuellement contenir une transition i . L'équation (1) peut s'écrire pour le compteur $x(t)$ comme suit :

$$x(t) = \min_{x' \in \bullet(\bullet x)} (M_{x' \bullet \cap \bullet x} + i(t - \tau_{x' \bullet \cap \bullet x}) + x'(t - \tau_{x' \bullet \cap \bullet x}))$$

$i(t)$ est connue à l'instant t , le terme $a_{xx'}(t - \tau_{x' \bullet \cap \bullet x}) = M_{x' \bullet \cap \bullet x} + i(t - \tau_{x' \bullet \cap \bullet x})$ peut donc être vu comme un coefficient variant avec le temps, et,

$$x(t) = \min_{x' \in \bullet(\bullet x)} (a_{xx'}(t) + x'(t - \tau_{x' \bullet \cap \bullet x})) = \bigoplus_{x' \in \bullet(\bullet x)} a_{xx'}(t - \tau_{x' \bullet \cap \bullet x}) \otimes x'(t - \tau_{x' \bullet \cap \bullet x})$$

(ii) $x, o \in \{q \in \mathcal{X} \cup \mathcal{O} \mid \bullet q \in \mathcal{R}\}$ (cas de la figure 5.b)

Par hypothèse les transitions x et o considérées ne sont pas synchronisées ($|\bullet x| = |\bullet o| = 1$), et les ensembles $\bullet\bullet x \cap \mathcal{X} = \bullet\bullet o \cap \mathcal{X}$, $\bullet\bullet x \cap \mathcal{I} = \bullet\bullet o \cap \mathcal{I}$ sont des singletons contenant les transitions notées respectivement x' et i . L'équation (1) permet d'affirmer que les compteurs $x(t)$ et $o(t)$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x(t) &= \Pi_x^{\bullet x} (M_{\bullet x} + i(t - \tau_{\bullet x}) + x'(t - \tau_{\bullet x})) \\ o(t) &= \Pi_o^{\bullet x} (M_{\bullet x} + i(t - \tau_{\bullet x}) + x'(t - \tau_{\bullet x})) \end{cases}$$

Par définition, une fonction de routage ne peut pas "consommer" de jetons, c'est-à-dire qu'à une place p , $\forall n$, $\sum_{q \in p^\bullet} \Pi_q^p(n) = n$. Dans notre contexte, cela nous permet d'écrire le système précédent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x(t) &= M_{\bullet x} + i(t - \tau_{\bullet x}) - o(t) + x'(t - \tau_{\bullet x}) \\ o(t) &= \Pi_o^{\bullet x} (M_{\bullet x} + i(t - \tau_{\bullet x}) + x'(t - \tau_{\bullet x})). \end{cases}$$

La valeur du compteur $o(t)$ est, par hypothèse, connue *a priori* (ou mesurée), et il apparaît donc que $x(t)$ est déduit en faisant la somme d'un coefficient $a_{xx'}(t - \tau_{\bullet x}) = M_{\bullet x} + i(t - \tau_{\bullet x}) - o(t)$ et du compteur $x'(t - \tau_{\bullet x})$, d'où :

$$x(t) = a_{xx'}(t - \tau_{\bullet x}) \otimes x'(t - \tau_{\bullet x}).$$

On a supposé au §3 que les temporisations étaient à valeurs entières. Sous cette hypothèse, il est possible, au prix d'une augmentation de la taille du graphe (ajout de places et de transitions), d'obtenir un modèle du système où toutes les temporisations sont soit nulles, soit unitaires. D'autre part, l'ensemble \mathcal{X} peut contenir des transitions sources (sans place amont) et des transitions puits (sans place aval). Ces transitions correspondent à des entrées et des sorties du système. On note \mathcal{U} et \mathcal{Y} ces sous-ensembles respectifs de \mathcal{X} définis par $\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{X} \mid \bullet x = \emptyset\}$, et $\mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{X} \mid x^\bullet = \emptyset\}$. On partitionne l'ensemble $\mathcal{X} = \mathcal{U} \cup \mathcal{Y} \cup \tilde{\mathcal{X}}$, où $\tilde{\mathcal{X}}$ est l'ensemble des transitions internes de \mathcal{X} . Au prix d'éventuelles transformations du graphe, on considère ici des réseaux pour lesquels les places aval, resp. amont, aux transitions de \mathcal{U} , resp. \mathcal{Y} , appartiennent à \mathcal{S} et ont des temporisations nulles.

Sous ces hypothèses, l'évolution d'un système modélisé par un GET avec ajout/retrait dynamique de jetons est décrite par :

$$\begin{cases} X(t) = A_0(t) \otimes X(t) \oplus A_1(t-1) \otimes X(t-1) \oplus B \otimes U(t) \\ Y(t) = C \otimes X(t) \end{cases}$$

où,

- $X(t), U(t), Y(t)$ sont les vecteurs des compteurs associés aux transitions des ensembles $\tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{U}$ et \mathcal{Y} .

- $A_0(t)$ est une matrice $|\tilde{\mathcal{X}}| \times |\tilde{\mathcal{X}}|$ définie par : $[A_0(t)]_{xx'} = a_{xx'}(t)$ s'il existe une place de temporisation nulle entre x' et x , $[A_0(t)]_{xx'} = \epsilon$ sinon.

- $A_1(t-1)$ est une matrice $|\tilde{\mathcal{X}}| \times |\tilde{\mathcal{X}}|$ définie par : $[A_1(t-1)]_{xx'} = a_{xx'}(t-1)$ s'il existe une place de temporisation unitaire entre x' et x , $[A_1(t-1)]_{xx'} = \epsilon$ sinon.

- B est une matrice $|\tilde{\mathcal{X}}| \times |\mathcal{U}|$ définie par : $[B]_{xu} = M_{\bullet x \cap u^\bullet}$ s'il existe une place entre u et x , $[B]_{xu} = \epsilon$ sinon.

- C est une matrice $|\mathcal{Y}| \times |\tilde{\mathcal{X}}|$ définie par : $[C]_{yx} = M_{\bullet y \cap x^\bullet}$ s'il existe une place entre x et y , $[C]_{yx} = \epsilon$ sinon.

Exemple 2 On considère le graphe de la figure 1.b dans le cas où la durée de traitement d'une pièce est d'une unité de temps ($\tau = 1$). Son comportement dynamique est décrit par le système d'équations linéaires à paramètres variables suivant :

$$\begin{cases} X(t) = \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & 2 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & a_{x_3 x_2}(t) & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & a_{x_4 x_2}(t) & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} X(t) \oplus \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} X(t-1) \oplus \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} U(t) \\ Y(t) = (\epsilon \quad \epsilon \quad \epsilon \quad \epsilon) X(t) \end{cases}$$

avec $a_{x_4 x_2}(t) = i_2(t) - o_2(t)$, $a_{x_3 x_2}(t) = i_1(t) - o_1(t)$ et $X = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)^t$.

6. Conclusion

Les systèmes étudiés appartiennent à une sous-classe des RCL qui inclut les GET. Ils s'apparentent à des GET sur lesquels des transitions sources et/ou puits sont adjointes à certaines places. On donne une expression du taux de production asymptotique dans le cas où le "GET sous-jacent" au système (\mathcal{G}_X) est fortement connexe. Les fonctions de routage indépendantes de l'origine (déf. 2) nous permettent de disposer d'une représentation linéaire à paramètres variables dans l'algèbre $(\min, +)$ de ces systèmes. Le calcul des paramètres nécessite de connaître *a priori* (ou de disposer d'une mesure) des évolutions temporelles des transitions source et puits adjointes. Le fait de disposer d'une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min, +)$ laisse présager une adaptation des concepts, notamment de commande, développés pour les GET.

Références

- [BCOQ92] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. Synchronization and Linearity. Wiley, 1992.
- [CGQ95] G. Cohen, S. Gaubert, and J.P. Quadrat. Algebraic system analysis of timed Petri nets. In J. Gunawardena, editor, Idempotency, Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, March 1995.
- [CMQV89] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems. IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems, 77(1), Jan. 1989.
- [Gau94] B. Gaujal. Parallélisme et simulation des systèmes à événements discrets. Thèse, Université de Nice – Sophia Antipolis, Juin 1994.
- [Gau95] S. Gaubert. Resource optimization and $(\min, +)$ spectral theory. IEEE Trans. on Automatic Control, 40(11), Nov. 1995.
- [Mur89] T. Murata. Petri Nets : Properties, Analysis and Applications. In Proceedings of the IEEE, volume 77, pages 541–580, 1989.