



HAL
open science

DE BEAUX GROUPES

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro

► **To cite this version:**

| Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro. DE BEAUX GROUPES. 2013. hal-00837759v4

HAL Id: hal-00837759

<https://hal.science/hal-00837759v4>

Preprint submitted on 16 Nov 2013 (v4), last revised 21 May 2014 (v6)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DE BEAUX GROUPES

THOMAS BLOSSIER ET AMADOR MARTIN-PIZARRO

RÉSUMÉ. Dans une belle paire (M, E) de modèles d'une théorie stable T ayant élimination des imaginaires sans la propriété de recouvrement fini, tout groupe définissable se projette, à isogénie près, sur les points E -rationnels d'un groupe définissable dans le réduit à paramètres dans E . Le noyau de cette projection est un groupe définissable dans le réduit.

Un groupe interprétable dans une extension propre de corps algébriquement clos $F \subsetneq K$ est, à isogénie près, l'extension des points F -rationnels d'un groupe algébrique sur F par un groupe interprétable, qui est lui le quotient d'un groupe algébrique par les points F -rationnels d'un sous-groupe algébrique, le tout défini sur F .

ENGLISH SUMMARY

In this short paper, we characterise definable groups in a *belle paire* (M, E) of models of a stable theory T having elimination of imaginaries without the finite cover property : every definable group is (up to isogeny) the extension of the E -rational points of a group definable in the theory T over E by a group definable in T .

Furthermore, every interpretable group in a proper extension $F \subsetneq K$ of algebraically closed fields is, up to isogeny, the extension of the subgroup of F -rational points of an algebraic group over F by an interpretable group which is the quotient of an algebraic group by the F -rational points of an algebraic subgroup.

INTRODUCTION

Deux corps algébriquement clos de même caractéristique p satisfont les mêmes propriétés élémentaires du premier ordre (cette collection de propriétés forment alors une *théorie complète*, notée ACF_p). Un argument de compacité classique permet, par exemple, de montrer facilement que toute fonction polynomiale injective à plusieurs variables complexes est surjective [1]. La théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée, l'un des archétypes des théories *stables*, a un comportement fort structuré : la clôture algébrique d'un sous-corps k correspond à la *clôture algébrique* modèle-théorique (l'ensemble des points à orbite fini par les automorphismes fixant k) ; la dépendance algébrique correspond à la *déviat*ion Shelahiste ; le fait, dû à Chevalley, que la projection d'un ensemble constructible de Zariski le reste correspond à l'élimination de quantificateurs dans le langage des anneaux. De plus, l'existence d'un corps de définition pour chaque variété équivaut à

Date: 16 novembre 2013.

1991 Mathematics Subject Classification. 03C45.

Key words and phrases. Model Theory, Groups, Pairs.

Recherche conduite dans le cadre du projet MODIG ANR-09-BLAN-0047.

l'élimination des imaginaires, ce qui permet de travailler avec des quotients, objets *interprétables* dans la théorie.

De nombreuses questions en géométrie algébrique se traduisent de façon naturelle en théorie des modèles et vice-versa, ce qui a instauré une véritable interaction entre la théorie des modèles et la géométrie algébrique.

On est parfois amené à considérer des objets formels à l'intérieur de variétés algébriques. Ces objets sont fréquemment décrits à l'aide de l'algèbre différentielle. Dans le cas différentiel, les corps *différentiellement clos*, qui en caractéristique nulle ont tous la même théorie, sont l'analogue des purs corps algébriquement clos. De même, la projection d'un ensemble différentiellement constructible le reste. En revanche, un corps différentiellement clos possède un sous-corps propre algébriquement clos, constitué des éléments à dérivée nulle. Les paires d'extensions propres de corps algébriquement clos ont été considérées pour elles-mêmes dans les travaux de Keisler [10], motivés par ceux de Robinson. La théorie des paires d'extensions propres de corps algébriquement clos de caractéristique fixée est complète : elle est en fait la théorie des *belles paires* de modèles de ACF_p . Plus généralement, les belles paires de structures stables furent étudiées par Poizat [15]. Il axiomatisa leurs théories dès que les structures n'ont pas la *propriété de recouvrement fini*.

Plus récemment, Delon [8] a obtenu une expansion naturelle du langage des anneaux pour l'élimination des quantificateurs des belles paires de corps algébriquement clos. Sa preuve consiste à imposer aux sous-structures d'une belle paire (M, P) d'être P -indépendantes, car, pour un uple P -indépendant \bar{a} , les formules sans quantificateur satisfaites par \bar{a} (qui forment le *type sans quantificateur*) entraînent toutes les propriétés élémentaires satisfaites par \bar{a} , son type parital [3].

Quoique les belles paires de corps algébriquement clos sont ω -stables de rang de Morley ω [7, Example 1.5], et que la déviation γ est bien comprise [15, 3], elles n'éliminent pas les imaginaires, ni même *géométriquement*. En fait, une belle paire d'une théorie T élimine les imaginaires (modulo les imaginaires de T) si et seulement si aucun groupe infini n'est interprétable dans T [14]. Pillay [13] explicite une expansion du langage des belles paires de corps algébriquement clos permettant d'éliminer géométriquement les imaginaires.

L'étude des groupes interprétables est une question récurrente en théorie des modèles. Pour traiter cette question, la construction de groupes à partir d'un diagramme de configuration de groupes introduite par Hrushovski [9] s'avère fondamentale. Dans le cas des corps différentiels, tout groupe interprétable se plonge dans un groupe algébrique [12], ce qui suit en partie du fait que la clôture algébrique d'un uple au sens différentiel correspond à la clôture algébrique corpique du corps différentiel engendré. Dans une belle paire, la clôture algébrique au sens T d'une structure P -indépendante est algébriquement close au sens parital [14, Lemma 2.5], ce qui nous sera fort utile pour décrire les groupes définissables dans toute belle paire de structures stables ainsi que les groupes interprétables dans une belle paire de corps algébriquement clos (cf. corollaire 3.4 et proposition 2.5). On utilisera également des techniques utilisées dans [5] pour la classification des groupes définissables dans les mauvais corps [2].

1. PRÉLIMINAIRES

Les résultats cités dans ces préliminaires se trouvent dans [15, 3, 14]. Nous fixons pour toute la suite une théorie complète T stable, que l'on suppose avec élimination des quantificateurs et des imaginaires, afin de simplifier la rédaction.

Une *belle paire* de T est la donnée de $E \preceq M$, modèles de T tel que E est $|T|^+$ -saturé et M réalise tout type sur $A \cup E$, où $A \subset M$ a taille strictement inférieure à $|T|^+$. Puisque deux belles paires sont toujours élémentairement équivalentes dans le langage de T muni d'un nouveau prédicat P pour le sous-modèle, on notera T_P leur théorie. L'indice P fera systématiquement référence à T_P . Par exemple, si (M, E) est une belle paire, on notera $\text{acl}(A)$ les éléments réels de M algébriques sur A au sens de T et $\text{acl}_P(A)$ les éléments réels de M algébriques sur A au sens de la paire.

Une partie A de M est dite *P -indépendante* si

$$A \downarrow_{E_A} E,$$

où $E_A = E \cap A = P(A)$. Deux sous-uples P -indépendants satisfaisant le même P -type sans quantificateurs sont élémentairement équivalents.

Or, un modèle $|T|^+$ -saturé de T_P n'est pas forcément une belle paire. C'est le cas si et seulement si la théorie T n'a pas la propriété de recouvrement fini. Cette propriété correspond à l'existence de relations d'équivalence uniformément définissables avec un nombre fini arbitrairement grand de classes.

On suppose à partir de maintenant que la théorie T n'a pas la propriété de recouvrement fini et on se place dans un modèle (M, E) suffisamment saturé de T_P .

En particulier, la description des types pour des parties P -indépendantes ci-dessus entraîne que T_P a même spectre de stabilité que T et donc T_P est stable. Par ailleurs, puisque toute partie de E est P -indépendante, la paire n'induit pas de structure supplémentaire sur E .

Fait 1.1. Soit A et B deux parties de M .

- La clôture algébrique $\text{acl}_P(A)$ est toujours P -indépendante.
- Si A est P -indépendante, alors $A \downarrow_{E_A}^P E$. De plus, on a que $\text{acl}_P(A) = \text{acl}(A)$ et $E_{\text{acl}_P(A)} = \text{acl}(E_A) = \text{acl}_P(E_A)$.
- Si A et B sont algébriquement closes au sens de la paire, alors

$$A \downarrow_{A \cap B}^P B \quad \text{si et seulement si} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \downarrow_{A \cap B, E} B \\ \text{et} \\ E_A \downarrow_{E_{A \cap B}} E_B \end{array} \right.$$

La caractérisation de l'indépendance ci-dessus permet d'obtenir l'analogue à la propriété (\dagger) dans [4].

Lemme 1.2. *Étant données deux parties A et B algébriquement closes au sens de la paire et indépendantes au-dessus de leur intersection, alors*

$$\text{acl}_P(A, B) = \text{acl}(A, B) \quad \text{et} \quad E_{\text{acl}_P(A, B)} = \text{acl}(E_A, E_B).$$

Démonstration. Par la caractérisation précédente,

$$A \downarrow_{A \cap B, E} B, E.$$

Comme $A \downarrow_{E_A} E$, il suit par transitivité que

$$A \downarrow_{A \cap B, E_A} B, E, \text{ puis } A \downarrow_{E_A, B} E.$$

Enfin, puisque $B \downarrow_{E_B} E$, on a $B \downarrow_{E_B, E_A} E$ et donc $A, B \downarrow_{E_A, E_B} E$.

La partie $A \cup B$ est donc P -indépendante. Le fait précédent permet de conclure que $\text{acl}_P(A, B) = \text{acl}(A, B)$ et $E_{\text{acl}_P(A, B)} = \text{acl}(E_A, E_B)$. \square

2. GROUPES DÉFINISSABLES DANS LA BELLE PAIRE

Nous disposons de tous les ingrédients pour décrire les groupes définissables dans une belle paire de T . Une adaptation immédiate de [5, proposition 1.8] donne un critère suffisant pour vérifier quand un sous-groupe T_P -définissable d'un groupe T -définissable l'est aussi.

Lemme 2.1. *Soit H un sous-groupe connexe T_P -type-définissable d'un groupe T -type-définissable G , le tout défini sur un ensemble algébriquement clos A . Soit a le générique sur A d'un translaté de H . Si $E_{\text{acl}_P(a, A)} = E_A$, alors H est T -type-définissable.*

Démonstration. En prenant un translaté d'une extension non-déviante de $p = \text{tp}^P(a/A)$ sur un petit modèle, on peut supposer que a est le générique de H . Posons p_0 le T -réduit de p . Dans la démonstration de [5, proposition 1.8], on vérifie que l'enveloppe définissable H_0 de H est T -connexe et égale au T -stabilisateur de p_0 , qui est son unique type générique.

Il suffit maintenant de montrer que p est l'unique générique parital de H_0 au sens parital. D'abord, notons que tout générique parital de H_0 est une complétion de p_0 , car toute T -formule générique dans H_0 au sens T_P l'est également au sens T et donc est contenue dans p_0 .

Vérifions ensuite que, si h est un générique parital de H_0 sur A , alors $h, A \downarrow_A E$. Si $h \not\downarrow_A E$, il existe une formule $\varphi(x, e) \in \text{tp}(h/A, E)$, à paramètres sur A , qui n'est pas générique dans H_0 . Par [16, Lemme 5.5], on peut supposer que pour chaque uple b , la formule $\varphi(x, b)$ n'est pas générique dans H_0 . Par contre, la L_P -formule $\psi(x) = \exists y P(y) \wedge \varphi(x, y)$ à paramètres dans A est réalisée par h et est donc générique dans H_0 . Un nombre fini de translatés de la formule $\psi(x)$ doit recouvrir le groupe H_0 et, en prenant une extension non-déviante de p , on peut supposer que l'uple a est contenu dans $\alpha \cdot \psi(x)$ pour un certain $\alpha \in H_0$ avec $a \downarrow_A^P \alpha$. Il existe donc $e' \in E$ tel que $a \in \alpha \cdot \varphi(x, e')$. Par la caractérisation de l'indépendance, on a que $a \downarrow_{A, E} \alpha$, et par transitivité, $a \downarrow_A E, \alpha$. Ceci contredit que la formule $\alpha \cdot \varphi(x, e')$ n'est pas générique dans H_0 .

Par transitivité, on a $h, A \downarrow_{E_A} E$, donc h, A est P -indépendant et $E_{\text{acl}_P(h, A)} = E_{\text{acl}(h, A)} = \text{acl}(E_A) = E_A$. Le type $\text{tp}_P(h/A)$ est déterminé par le type p_0 , donc p est l'unique générique de H_0 . On conclut alors que $H = H_0$ est T -type-définissable. \square

Remarque 2.2. Si G est un groupe infini T -type-définissable sur E , alors le sous-groupe $H = G(E)$ des points E -rationnels de G , qui est clairement définissable dans la paire mais pas dans le réduit, ne satisfait pas les conditions du lemme.

Nous allons caractériser les groupes définissables dans la théorie de la paire, à isogénie près. Pour deux groupes type-définissables G et H , une *isogénie* de G dans H est un sous-groupe type-définissable S de $G \times H$ tel que :

- les projections G_S sur G et H_S sur H sont chacune d'indice borné ; et
- le *noyau* $\ker(S) = \{g \in G : (g, 1) \in S\}$ et le *co-noyau* $\text{coker}(S) = \{h \in H : (1, h) \in S\}$ sont finis.

Une isogénie induit donc un isomorphisme entre $G_S/\ker(S)$ et $H_S/\text{coker}(S)$.

Le résultat suivant, qui combine [17] et le [5, lemme 1.5], sera utilisé à plusieurs reprises.

Lemme 2.3. *Soient G_1 et G_2 deux groupes type-définissables (ou même interprétables) dans une théorie stable. S'il existe, sur un ensemble de paramètres C , des éléments a_1, b_1 de G et a_2, b_2 , de G_2 tels que*

- (1) *les paires a_1 et a_2 , b_1 et b_2 ainsi que $a_1 \cdot b_1$ et $a_2 \cdot b_2$ sont C -interalgébriques,*
- (2) *le triple $a_1, b_1, a_1 \cdot b_1$ est 2 à 2 indépendant sur C ,*

alors l'élément a_1 (resp. a_2) est générique dans un unique translaté d'un sous-groupe connexe H_1 de G_1 (resp. H_2 de G_2), le tout type-définissable sur C et il existe une isogénie entre H_1 et H_2 , donnée par le stabilisateur de $\text{tp}(a_1, a_2/\text{acl}^{\text{eq}}(C))$

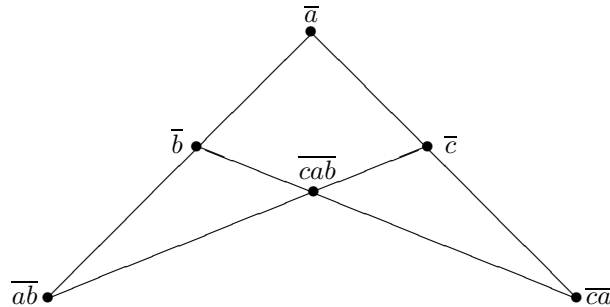
Si dans la condition (1), on a uniquement a_2 algébrique sur C , a_1 , l'élément b_2 algébrique sur C , b_1 et $a_2 \cdot b_2$ algébrique sur C , $a_1 \cdot b_1$, alors on obtient, dans la conclusion, une projection interprétable de H_1 sur un quotient de H_2 par un sous-groupe fini.

Remarque 2.4. Le lemme ci-dessus se généralise au cas où les groupes G_1 et G_2 sont $*$ -interprétables. De plus, si G_1 est type-définissable et G_2 est $*$ -interprétable, alors, par stabilité, on obtient une isogénie (resp. une projection de même noyau), vers un groupe connexe H_2' interprétable dont le générique est interalgébrique avec celui de H_2 au-dessus de C .

Proposition 2.5. *Soit T_P la théorie des belles paires d'une théorie T stable avec élimination des imaginaires sans la propriété de recouvrement fini. Tout groupe T_P -type-définissable est isogène à un sous-groupe d'un groupe T -type-définissable. De plus, tout groupe T_P -type-définissable est, à isogénie près, l'extension des points E -rationnels d'un groupe T -type-définissable sur E par un groupe T -type-définissable.*

Démonstration. Soit G un groupe connexe type-définissable dans une belle paire (M, E) sur un ensemble de paramètres. Par la suite, on travaillera au-dessus d'un sous-modèle contenant ces paramètres, que l'on omettra. Étant donnés deux génériques indépendants a et b de G , on dénotera par \bar{a} , \bar{b} et \overline{ab} les clôtures algébriques au sens parital des points a , b et ab respectivement. Par le lemme 1.2, l'uple \overline{ab} est T -algébrique sur $\bar{a} \cup \bar{b}$, car \bar{a} et \bar{b} sont deux sous-ensembles algébriquement clos indépendants.

À l'aide d'un troisième générique c indépendant de a et b , si l'on pose $\bar{c} = \text{acl}(c)$, $\overline{c\bar{a}} = \text{acl}(ca)$ et $\overline{c\bar{b}} = \text{acl}(cb)$, on obtient le diagramme suivant :



Par [4, Lemme 2.1], chaque deux points dans une droite ainsi que chaque triple colinéaire sont T -indépendants. Le théorème de configuration de groupe [9] nous donne un groupe $*$ -interprétable connexe au sens de T tel que a est interalgébrique avec son T -générique. Par le lemme 2.3, sa remarque et l'élimination des imaginaires de T , on peut supposer, à isogénie près, que le groupe G est un sous-groupe T_P -définissable d'un groupe T -type-définissable.

Par le lemme 1.2, la partie $E_{\overline{ab}}$ est T -algébrique sur $E_{\overline{a}} \cup E_{\overline{b}}$. De plus, la caractérisation de l'indépendance entraîne que $E_{\overline{a}}$ et $E_{\overline{b}}$ sont T -indépendants. De façon analogue, on obtient un groupe H connexe $*$ -interprétable au sens de T défini sur E , tel que $E_{\overline{a}}$ est T -interalgébrique avec un T -générique h de $H(E)$, qui est également générique au sens de la paire.

La remarque 2.4 donne une projection π de G sur les points E -rationnels d'un groupe type-définissable connexe au sens de T , que l'on le dénotera également par $H(E)$, dont le générique h est T_P -interalgébrique avec $E_{\overline{a}}$.

La composante connexe N du noyau est un groupe T -type-définissable par le lemme 2.1 : soit n un générique de N au sens de T_P sur a . Alors na est un générique de Na sur son paramètre canonique, qui est interalgébrique avec $E_{\overline{a}}$. Comme $(n, 1_H)$ est dans le stabilisateur de $\text{tp}^P(a, h)$, on a $(na, h) \equiv^P (a, h)$ et en particulier $E_{\overline{a}} = \text{acl}_P(h) = E_{\overline{na}}$. Le type $\text{tp}^P(na/E_{\overline{a}})$ vérifie ainsi l'hypothèse du lemme. □

3. GROUPES INTERPRÉTABLES DANS LES BEAUX CORPS

On avait remarqué dans l'introduction qu'une belle paire d'une théorie stable T n'élimine pas les imaginaires dès qu'un groupe infini est interprétable dans T [14]. En revanche, la description des groupes définissables nous permet maintenant de caractériser les groupes interprétables dans une belle paire (de structures stables) ayant des imaginaires modérés, ce qui est vrai pour les paires d'extensions propres de corps algébriquement clos, ou plus généralement, les paires propres de modèles d'une théorie fortement minimale avec $\text{acl}(\emptyset)$ infini [13].

Pour un uple réel a et un ensemble (éventuellement imaginaire) A , un type $\text{tp}^P(a/A)$ est presque P -interne s'il existe $B \downarrow_A^P a$ tel que $a \in \text{acl}_P(A, B, E)$. Notons que $\text{tp}^P(a/A)$ est presque P -interne si et seulement si $\text{tp}^P(\text{acl}_P(A, a)/A)$ l'est. De plus, toute extension d'un type presque P -interne l'est aussi, et toute restriction non-déviant d'un type presque P -interne le reste.

Si l'élément a est presque P -interne sur l'ensemble réel A , on peut supposer que A est algébriquement clos au sens de la paire, ce qui entraîne que $a \in \text{acl}(A, E)$: en effet, on considère $B = \text{acl}_P(B) \supset A = \text{acl}_P(A)$ tel que $a \downarrow_A^P B$ et $a \in \text{acl}_P(B, E) = \text{acl}(B, E)$. La caractérisation de l'indépendance donne que $a \downarrow_{A, E} B$ et donc $a \in \text{acl}(A, E)$.

Remarque 3.1. Si un générique d'un groupe G type-définissable au sens de la paire est presque P -interne, alors G est isogène aux points E -rationnels d'un groupe T -type-définissable défini sur E .

Démonstration. Si l'on travaille sur un sous-modèle M_0 contenant des représentants pour les translatés de la composante connexe de G , on en déduit que tous les génériques sont presque P -internes. Le générique principal a sur M_0 est alors

interalgébrique avec $E_{\bar{a}}$ au-dessus de M_0 . On obtient le résultat par la proposition 2.5 et la remarque 2.4. \square

Définition 3.2. Le groupe T_P -interprétable G est *modéré* si l'un de ses génériques α est T_P -algébrique sur un uple réel a , avec $\text{tp}^P(a/\alpha)$ presque P -interne et $a \downarrow_{\alpha}^P E$.

Si un groupe est modéré, tous ses génériques (à l'aide de paramètres indépendants) satisfont la propriété ci-dessus.

Pillay [13, Lemmata 2.2 & 2.4] a montré que, pour toute belle paire (M, E) d'une théorie stable T qui a élimination des imaginaires, tout imaginaire α est interalgébrique avec α' , qui est lui définissable sur un uple réel a dont le type $\text{tp}^P(a/\alpha')$ est E -interne. De plus, si le rang de Morley est définissable dans la théorie T , sa démonstration du Lemma 2.5 assure que a peut être choisi indépendant de E sur α . Ceci est le cas d'une théorie fortement minimale, comme par exemple, la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée. Nous ignorons si ce dernier fait peut être démontré en toute généralité, ou plutôt pour un générique d'un groupe interprétable.

Théorème 3.3. Soit T_P la théorie des belles paires d'une théorie T stable avec élimination des imaginaires sans la propriété de recouvrement fini. Tout groupe modéré T_P -interprétable G est, à isogénie près, l'extension des points E -rationnels d'un groupe T -définissable à paramètres dans E par un groupe T_P -interprétable N , qui est lui quotient d'un groupe T -définissable V par un sous-groupe distingué constitué des points E -rationnels d'un groupe T -définissable N' , le tout sur des paramètres dans E :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H(E) \longrightarrow 0 \\ & & & & & \text{avec} & \\ 0 & \longrightarrow & N'(E) & \longrightarrow & V & \longrightarrow & N \longrightarrow 0. \end{array}$$

Démonstration. Soit G un groupe connexe modéré interprétable dans une belle paire (M, E) sur un ensemble de paramètres. Comme auparavant, on travaillera au-dessus d'un sous-modèle contenant ces paramètres.

Par hypothèse, le générique α de G est algébrique sur un uple réel a , qui est T_P -indépendant de E au-dessus de α . De plus, le type $\text{tp}^P(a/\alpha)$ est presque P -interne.

Soit β un second générique de G au-dessus de a . Notons que

$$a \downarrow_{\beta}^P \text{ et } a \downarrow_{\alpha}^P \beta,$$

par transitivité de l'indépendance. Considérons alors un uple b tel que $b \downarrow_{\beta}^P a$ et $(b, \beta) \equiv^P (a, \alpha)$. À nouveau,

$$b \downarrow_{\alpha}^P a \text{ et } b \downarrow_{\alpha}^P \beta.$$

Prenons $ab \downarrow_{\alpha \cdot \beta}^P a, b$ tel que $(ab, \alpha \cdot \beta) \equiv^P (a, \alpha)$. Alors,

$$ab \downarrow_{\alpha}^P a \text{ et } ab \downarrow_{\beta}^P b.$$

Pour un troisième générique γ de G au-dessus de a, b, ab , on a

$$a \downarrow_{\beta}^P \gamma \cdot \alpha, \quad b \downarrow_{\alpha}^P \gamma \cdot \alpha, \quad b \downarrow_{\alpha \cdot \beta}^P \gamma \cdot \alpha \cdot \beta \text{ et } ab \downarrow_{\alpha \cdot \beta}^P \gamma \cdot \alpha \cdot \beta.$$

Considérons aussi $c \downarrow^P_\gamma a, b, ab$ et $ca \downarrow^P_{\gamma \cdot \alpha} a, b, ab, c$ tels que

$$(c, \gamma) \equiv^P (ca, \gamma \cdot \alpha) \equiv^P (a, \alpha).$$

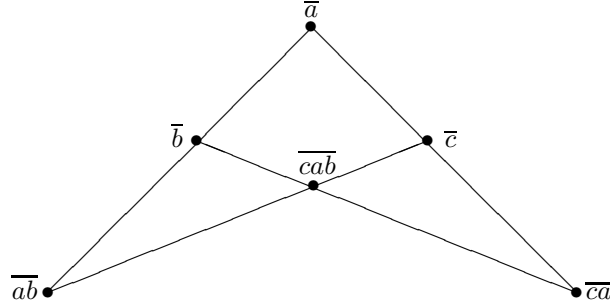
Alors,

$$\begin{aligned} c \downarrow^P a, b, ab, & \quad c \downarrow^P \gamma \cdot \alpha, & \quad c \downarrow^P \gamma \cdot \alpha \cdot \beta, \\ ca \downarrow^P a, & \quad ca \downarrow^P b, & \quad ca \downarrow^P c \text{ et } ca \downarrow^P \gamma \cdot \alpha \cdot \beta. \end{aligned}$$

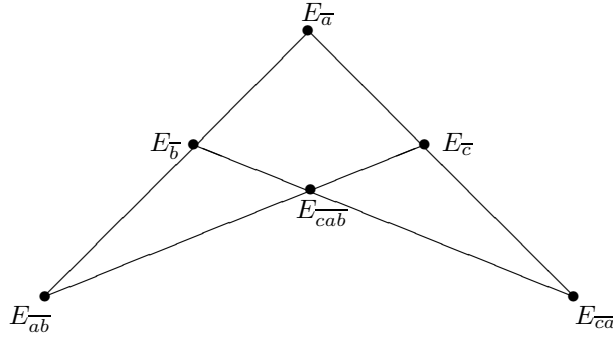
Au risque de fatiguer le lecteur sagace, prenons enfin $cab \downarrow^P_{\gamma \cdot \alpha \cdot \beta} a, b, ab, c, ca$ tel que $(cab, \gamma \cdot \alpha \cdot \beta) \equiv^P (a, \alpha)$. On a alors également,

$$cab \downarrow^P b, \quad cab \downarrow^P ca, \quad cab \downarrow^P c \text{ et } cab \downarrow^P ab.$$

Posons $\bar{a} = \text{acl}(a)$ et de même pour les uples réels \bar{b}, ab, c, ca, cab . Notons que, dans le diagramme suivant, deux points sur une même droite sont indépendants :



Comme $a \downarrow^P_\alpha E$, on a $E_{\bar{a}} \subset \text{acl}_P(\alpha) \subset \bar{a}$ et donc $E_{\bar{a}} = \text{acl}_P(\alpha) \cap E$. De plus, par le lemme 1.2, comme $\bar{a} \downarrow^P \bar{b}$, on a $E_{\text{acl}_P(\bar{a}, \bar{b})} = \text{acl}(E_{\bar{a}}, E_{\bar{b}})$ et, en particulier, l'ensemble $E_{\bar{ab}} \subset \text{acl}(E_{\bar{a}}, E_{\bar{b}})$. Ceci est aussi valable pour tout autre couple de points dans une même droite du diagramme précédent. Du fait que α est générique au-dessus de $\beta, \gamma \cdot \alpha$, on en déduit que le point $E_{\bar{a}}$ est indépendant de la droite $E_{\text{acl}(\bar{b}, \bar{ca})}$ et de même pour tout autre point n'appartenant pas à une droite. La 0-configuration de groupe :



donne ainsi un groupe connexe $*$ -interprétable H au sens du réduit T sur E , dont un générique h de $H(E)$ est T -interalgébrique avec $E_{\bar{a}}$. Comme dans le cas précédent, on peut supposer que H est type-définissable et on obtient une projection type-définissable

$$\pi : G \rightarrow H(E).$$

Vérifions aussi que les points $\bar{a}, \bar{b}, \overline{ab}, \bar{c}, \overline{ca}, \overline{cab}$ obtenus auparavant donnent une T -configuration de groupe sur l'ensemble de paramètres E . Chaque deux points sont T -indépendants sur E , et de même pour tout triple de points colinéaires. Puisque β est algébrique sur \bar{b} et $\alpha \cdot \beta$ l'est sur \overline{ab} , on a que α est algébrique sur b, ab . De plus, par 1.2, la clôture T -algébrique $\text{acl}(\bar{b}, \overline{ab})$ est T_P -algébriquement close. Le type $\text{tp}^P(\bar{a}/\text{acl}(\bar{b}, \overline{ab}))$ est aussi presque P -interne, donc l'uple \bar{a} est T -algébrique sur $E, \bar{b}, \overline{ab}$. De même pour les autres droites.

On obtient un groupe connexe $*$ -interprétable W au sens du réduit T sur E et deux génériques indépendants \bar{a}' et \bar{b}' de W tels que \bar{a}' est T -interalgébrique avec \bar{a} sur E , l'élément \bar{b}' est T -interalgébrique avec \bar{b} sur E et $\bar{a}' \cdot \bar{b}'$ l'est avec \overline{ab} . Comme les uples α, β et $\alpha \cdot \beta$ sont déjà algébriques sur des sous-uples finis de \bar{a}' , de \bar{b}' et de $\bar{a}' \cdot \bar{b}'$ respectivement et puisque W est une limite projective de groupes connexes type-définissables au sens du réduit T sur E , il existe un groupe connexe V type-définissable au sens du réduit T sur E contenant deux génériques indépendants a_1 et b_1 tels que α (resp. $\beta, \alpha \cdot \beta$) est algébrique sur a_1 (resp. $b_1, a_1 \cdot b_1$). Notons que a_1 est T -algébrique sur E, \bar{a} , et de même pour les autres points.

Comme \bar{a}, \bar{b} et \overline{ab} sont aussi deux-à-deux T_P -indépendants sur E , de même pour a_1, b_1 et $a_1 \cdot b_1$.

Comme $a \downarrow_{E_{\bar{\pi}}}^P E$ et α est algébrique sur a , on conclut que $\alpha \downarrow_{E_{\bar{\pi}}}^P E$. Si $N = \ker(\pi)^0$, l'élément α est générique dans $N \cdot \alpha$ sur $\text{acl}(h) = E_{\bar{a}}$ et donc générique dans $N \cdot \alpha$ sur E .

Le lemme 2.3 appliqué aux paires (a_1, α) et (b_1, β) nous donne ainsi une projection ϕ de V sur N (à isogénie près). Il nous reste à montrer que la composante connexe N_1 de $\ker(\phi)$ est isogène aux points E -rationnels d'un groupe T -type-définissable N' , qui suit de la remarque 3.1 : en effet, soit n_1 un générique de N_1 sur E, a_1 . Alors, le point $(n_1, 1_N)$ est dans le stabilisateur de $\text{tp}^P(a_1, \alpha/\text{acl}_P^{\text{eq}}(E))$, donc $n_1 \cdot a_1 \equiv_{\alpha}^P a_1$. Puisque $\text{tp}^P(a/\alpha)$ est presque P -interne et a_1 est algébrique sur E, a , le type $\text{tp}^P(a_1/\alpha) = \text{tp}^P(n_1 \cdot a_1/\alpha)$ l'est aussi. Comme α est algébrique sur E, a_1 , le type $\text{tp}^P(n_1 \cdot a_1/E, a_1)$ est également presque P -interne ainsi que $\text{tp}^P(n_1/E)$, grâce à l'indépendance $n_1 \downarrow_E^P a_1$. \square

Corollaire 3.4. *Tout groupe G interprétable dans une extension propre de corps algébriquement clos $F \subsetneq K$ est, à isogénie près, l'extension des points F -rationnels d'un groupe algébrique défini sur F par N , qui est lui un quotient d'un groupe algébrique V par un sous-groupe distingué $N'(F)$, constitué des points rationnels d'un groupe algébrique défini sur F*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H(F) \longrightarrow 0 \\ & & & & \text{avec} & & \\ 0 & \longrightarrow & N'(F) & \longrightarrow & V & \longrightarrow & N \longrightarrow 0, \end{array}$$

où V, H et N' sont des groupes algébriques définis sur F .

Si le groupe G est interprétable sur un sous-corps k , alors les groupes obtenus le sont sur $\text{acl}_P(k) \subset \overline{kF}$.

RÉFÉRENCES

- [1] J. Ax, *Injective endomorphisms of varieties and schemes*, Ann. Math., **88**, 239-271 (1969).

- [2] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu, **8**, 415-443 (2009).
- [3] I. Ben-Yaacov, A. Pillay, E. Vassiliev, *Lovely pairs of models*, APAL, **122**, 235-261, (2003).
- [4] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Géométries relatives*, J. Europ. Math. Soc., to appear. HAL-00514393.
- [5] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *À la recherche du tore perdu*, soumis. HAL-00758982.
- [6] E. Bouscaren, *The Group Configuration—after E. Hrushovski*, dans : *The Model Theory of Groups*, 199–209, Notre Dame Math. Lectures, **11**, University of Notre Dame Press (1989).
- [7] S. Buechler, *Pseudoprojective Strongly Minimal Sets are Locally Projective*, JSL, **56**, 1184–1194, (1991).
- [8] F. Delon, *Élimination des quantificateurs dans les paires de corps algébriquement clos*, Confluentes Math., **4**, 1250003, 11pp (2012).
- [9] E. Hrushovski, *Contributions to stable model theory*, Ph.D. Thesis, Berkely (1986).
- [10] H. J. Keisler, *Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfields*, Michigan Math. J., **11**, 71–81, (1964).
- [11] A. Pillay, *Geometric Stability Theory*, Oxford Logic Guides, **33**. Oxford University Press (1996).
- [12] A. Pillay, *Some foundational questions concerning differential algebraic groups*, Pacific J. Math., **179**, 179–200 (1997).
- [13] A. Pillay, *Imaginaries in pairs of algebraically closed fields*, APAL, **146**, 13–20, (2007).
- [14] A. Pillay, E. Vassiliev, *Imaginaries in beautiful pairs*, Illinois J. Math., **48**, 759-768 (2004).
- [15] B. Poizat, *Paires de structures stables*, JSL, **48**, 239–249, (1983).
- [16] B. Poizat, *Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique*, *Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah* (1987). Traduction anglaise : Stable groups. Mathematical Surveys and Monographs, **87**. Amer. Math. Soc. (2001).
- [17] M. Ziegler, *A note on generic types*, preprint, (2006) , <http://arxiv.org/abs/math/0608433>.

UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208,
 43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: blossier@math.univ-lyon1.fr
E-mail address: pizarro@math.univ-lyon1.fr