



HAL
open science

DE BEAUX GROUPES

Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro

► **To cite this version:**

| Thomas Blossier, Amador Martin-Pizarro. DE BEAUX GROUPES. 2013. hal-00837759v1

HAL Id: hal-00837759

<https://hal.science/hal-00837759v1>

Preprint submitted on 24 Jun 2013 (v1), last revised 21 May 2014 (v6)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DE BEAUX GROUPES

THOMAS BLOSSIER ET AMADOR MARTIN-PIZARRO

RÉSUMÉ. Dans une belle paire (K, E) de corps algébriquement clos, un groupe définissable se projette, à isogénie près, sur les points E -rationnels d'un groupe algébrique ayant pour noyau un groupe algébrique. Un groupe interprétable est, à isogénie près, l'extension des points E -rationnels d'un groupe algébrique par un groupe interprétable, qui est lui le quotient d'un groupe algébrique par les points E -rationnels d'un sous-groupe algébrique.

ENGLISH SUMMARY

In this short paper, we will provide a characterisation of interpretable groups in a beautiful pair (K, E) of algebraically closed fields : every interpretable group is, up to isogeny, the extension of the subgroup of E -rational points of an algebraic group by an interpretable group which is the quotient of an algebraic group by the E -rational points of an algebraic subgroup.

INTRODUCTION

Keisler [9] étudia dans les années 60 les propriétés élémentaires des paires d'extensions propres de corps algébriquement clos. Cette théorie est en fait la théorie des belles paires de modèles de ACF . Les belles paires de structures stables furent étudiées par Poizat [14], qui axiomatisa leurs théories dès que les structures n'ont pas la propriété de recouvrement fini. Quoique les belles paires de corps algébriquement clos sont ω -stables de rang ω [6, Example 1.5] et que la déviation y est bien comprise [14, 2], elles n'éliminent pas géométriquement les imaginaires. En fait, cette élimination n'est possible que si aucun groupe infini n'est interprétable dans ces structures [13]. Pillay [12] explicite une expansion du langage des belles paires de corps algébriquement clos permettant d'éliminer géométriquement les imaginaires. Plus récemment, Delon [7] a obtenu une expansion naturelle du langage pour l'élimination des quantificateurs. Sa preuve consiste à imposer aux sous-structures d'une belle paire (M, P) d'être P -indépendantes, car dans ce cas le type sans-quantificateur entraîne le type parital [2].

L'étude des groupes interprétables est une question récurrente en théorie des modèles. Pour traiter cette question, la construction de groupes à partir d'un diagramme de configuration de groupes introduite par Hrushovski [8] s'avère fondamentale. Dans le cas des corps différentiels, tout groupe interprétable se plonge dans un groupe algébrique [11], ce qui suit en partie du fait que la clôture algébrique d'un

Date: 24 juin 2013.

1991 Mathematics Subject Classification. 03C45.

Key words and phrases. Model Theory, Groups, Pairs.

Recherche conduite dans le cadre du projet MODIG ANR-09-BLAN-0047.

uple au sens différentiel correspond à la clôture algébrique corpique du corps différentiel engendré. Dans notre cadre, la clôture algébrique dans le langage introduit par Delon correspond à la clôture algébrique corpique de la structure engendrée.

Grâce aux techniques utilisées dans [4] pour la classification des groupes définissables dans les mauvais corps [1], nous avons pu décrire les groupes interprétables dans une belle paire de corps algébriquement clos (cf. théorème 2.2 et proposition 2.1).

1. PRÉLIMINAIRES

Étant donnés trois sous-corps A , B et C d'un corps commun avec $C \subset A \cap B$, on utilisera la notation

$$A \underset{C}{\downarrow}^{\text{ld}} B$$

pour dénoter que A est linéairement disjoint de B au-dessus de C . Rappelons que cette propriété entraîne que A est algébriquement indépendant de B au-dessus de C , ce que l'on notera

$$A \underset{C}{\downarrow}^0 B.$$

La réciproque est vérifiée quand C est algébriquement clos.

Pour la suite, L désignera le langage des corps (c.à.d. le langage des anneaux complété par la fonction inverse multiplicative) et E un prédicat unaire supplémentaire. Dans le langage $L \cup \{E\}$, les modèles de la théorie T_E des belles paires des corps algébriquement clos sont exactement les paires d'extensions propres de corps algébriquement clos [9].

Delon [7] considère l'expansion L_D du langage $L \cup \{E\}$ par des prédicats l_n d'arité n ainsi que des fonctions $(f_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ d'arité $n+1$ pour tout entier $n \geq 2$. Dans un modèle (K, E) de T_E , on interprète la relation l_n par les n -uples formés d'éléments de K linéairement indépendants au-dessus de E . Pour x_1, \dots, x_n linéairement indépendants au-dessus de E et y linéairement dépendant de x_1, \dots, x_n au-dessus de E , les fonctions $f_{n,i}(y, x_1, \dots, x_n)$ dénotent les coordonnées de y sur la base (x_1, \dots, x_n) du sous-espace vectoriel engendré sur le corps E .

Fait 1.1. [7, Théorème 1] La théorie des belles paires des corps algébriquement clos élimine les quantificateurs dans le langage L_D .

Par la suite, on se place dans un modèle suffisamment saturé (K, E) de la théorie T_E des belles paires des corps algébriquement clos dans le langage L_D . On utilisera l'indice 0 pour désigner la structure sous-jacente de pur corps et on dénotera par E_F le sous-corps $E \cap F$ d'un sous-corps F de K .

Remarque 1.2. [7, Corollaire 3 et Fait 8]

- La clôture définissable d'une L_D -sous-structure A est alors sa clôture parfaite. La clôture algébrique au sens parital de A est sa clôture algébrique corpique.
- Une paire (A, E_A) est une sous-structure si et seulement si

$$A \underset{E_A}{\downarrow}^{\text{ld}} E.$$

Elle est donc P -indépendante dans le sens [2, Définition 3.7]. En particulier, une sous-structure A est algébriquement indépendante de E au-dessus de E_A et

la 0-base canonique $\text{Cb}_0(A/E)$ est donc 0-interalgébrique avec E_A et $E_{\text{acl}(A)} = \text{acl}_0(E_A)$.

- Une sous-structure A algébriquement close, où $E_A \subsetneq A$, est une sous-structure élémentaire.

Rappelons que la structure induite sur E est celle de pur corps algébriquement clos. La description de la déviation dans les *lovely pairs* [2, Proposition 7.3] se traduit pour deux sous-structures A et B avec une sous-structure commune C de la façon suivante :

$$A \downarrow_C B \quad \text{si et seulement si} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \downarrow_{C,E}^0 B \\ \text{et} \\ E_A \downarrow_{E_C}^0 E_B \end{array} \right.$$

Cette caractérisation permet d'obtenir l'analogie à la propriété (†) dans [3], qui sera fort utile par la suite.

Lemme 1.3. *Étant données deux sous-structures A et B indépendantes au-dessus de leur intersection, alors*

$$E_{\text{acl}(A,B)} = \text{acl}_0(E_A, E_B).$$

Démonstration. Par la remarque 1.2, il suffit de montrer que E_D est inclus dans $\text{acl}_0(E_A, E_B)$, où D dénote la sous-structure engendrée par A et B . Comme $A \downarrow_{E_A}^0 E$, la caractérisation de l'indépendance entraîne que

$$A \downarrow_{E_A,B}^0 E, \text{ d'où } A, B \downarrow_{E_A,B}^0 E \text{ et } \text{acl}_0(A, B) \downarrow_{\text{acl}_0(E_A,B)}^{\text{ld}} \text{acl}_0(E, B).$$

On en déduit que $D \subset \text{acl}_0(A, B)$ et $E_D \subset \text{acl}_0(E_A, B)$. De même $E_D \subset \text{acl}_0(E_B, A)$. L'indépendance

$$A \downarrow_{E_A, E_B, C}^0 B$$

entraîne que $E_D \subset \text{acl}_0(E_A, E_B, C)$. Puisque

$$C \downarrow_{E_C}^0 E,$$

on obtient que $E_D \subset \text{acl}_0(E_A, E_B)$. □

Remarque 1.4. Si A est une sous-structure finiment engendrée sur une sous-structure C , alors $\text{degtr}(A/C)$ et $\text{degtr}(E_A/E_C)$ sont finis.

Démonstration. Soit B un ensemble fini qui engendre A au-dessus C . Posons $A_0 = \text{acl}_0(\text{Cb}_0(C(B)/E))$, où $C(B)$ dénote le (pur) corps engendré par B sur C . Notons que $A_0 \subset E$ et $C(B, A_0)$ est linéairement disjoint de E sur A_0 . Ainsi, la structure A est contenue dans $C(B, A_0)$ et alors $E_A = A \cap A_0$. Comme A_0 a degré de transcendance fini sur E_C , on conclut. □

À partir de la description des types dans les belles paires [14, Théorème 9], on peut faire un calcul précis des rangs (*cf.* [6, Exemple 1.5] et de façon plus explicite dans [16, page 1660]).

Fait 1.5. Soit une sous-structure A finiment engendrée sur une sous-structure C . Alors,

$$\begin{aligned} \text{RM}(A/C) = \text{RU}(A/C) &= \omega \cdot \text{degtr}(A/C, E) + \text{degtr}(E_A/C) \\ &= \omega \cdot \text{degtr}(A/C, E_A) + \text{degtr}(E_A/E_C). \end{aligned}$$

En particulier, pour un groupe algébrique G , on a $\text{RM}(G) = \omega \cdot \dim(G)$ et $\text{RM}(G(E)) = \dim(G)$, où $\dim(G)$ dénote sa dimension de Zariski.

Rappelons qu'une belle paire d'une théorie stable T n'élimine pas les imaginaires dès qu'un groupe infini est interprétable dans T [13]. Néanmoins, la théorie des belles paires des corps algébriquement clos les élimine géométriquement une fois que l'on ajoute certaines sortes de nature algébro-géométrique [12].

Fait 1.6. Pour tout imaginaire e d'une paire (K, E) saturée de corps algébriquement clos, il existe un uple réel d tel que :

- (1) $d \perp_e E$,
- (2) il existe un groupe algébrique connexe G agissant sur une variété irréductible V , le tout défini sur E , dont d est le générique de V ,
- (3) l'imaginaire e est interalgébrique avec le paramètre canonique de $G(E) \cdot d$.

Dans le fait précédent, le $\text{tp}(d/e)$ est E -interne et le groupe G est son groupe de liaison sur E .

2. GROUPES INTERPRÉTABLES DANS LA BELLE PAIRE

Nous disposons tous les ingrédients pour décrire les groupes interprétables dans une belle paire de corps algébriquement clos. Commençons par la caractérisation des groupes définissables, à isogénie près. Rappelons qu'une *endogénie* de G dans H , pour G et H deux groupes définissables, est un sous-groupe définissable S de $G \times H$ tel que :

- la projection sur G est un sous-groupe G_S d'indice fini, et
- le *co-noyau* $\text{coker}(S) = \{h \in H : (1, h) \in S\}$ est fini.

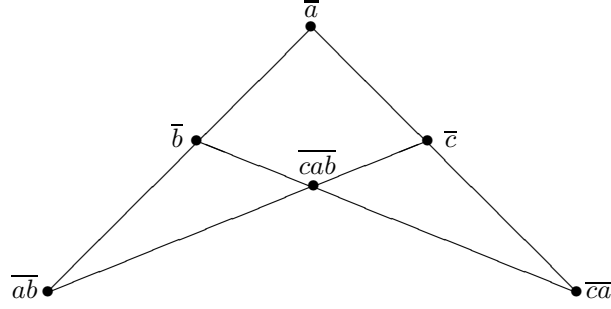
Une telle endogénie induit donc un morphisme de G_S dans $N_H(\text{coker}(S))/\text{coker}(S)$. Une *isogénie* de G vers H est une endogénie de noyau $\ker(S) = \{g \in G : (g, 1) \in S\}$ fini et dont l'image (la projection sur H) est d'indice fini dans H .

Proposition 2.1. *Tout groupe définissable est, à isogénie près, l'extension des points E -rationnels d'un groupe algébrique défini sur E par un groupe algébrique. De plus, tout groupe définissable est isogène à un sous-groupe d'un groupe algébrique.*

Si le groupe est définissable sur une structure A , alors les groupes algébriques obtenus sont définissables sur $\text{acl}(A)$.

Démonstration. Soit G un groupe connexe définissable dans une paire saturée (K, E) sur une structure A . Pour la suite, on ajoute $\text{acl}(A)$ au langage. Étant donnés deux génériques indépendants a et b de G , on dénotera par \bar{a} , \bar{b} et \overline{ab} la clôture algébrique des points a , b et ab . Par la remarque 1.2, cette clôture consiste à prendre la clôture algébrique au sens corpique de la L_D -sous-structure correspondante et, par la remarque 1.4, le degré de transcendance de $E_{\bar{a}}$ est fini. En particulier, l'uple \overline{ab} est 0-algébrique sur $\bar{a} \cup \bar{b}$, car le corps engendré par $\bar{a} \cup \bar{b}$ est une sous-structure du fait que a et b sont indépendants.

À l'aide d'un troisième générique c indépendant de a et b , on obtient la 0-configuration de groupe :



où $\bar{c} = \text{acl}(c)$, $\overline{ca} = \text{acl}(ca)$ et $\overline{cab} = \text{acl}(cab)$. Le théorème de configuration de groupe [8] nous donne, par stabilité, un groupe algébrique connexe tel que a est interalgébrique avec son 0-générique, qui n'est pas forcément générique au sens de la paire. Par [4, Lemme 1.5], on peut supposer, à isogénie près, que le groupe G est un sous-groupe de ce groupe algébrique.

Par le lemme 1.3, la partie $E_{\overline{ab}}$ est 0-algébrique sur $E_{\bar{a}} \cup E_{\bar{b}}$. De plus, la caractérisation de l'indépendance entraîne que $E_{\bar{a}}$ et $E_{\bar{b}}$ sont 0-indépendants. De façon analogue, on obtient un groupe algébrique connexe H définissable sur E tel que $E_{\bar{a}}$ est 0-interalgébrique avec un 0-générique h de $H(E)$, qui est également générique au sens de la paire.

Le stabilisateur de $\text{tp}(a, h)$ induit une projection de G sur $H(E)$. Montrons que la composante connexe N du noyau est un groupe algébrique par [4, Proposition 1.8]. Soit n un générique de N sur a . Alors na est un générique de Na sur son paramètre canonique, qui est interalgébrique avec $E_{\bar{a}}$. Comme $(n, 1_H)$ est dans le stabilisateur de $\text{tp}(a, h)$, on a $(na, h) \equiv (a, h)$ et en particulier $E_{\bar{a}} = \text{acl}_0(h) = E_{\overline{na}}$. Le fait 1.5 donne que $\text{tp}(na/E_{\bar{a}})$ est de rang maximal dans $\text{tp}_0(na/E_{\bar{a}})$. De plus, si $x \models \text{tp}_0(na/E_{\bar{a}})$ a même rang que na sur $E_{\bar{a}}$, alors $E_{\bar{x}} = E_{\overline{na}}$ et les structures \bar{x} et \overline{na} sont isomorphes au sens de la paire. Par élimination des quantificateurs, l'élément x a même type que na sur $E_{\bar{a}}$ et N est donc un groupe algébrique. \square

La description des groupes définissables nous permet maintenant de caractériser les groupes interprétables.

Théorème 2.2. *Un groupe interprétable est, à isogénie près, l'extension des points rationnels d'un groupe algébrique défini sur E par un quotient d'un groupe algébrique par un sous-groupe distingué constitué des points rationnels d'un groupe algébrique défini sur E ; c'est-à-dire pour tout groupe interprétable G on a*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H(E) \longrightarrow 0$$

avec

$$0 \longrightarrow N'(E) \longrightarrow V \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

où V , H et N' sont des groupes algébriques, les deux derniers définis sur E .

Si le groupe est interprétable sur une structure A , alors les groupes obtenus le sont sur $\text{acl}(A)$.

Démonstration. Soit G un groupe connexe interprétable dans une paire saturée (K, E) sur une structure A . Comme auparavant, on ajoute $\text{acl}(A)$ au langage. Soit α un générique de G . Par le fait 1.6, il existe une variété irréductible V définissable

sur E tel que α est algébrique sur un générique a de V et, de plus, l'uplet a est indépendant de E au-dessus de α .

Soit β un second générique de G au-dessus de a . Notons que

$$a \perp \beta \text{ et } a \perp \alpha \cdot \beta,$$

par transitivité de l'indépendance. Considérons alors $b \perp_{\beta} a$ tel que $(b, \beta) \equiv (a, \alpha)$.

À nouveau,

$$b \perp a \text{ et } b \perp \alpha \cdot \beta.$$

Prenons $ab \perp_{\alpha \cdot \beta} a, b$ tel que $(ab, \alpha \cdot \beta) \equiv (a, \alpha)$. Alors,

$$ab \perp a \text{ et } ab \perp b.$$

Étant donné un troisième générique γ de G au-dessus de a, b, ab , on en déduit que

$$a \perp \gamma \cdot \alpha, \quad b \perp \gamma \cdot \alpha, \quad b \perp \gamma \cdot \alpha \cdot \beta \text{ et } ab \perp \gamma \cdot \alpha \cdot \beta.$$

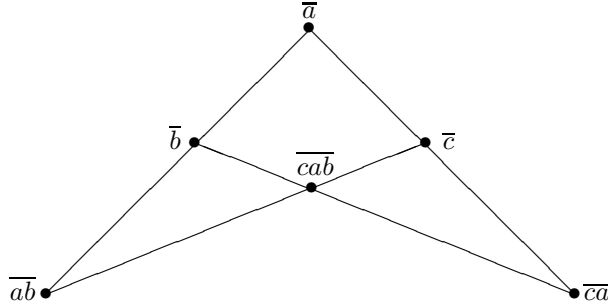
Considérons $c \perp_{\gamma} a, b, ab$ et $ca \perp_{\gamma \cdot \alpha} a, b, ab, c$ tels que $(c, \gamma) \equiv (ca, \gamma \cdot \alpha) \equiv (a, \alpha)$. Alors,

$$c \perp a, b, ab, \quad c \perp \gamma \cdot \alpha, \quad c \perp \gamma \cdot \alpha \cdot \beta, \quad ca \perp a, \quad ca \perp b, \quad ca \perp c \text{ et } ca \perp \gamma \cdot \alpha \cdot \beta.$$

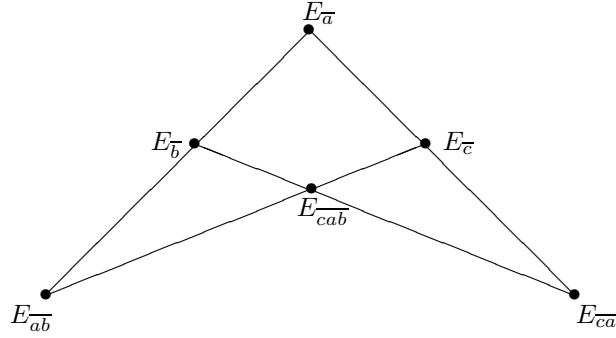
Au risque de fatiguer le lecteur sagace, prenons enfin $cab \perp_{\gamma \cdot \alpha \cdot \beta} a, b, ab, c, ca$ tel que $(cab, \gamma \cdot \alpha \cdot \beta) \equiv (a, \alpha)$. On a alors également,

$$cab \perp b, \quad cab \perp ca, \quad cab \perp c \text{ et } cab \perp ab.$$

Posons $\bar{a} = \text{acl}(a)$ et de même pour les uplets réels b, ab, c, ca, cab . Notons que, dans le diagramme suivant, deux points sur une même droite sont indépendants :



Par la suite, étant donné un imaginaire e , on dénotera les éléments réels algébriques sur e par $\text{acl}(e)$. Comme $a \perp_{\alpha} E$, on a $E_{\bar{a}} \subset \text{acl}(\alpha) \subset \bar{a}$ et donc $E_{\bar{a}} = \text{acl}(\alpha) \cap E$. De plus, par le lemme 1.3, comme $\bar{a} \perp \bar{b}$, on a $E_{\text{acl}(\bar{a}, \bar{b})} = \text{acl}_0(E_{\bar{a}}, E_{\bar{b}})$ et, en particulier, l'ensemble $E_{\bar{ab}} \subset \text{acl}_0(E_{\bar{a}}, E_{\bar{b}})$. Ceci est aussi valable pour tout autre couple de points dans une même droite du diagramme précédent. Du fait que α est générique au-dessus de $\beta, \gamma \cdot \alpha$, on en déduit que le point $E_{\bar{a}}$ est indépendant de la droite $E_{\text{acl}(\bar{b}, \bar{ca})}$; de même pour tout autre point n'appartenant pas à une droite. Dans la 0-configuration de groupe :



chaque point est de degré de transcendance fini, par les remarques 1.2 et 1.4. On obtient ainsi un groupe algébrique H défini sur E , dont un générique h dans $H(E)$ est 0-interalgébrique avec $E_{\bar{a}}$. Comme dans le cas précédent, on obtient une endogénie surjective définissable

$$G \rightarrow H(E),$$

et notons N la composante connexe de son noyau.

Montrons maintenant que la variété V associée à a est un groupe algébrique. Pour cela, il suffit de vérifier que les points a, b, ab, c, ca, cab obtenus auparavant donnent une 0-configuration de groupe sur l'ensemble de paramètres E . Notons que chaque deux points sont 0-indépendants sur E . De plus, le fait 1.6 entraîne l'existence d'un groupe algébrique connexe G_1 qui agit sur V , le tout défini sur E , tel que α est interalgébrique avec le paramètre canonique de l'orbite $G_1(E) \cdot a$. Comme α est algébrique sur b, ab , il suit que le rang de Morley $\text{RM}(a/b, ab)$ est borné par $\text{RM}(G_1(E))$, qui équivaut la dimension de Zariski de G_1 . Ainsi, par le fait 1.5, l'uple a est 0-algébrique sur E, b, ab , et de même pour les autres droites. On peut donc supposer que V est un groupe algébrique connexe ayant pour générique a . Puisque $a \downarrow_h^0 E$, on conclut que V est définissable sur $\text{acl}_0(h) = E_{\bar{a}}$.

Par [4, Lemme 1.5] appliqué au point (a, α) dans le translaté $V \times (N \cdot \alpha)$ défini sur $\text{acl}_0(h)$, on obtient une projection π de V sur N . Rappelons que cette projection provient du stabilisateur de $\text{tp}(a, \alpha / \text{acl}_0(h))$. Considérons n_1 un générique sur a de la composante connexe N_1 de $\ker(\pi)$. Alors, le point $(n_1, 1_N)$ étant dans ce stabilisateur, il suit que $n_1 a \in G_1(E) \cdot a$ et donc que N_1 est de rang fini. La proposition 2.1 et le fait 1.5 entraînent que N_1 est isogène aux points E -rationnels d'un groupe algébrique N' . \square

RÉFÉRENCES

- [1] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Die böse Farbe*, J. Inst. Math. Jussieu, **8**, 415-443 (2009).
- [2] I. Ben-Yaacov, A. Pillay, E. Vassiliev, *Lovely pairs of models*, APAL, **122**, 235-261, (2003).
- [3] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *Géométries relatives*, J. Europ. Math. Soc., to appear. HAL-00514393.
- [4] T. Blossier, A. Martin-Pizarro, F. Wagner, *À la recherche du tore perdu*, soumis. HAL-00758982.
- [5] E. Bouscaren, *The Group Configuration—after E. Hrushovski*, dans : *The Model Theory of Groups*, 199-209, Notre Dame Math. Lectures, 11, University of Notre Dame Press (1989).
- [6] S. Buechler, *Pseudoprojective Strongly Minimal Sets are Locally Projective*, JSL, **56**, 1184-1194, (1991).

- [7] F. Delon, *Élimination des quantificateurs dans les paires de corps algébriquement clos*, *Confluentes Math.*, **4**, 1250003, 11pp (2012).
- [8] E. Hrushovski, *Contributions to stable model theory*, Ph.D. Thesis, Berkely (1986).
- [9] H. J. Keisler, *Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfields*, *Michigan Math. J.*, **11**, 71–81, (1964).
- [10] A. Pillay, *Geometric Stability Theory*, Oxford Logic Guides, 33. *Oxford University Press* (1996).
- [11] A. Pillay, *Some foundational questions concerning differential algebraic groups*, *Pacific J. Math.*, **179**, 179–200 (1997).
- [12] A. Pillay, *Imaginaries in pairs of algebraically closed fields*, *APAL*, **146**, 13–20, (2007).
- [13] A. Pillay, E. Vassiliev, *Imaginaries in beautiful pairs*, *Illinois J. Math.*, **48**, 759–768 (2004).
- [14] B. Poizat, *Paires de structures stables*, *JSL*, **48**, 239–249, (1983).
- [15] B. Poizat, *Groupes Stables. Une tentative de conciliation entre la géométrie algébrique et la logique mathématique, Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah* (1987). Traduction anglaise : *Stable groups*. *Mathematical Surveys and Monographs*, 87. *Amer. Math. Soc.* (2001).
- [16] B. Poizat, *L'égalité au cube*, *J. Symb. Logic*, **66**, 1647–1676 (2001).
- [17] M. Ziegler, *A Note on generic Types*, unpublished, (2006), (<http://arxiv.org/math.LO/0608433>).

UNIVERSITÉ DE LYON ; CNRS ; UNIVERSITÉ LYON 1 ; INSTITUT CAMILLE JORDAN UMR5208,
43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918, F-69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE
E-mail address: `blossier@math.univ-lyon1.fr`
E-mail address: `pizarro@math.univ-lyon1.fr`