HAL open science

Une famille d'applications linéaires liée à l'hypothèse de Riemann généralisée

Eric Saias

▶ To cite this version:

Eric Saias. Une famille d'applications linéaires liée à l'hypothèse de Riemann généralisée. 2013. hal-00836097

HAL Id: hal-00836097
https://hal.science/hal-00836097

Preprint submitted on 20 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une famille d'applications linéaires liée à l'hypothèse de Riemann généralisée

Eric SAIAS

20 juin 2013

Résumé

Nous montrons qu'une manière d'aborder la piste presque-périodique pour l'hypothèse de Riemann généralisée consiste à étudier une certaine famille d'applications linéaires.

1 Introduction

Pour tous réels $1/2 < \alpha < \beta < 1$ et $\gamma > 0$, notons $A_{\alpha,\beta,\gamma} = (a_{\alpha,\beta,\gamma}(m,n))_{m,n\geq 1}$ la matrice infinie définie par

$$a_{\alpha,\beta,\gamma}(m,n) = \frac{(\frac{1}{mn})^{\alpha} - (\frac{1}{mn})^{\beta}}{\log(mn)} \cdot \frac{\sin[\gamma \log(m/n)]}{\log(m/n)}$$

avec les conventions $\frac{(\frac{1}{1})^{\alpha}-(\frac{1}{1})^{\beta}}{\log 1} = \beta - \alpha$ et $\frac{\sin[\gamma.0]}{0} = \gamma$.
Les matrices $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont symétriques définies positives. On peut donc définir leur décomposition de Cholesky $A_{\alpha,\beta,\gamma} = {}^tU_{\alpha,\beta,\gamma}\ U_{\alpha,\beta,\gamma}$ où $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ est triangulaire supérieure infinie avec des réels strictement positifs sur la diagonale. Nous montrons ici qu'une variante de la piste presque-périodique pour l'hypothèse de Riemann généralisée passe par une bonne connaissance des applications linéaires dont les $U_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont les matrices dans la base canonique.

2 Applications linéaires u_K et matrices U_K

Précisons le lien ici entre application linéaire et matrice. De manière générale désignons par K un compact d'intérieur non vide du demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$. On définit alors le produit scalaire de l'espace de Hilbert $L^2(K)$ par

$$\langle f, g\rangle_{L^2(K)} \;=\; \iint\limits_{\sigma+i\tau\in K} \overline{f(\sigma+i\tau)}\; g(\sigma+i\tau)\; d\sigma\; d\tau.$$

Posons $e_n := \frac{1}{n^s}$. La famille $(e_n)_{n\geq 1}$ est une famille libre de $L^2(K)$. On peut donc considérer la famille orthonormale $(e'_n(K))_{n\geq 1}$, obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt de la famille $(e_n)_{n\geq 1}$. Soit E l'espace vectoriel des suites x de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ dont l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $f_x(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k^s}$ est ≤ 0. Pour x dans E, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k^s}$ converge aussi dans $L^2(K)$. De plus $\|f_x(s)\|^2_{L^2(K)} = \sum_{n\geqslant 1} |\langle e'_n(K), f_x(s)\rangle_{L^2(K)}|^2$. On peut donc définir l'application linéaire

$$\begin{aligned} u_K : E &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}^*) \\ x &\longmapsto (\langle e'_n(K), f_x(s)\rangle)_{n\geq 1} \end{aligned}$$

On appelle base canonique la famille de suites $(\delta_n)_{n\geq 1}$ où $\delta_n(k)$ vaut 1 si $k = n$ et 0 sinon. Cette famille constitue une base de F, le sous-espace vectoriel de E formé des suites à support fini. On a $u_K(F) \subset F$; la restriction de u_K à F définit donc un endomorphisme de F : notons U_K sa matrice dans la base canonique.

Choisissons maintenant $K = \{s \in \mathbb{C} : \alpha \leq Re(s) \leq \beta \; et \mid Im(s) \mid \leq \gamma\}$. On vérifie alors que $\langle e_m, e_n\rangle_{L^2(K)} = 2a_{\alpha,\beta,\gamma}(m,n)$ et que $U_K = \sqrt{2}\; U_{\alpha,\beta,\gamma}$.

3 D'autres notations

Soit χ un caractère de Dirichlet. Rappelons que l'on note usuellement $L_\chi(s)$ le prolongement méromorphe de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s}$; on note également $\zeta(s) = L_1(s)$. Par ailleurs, pour tout réel t, nous notons ici $x_\chi(t)$ la suite définie par

$$x_\chi(t)(k) = \begin{cases} (-1)^k k^{it} & si\ \chi\ est\ principal \\ \chi(k)\; k^{it} & si\ \chi\ est\ non\ principal. \end{cases}$$

Posons $S = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < Re(s) < 1\}$ et désignons par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Notons enfin
$K(\alpha,\beta,\gamma) = \{s \in \mathbb{C} : \alpha \leq Re(s) \leq \beta \; et \mid Im(s) \mid \leq \gamma\}$.

4 Un critère de récurrence dans l^2 pour l'hypothèse de Riemann généralisée

Théorème. *Soit χ un caractère de Dirichlet. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

$$L_\chi(s) \text{ ne s'annule pas dans le demi} - \text{plan } \{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1/2\} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \text{Pour tous reels } \alpha, \beta, \gamma \text{ et } \varepsilon \text{ avec } 1/2 < \alpha < \beta < 1, \gamma > 0 \text{ et } \varepsilon > 0, \text{ on a} \\ \liminf_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \lambda\{t \in [-T, T] : \|u_{K(\alpha,\beta,\gamma)}(x_\chi(t) - x_\chi(0))\|_2 < \varepsilon\} > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration. Notons

$$L^*_\chi(s) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^s} = (2^{1-s} - 1)\zeta(s) & \text{si } \chi \text{ est principal} \\ L_\chi(s) & \text{si } \chi \text{ est non principal} \end{cases}$$

On munit l'ensemble $HolS$ des fonctions holomorphes sur S de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de S.

Montrons d'abord que (1) est équivalente à

$$\begin{cases} \text{pour tout voisinage } V \text{ de } L^*_\chi(s), \text{on a} \\ \liminf_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \lambda\{t \in [-T, T] : L^*_\chi(s - it) \in V\} > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dans le travail de Bagchi [2], on peut remplacer les limites supérieures par les limites inférieures sans changer les preuves. En effectuant cette substitution dans le *theorem 3.7*, on obtient directement l'équivalence de (1) et (3) dans le cas où χ est non principal. Pour χ principal, il faut travailler un poil plus. Toutes les assertions (1) correspondant à un caractère principal sont équivalentes entre elles, et en particulier à celle correspondant au caractère de Dirichlet modulo 2. En remplaçant limite supérieure par limite inférieure dans le *theorem 4.11* de [2], on obtient donc que (1) entraîne (3). Réciproquement supposons (3). En reprenant alors le raisonnement du *theorem 3.7* de [1] qui utilise le théorème de Rouché, on obtient l'hypothèse de Riemann pour $\zeta(s)$, et donc aussi (1).

Soient K et K' deux compacts de S tels que $K' \subset \mathring{K}$. Il existe alors (cf. *lemma 4.8.6* de [3]) une constante $c > 0$ telle que pour toute fonction holomorphe $f(s)$ sur S, on a $max_{s \in K'}|f(s)| \leq c\|f\|_{L^2(K)}$. Cela permet de vérifier que la topologie sur $Hol(S)$ définie par la famille de normes $\|f\|_{L^2(K(\alpha,\beta,\gamma))}$ où $1/2 < \alpha < \beta < 1$ et $\gamma > 0$, coïncide avec la topologie de la convergence

uniforme sur les compacts de S. On peut donc récrire (3) sous la forme

$$\begin{cases} \textit{Pour tous reels } \alpha, \beta, \gamma \textit{ et } \varepsilon \textit{ avec } 1/2 < \alpha < \beta < 1, \gamma > 0 \textit{ et } \varepsilon > 0, \textit{ on a} \\ \liminf_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \lambda \{ t \in [-T, T] : \| L_\chi^*(s - it) - L_\chi^*(s) \|_{L^2(K(\alpha,\beta,\gamma))} < \varepsilon \} > 0 \end{cases}$$

Or en notant $K = K(\alpha, \beta, \gamma)$, on a

$$\| L_\chi^*(s - it) - L_\chi^*(s) \|_{L^2(K)} = \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_\chi(t) - x_\chi(0))(k)}{k^s} \|_{L^2(K)}$$

$$= \| \sum_{n \geqslant 1} (u_K(x_\chi(t) - x_\chi(0)))_n \; e'_n(K) \|_{L^2(K)} = \| u_K(x_\chi(t) - x_\chi(0)) \|_2 \; .$$

Cela conclut la preuve du théorème.

□

Je tiens ici à remercier Pierre Mazet, Damien Simon et Andreas Weingartner, d'une part pour les discussions que nous avons eues sur ce sujet, et d'autre part pour leur LaTeXaide !

Références

[1] B. Bagchi, *A joint universality theorem for Dirichlet L-functions*, Math. Z., **181** (1982), 319-334.

[2] B. Bagchi, *Recurrence in topological dynamics and the Riemann Hypothesis*, Acta Math. Hung. **50** (1987), 227-240.

[3] A. Berenstein and R. Gay, Complex Variables An Introduction, Graduate Texts in Mathematics 125, Springer, 1991.