



**HAL**  
open science

# Analyse tensorielle des réseaux hybridée comme outil théorique pour la CEM et l'électromagnétisme.

Olivier Maurice, Alain Reineix

► **To cite this version:**

Olivier Maurice, Alain Reineix. Analyse tensorielle des réseaux hybridée comme outil théorique pour la CEM et l'électromagnétisme.. CEM2010, Apr 2010, Limoges, France. pp.A.Reineix, O.Maurice. hal-00835062

**HAL Id: hal-00835062**

**<https://hal.science/hal-00835062>**

Submitted on 18 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ANALYSE TENSORIELLE DES RÉSEAUX HYBRIDÉE COMME OUTIL THÉORIQUE POUR LA CEM ET L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Olivier Maurice\* - Alain Reineix \*\*

(\*) : Géraç, 3 avenue Jean d'Alembert ZAC Pissaloup 78190 Trappes olivier.maurice@gerac.com

(\*\*) : Xlim, Faculté des Sciences, 123 Av. Albert Thomas 87060 Limoges Cedex

**Résumé.** L'analyse tensorielle des réseaux établie par Gabriel Kron [1] a aujourd'hui montré sa capacité à traiter des problèmes complexes de CEM avec une précision et une efficacité remarquables [2][3][4]. Sous cette analyse, l'espace préférentiel est l'espace des cycles sous lequel les propriétés vectorielles du champ électrique tout autant que le scalaire des charges n'est pas directement visible. Or il peut être intéressant de garder cette visibilité par exemple pour dissocier les effets des différents types de champ ou exploiter les deux types de couplages en parallèle. Pour cela on propose dans cet article de concevoir une topologie multispatiale où chaque type d'espace est manipulé en parallèle. On présente les deux espaces vectoriel et tensoriel ainsi que leurs métriques puis on introduit l'algèbre de ce nouvel espace hybride. On discute de ses propriétés pour ensuite discuter des avantages que présente ce formalisme également pour l'emploi de termes de couplages entre modèles physiques hétérogènes et définis sur des domaines bornés.

## I. INTRODUCTION

Les lois de Kirchhoff peuvent être développées dans un espace où n'apparaissent que des nœuds et des branches. Les logiciels comme SPICE [5] pour citer le précurseur, sont basés sur la résolution d'un système d'équations différentielles construites sur ces lois. Une difficulté qui peut apparaître à cette construction est le besoin de décrire des sources simultanément en courant et en tension. Les sources de courant sont issues des équations de Maxwell sous la forme de la dérivée temporelle d'un flux de champ électrique ( $\int_V dV \epsilon_0 \partial_t \nabla \cdot \vec{E}$ ), alors que les sources de tension sont des variations temporelles d'un flux de champ magnétique ( $-\int_S dS \partial_t \vec{B}$ ). Ces propriétés intrinsèques se traduisent en topologie par des sources respectivement définies dans l'espace des nœuds et des cycles. Dans la méthode de Kron en général, l'espace de résolution se trouve être l'espace des mailles (cycles). Le but de la définition d'un espace hybride est de faire cohabiter des sources, métriques et potentiels dans l'espace des nœuds et leurs homologues en sources, métriques et fêm (forces électromotrices) dans l'espace des cycles (mailles). Nous donnerons un exemple dans le cas d'un couplage d'une onde IEMN (impulsion électromagnétique d'origine nucléaire) sur un boîtier d'équipement.

## II. CARACTÈRES TOPOLOGIQUES DES INDUCTIONS

Lorsqu'un champ polaire illumine une portion de matériaux, cette portion est soumise au travail de la force de Coulomb et l'on peut écrire dans ce volume :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow q = \epsilon_0 \int_S \vec{ds} \cdot \vec{E} \quad (1)$$

De par la conservation de la charge, la variation temporelle du champ engendre un courant source qui est à l'origine du générateur de courant équivalent au travail du champ sur la portion de matériau.

$$i = \partial_t q = \epsilon_0 \int_S \vec{ds} \cdot \partial_t \vec{E} \quad (2)$$

Les charges sont définies sur les nœuds dans la topologie des graphes. La matrice d'incidence traduit d'ailleurs l'équation de conservation de la charge au niveau d'un nœud. Le courant créé est disposé entre deux nœuds, il concerne donc l'espace des paires de nœuds [6]. A contrario, le rotationnel d'un vecteur divergent étant nul, on ne peut définir ce dernier dans l'espace vectoriel des cycles. Dans cet espace par contre on va construire la circulation fermée sur une maille du champ électrique, c'est-à-dire la fêm induite dans la maille par un champ magnétique variable externe. On écrit :

$$e = - \int_{\gamma} d\vec{\gamma} \cdot \partial_t \vec{A} \quad (3)$$

le contour curviligne  $\gamma$  suivant le trajet du cycle considéré. Ces propriétés topologiques ont un caractère profond puisqu'en formulation des 4-vecteurs, le tenseur du champ électromagnétique comporte les composantes temporelles (polaires) et spatiales (axiales) du champ successivement rapportées aux variations temporelles et spatiales du 4-potential vecteur. La composante temporelle est fondamentalement polaire alors que la composante spatiale est axiale.

## III. PRISE EN COMPTE DES SOURCES DE COURANT PAR PARTAGE DES MATRICES

Pour prendre en compte des sources de courant, Angot [7] a proposé un sectionnement des tenseurs en partant des sources de courant comme de composantes particulières connues du vecteur des sources. La démarche usuelle [6] consiste à partir de l'expression généralisée de la branche de Kirchhoff :

$$z_{ik} \dot{v}^k - e_u = v_u \quad (4)$$

On remplace les courants de branches (vectoriels polaires) par les courants de cycles (modaux) en utilisant la connexion :

$$\dot{v}^k = L_{\mu}^k \dot{v}^{\mu} \quad (5)$$

En remplaçant dans 4 et en multipliant les deux termes par la connexion, on trouve :

$$L_{\alpha}^u z_{ik} L_{\mu}^k \dot{v}^{\mu} = L_{\alpha}^u (v_u + e_u) \quad (6)$$

Nous avons vu que par définition  $L_{\alpha}^u v_u = 0$ , sauf pour les fém sources  $e$  et pour les différences de potentiels  $v$  attachées aux sources de courant que nous notons  $J$ . En gardant ces seuls termes et en décomposant le courant  $i$  en ses termes inconnus et sources (connus) on écrit :

$$z_{\mu[\dots\xi]v[\dots\beta]} \left( \dot{v}^{[\dots\xi]} + J^{[\dots\beta]} \right) = (e_{[\mu\dots]} + v_{[\dots\xi\dots]}) \quad (7)$$

On résout dans un premier temps les termes connus d'où l'on déduit les courants de cycles  $i$  par :

$$(\dot{v}^{\nu}) = y^{\nu\mu} (e_{\mu} - z_{\mu\beta} J^{\beta}) \quad (8)$$

$y$  étant l'admittance : l'inverse de  $z$ . On peut ensuite en déduire les différences de potentiels en résolvant le deuxième groupe d'équations :

$$z_{\mu\nu} \dot{v}^{\nu} + z_{\mu\beta} J^{\beta} = v_{\mu} \quad (9)$$

Mais sous ce formalisme, tous les vecteurs sont ramenés à des vecteurs axiaux puisque l'on travaille uniquement dans l'espace des cycles. On « perd » donc le détail des propriétés physiques sous l'effet d'enveloppe des cycles qui sont une variété de branches.

#### IV. DÉFINITION DES DEUX ESPACES

L'espace que l'on se propose de définir associe les avantages d'une représentation dans l'espace nodal (espace des paires de nœuds) et l'espace modal (espace des cycles) ainsi que les interactions entre ces deux espaces. Nous allons rappeler les représentations dans ces deux espaces et les interactions que l'on peut définir.

##### IV.1. Espace nodal

La conservation du flux en un nœud induit la première loi de Kirchhoff. Suivant cette loi, l'apport de matière en un nœud  $s^a$  doit être égal à toutes les consommations de matière au même nœud. Ces consommations sont concrétisées par l'ensemble des courants (flux) de branches connectés à ce nœud [6] :

$$s^a = B_{\alpha}^a \dot{v}^{\alpha} \quad (10)$$

Cette somme, discrète, peut être exprimée comme le produit contracté d'une connexion  $B$  souvent appelée matrice d'incidence, par le vecteur des flux  $i$ . Ce vecteur s'appuyant sur le vecteur géométrique défini entre les nœuds, son caractère contravariant est évident. Les flux de branches s'expriment à leur tour suivant l'inverse d'une admittance en fonction des différences de potentiels de branches [7] :

$$\dot{v}^{\alpha} = Y^{a\alpha} v_u \Rightarrow s^a = B_{\alpha}^a Y^{a\alpha} v_u \quad (11)$$

Ces différences de potentiels s'expriment à leur tour via la matrice d'incidence en fonction des potentiels de nœuds :

$$v_u = B_{u.}^m \psi_m \quad (12)$$

Par remplacement et en l'absence de sources de tension de branche, on trouve le lien entre sources et potentiels ainsi que la définition de l'inverse de la métrique (admittance) dans l'espace des nœuds :

$$s^a = B_{.q}^a Y^{qu} B_{u.}^m \psi_m \Rightarrow Y^{am} = B_{.q}^a Y^{qu} B_{u.}^m \quad (13)$$

Finalement l'espace nodal est décrit par l'équation entre sources de nœuds et potentiels de nœuds :

$$s^a = Y^{am} \psi_m \quad (14)$$

Notons que cette équation peut être sur-dimensionnée. Une façon de lever ce sur-dimensionnement consiste à choisir un nœud de référence et/ou d'utiliser la pseudo-inversion.

##### IV.2. Espace modal

Dans l'espace des cycles encore appelé espace des mailles, en l'absence de sources de courant de branche, on peut écrire la relation entre différences de potentiels de branches et courants de branches :

$$z_{ik} \dot{v}^k - e_u = v_u \quad (15)$$

Sur un cycle qui correspond à une circulation fermée de branche on peut écrire la connexion entre courants de cycles (mailles) et courants de branches :

$$\dot{v}^k = L_{\alpha}^k \dot{v}^{\alpha} \quad (16)$$

Où l'on repère par une lettre grecque les indices se rapportant à l'espace des cycles. On peut intégrer les deux membres de l'équation 16 pour obtenir :

$$L_{\alpha.}^u (z_{uk} \dot{v}^k - e_u) = L_{\alpha.}^u v_u \Rightarrow L_{\alpha.}^u z_{uk} \dot{v}^k = L_{\alpha.}^u e_u \quad (17)$$

L'intégrale sur un parcours fermé d'un gradient étant nul, le terme de droite est nul. Il suffit alors de remplacer le courant de branche par l'expression 17 pour obtenir :

$$L_{\alpha.}^u z_{uk} L_{\nu}^k \dot{v}^{\nu} = L_{\alpha.}^u e_u \Rightarrow z_{\alpha\nu} \dot{v}^{\nu} = e_{\alpha} \quad (18)$$

Cette dernière équation constitue l'équation fondamentale reliant fém de mailles aux courants de mailles dans l'espace des mailles. La métrique  $z$  redonnant les opérateurs de Lagrange du circuit, donc de fait les modes propres, on peut aussi appeler cet espace (cette variété) l'espace modal.

##### IV.3. Intersection des deux espaces

Les courants vectoriels (de branche) s'obtiennent en sommant d'une part les produits admittances par différence de potentiels de nœuds et d'autre part le produit de la connexion branches – cycles par les courants de cycles (modaux). Ainsi, une fois calculé les ddp entre nœuds et les courants de mailles, on remonte aux courants de branches qui sont les variables primaires pour modifier les propriétés des impédances de branches.

## V. 1° APPLICATION

Considérons une portion de ligne de hauteur H (axe x) et longueur L (axe z). Cette ligne est illuminée par un champ électromagnétique parallèle à sa hauteur et se propageant suivant l'axe de sa longueur. La divergence du champ électrique et le rotationnel du champ magnétique constituent les sources  $s$  et  $e$  du schéma électrique équivalent au problème [8]:

$$\begin{aligned} -i\omega\epsilon_0 \iint_{(y,z)} dydz E_x &= s \\ -i\omega\mu_0 \iint_{(x,z)} dx dz H_y &= e \end{aligned} \quad (19)$$

Les grandeurs  $E_x$  et  $H_y$  étant complexes. Une ligne à pertes chargée par des résistances possède une métrique parfaitement symétrique et une matrice bande diagonale dans l'espace vectoriel. Elle a l'allure ( $p$  est l'opérateur de Laplace):

$$Z = \begin{bmatrix} R+Ip & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{Cp} & \dots \\ 0 & 0 & R+Ip \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix} \quad (20)$$

La connexion branches-maillages  $\wp$  est elle-aussi répétitive est de symétrie autour d'une bande diagonale :

$$\wp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & \dots \end{bmatrix} \quad (21)$$

En appliquant la transformation  $\wp^T Z \wp$  on trouve l'expression de la métrique dans l'espace modal qui conserve la symétrie de bande :

$$\wp_{\mu}^a Z_{ab} \wp_{\nu}^b = \begin{bmatrix} R+Ip + \frac{1}{Cp} & \frac{-1}{Cp} & \dots \\ \frac{-1}{Cp} & R+Ip + \frac{1}{Cp} & \frac{-1}{Cp} \\ 0 & \frac{-1}{Cp} & R+Ip + \frac{1}{Cp} \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix} \quad (22)$$

Une telle matrice peut être très facilement implémentée numériquement. Dans l'espace nodal, la relation de conservation de la charge au niveau de chaque nœud central de chaque cellule conduit à une connexion  $\Delta$  branches-nœuds également de symétrie de bande :

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & & & & \dots \end{bmatrix} \quad (23)$$

On choisit le nœud commun de retour de masse comme nœud de référence pour lever le sur-dimensionnement de l'espace nodal. L'admittance nodale retrouve aussi une symétrie de bande avec l'allure :

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{R+Ip} + Cp & \frac{-1}{R+Ip} & 0 & \dots \\ \frac{-1}{R+Ip} & \frac{2}{R+Ip} + Cp & \frac{-1}{R+Ip} & \dots \\ 0 & \frac{-1}{R+Ip} & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (24)$$

Le système d'équations hybridé solution du couplage entre le champ et la ligne modélisée par un filtre à pertes en échelle est donné par :

$$\begin{cases} s^a = Y^{ab} \Psi_b \\ e_{\mu} = Z_{\mu\nu} i^{\nu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^a \\ e_{\mu} \end{cases} = \begin{bmatrix} Y^{ab} & 0 \\ 0 & Z_{\mu\nu} \end{bmatrix} \begin{cases} \Psi_b \\ i^{\nu} \end{cases} \quad (25)$$

Les objets du terme de droite de l'équivalence ne sont pas des tenseurs classiques, car ils ne résultent pas par exemple pour le terme source du produit tensoriel du vecteur contravariant des sources de courants par le vecteur covariant des fém. Il faudrait pour cela créer des fém unité de façon à retrouver artificiellement les termes, ce qui n'a aucune raison d'être physiquement. Cette différence justifie de l'appellation de tenseurs hybrides. Le système 25 est incomplet. S'il résout les potentiels aux nœuds et les courants de mailles, il ne donne pas les courants vectoriels originels. Il faut le compléter de l'équation de superposition qui combine les résultats pour donner les courants résultants :

$$i^{\alpha} = \wp_{\alpha}^a i^{\alpha} + (Z_{ba})^{-1} \Delta_{.q}^b \Psi_q \quad (26)$$

Le calcul éventuel d'un rerayonnement s'effectue par contre naturellement dans la base hybride : les potentiels aux nœuds engendre des dipôles électrique rayonnants et les courants de mailles les dipôles magnétiques rayonnants. Cet espace des dipôles constitue d'autres variétés de l'espace nodal.

## VI. 2° APPLICATION

Une autre manière de modéliser les lignes passe par l'usage des modèles de Branin [9]. Les tensions aux extrémités d'une ligne sont données par le couple de relations suivant :

$$\begin{cases} g(L) = (V(0) + Z_c i(0)) * \delta_{\frac{L}{v}} \\ g(0) = (V(L) - Z_c i(L)) * \delta_{\frac{L}{v}} \end{cases} \quad (27)$$

Où  $g(0)$  et  $g(L)$  sont les générateurs des schémas de Branin en extrémités de ligne,  $V(0)$  et  $V(L)$  les différences de potentiels aux nœuds de ces schémas et  $i(0)$ ,  $i(L)$  les courants des branches des conditions limites de la ligne.  $L$  est la longueur de la ligne et  $v$  la vitesse de groupe dans la ligne. Dans ce schéma apparaît clairement la décomposition dans les deux espaces nodal et modal. Le courant d'extrémité dépendant des conditions limites est parfaitement décrit par chaque courant de maille rejoignant l'extrémité de la ligne et sa charge. La différence de potentiel aux nœuds se déduit des potentiels de nœuds. Le schéma de Branin est donc de fait une application directe de l'hybridation des espaces. Les

générateurs E sont décrits dans l'espace des branches. Ils sont donc la traduction en tension des équations de superposition 26. Dans un programme, le calcul de ces générateurs est rigoureux puisqu'ils sont retardés par rapport aux grandeurs qui les définissent. Dans une boucle de calcul en différences finies temporelles, ils apparaissent donc naturellement en synthèse des calculs de potentiels de nœuds et courants de mailles effectués précédemment. Les deux équations de continuité dans l'espace des branches (vectoriel) se regroupent en un système généralisé :

$$\begin{cases} \tilde{t}^a = Y^{ab} \Delta_b^q \Psi_q + \mathcal{P}_{\beta}^a \tilde{t}^\beta \\ \tilde{g}_\mu = \Delta_\mu^q \Psi_q + Z_{\mu\nu} L_\nu^v \tilde{t}^\beta \end{cases} \quad (28)$$

## VII. COUPLAGES ENTRE VARIÉTÉS

On peut vouloir traduire la création d'un courant de maille par un débit de charges et inversement calculer la création d'une différence de potentiels à partir d'une fém. Dans le premier cas ce peut-être aussi la création d'un flux de maille à partir d'un scalaire comme la température par exemple. Pour ce faire, il suffit de compléter la h-métrique par deux termes matriciels qui vont assurer le couplage entre les vecteurs hétérogènes :

$$\begin{matrix} Y^{ab} & \Gamma_{\sim\nu}^a \\ \Gamma_{\mu\sim}^{-b} & Z_{\mu\nu} \end{matrix} \quad (29)$$

Cette métrique résulte comme usuellement d'une transformation depuis l'espace vectoriel en écrivant :

$$\begin{pmatrix} Y^{ab} & \Gamma_{\sim\nu}^a \\ \Gamma_{\mu\sim}^{-b} & Z_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{\sim\alpha}^a & 0 \\ 0 & L_{\mu}^{\sim\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^{ab} & \Gamma_{\sim\nu}^a \\ \Gamma_{\mu\sim}^{-b} & Z_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\beta\sim}^{-b} & 0 \\ 0 & L_{\sim\nu}^\beta \end{pmatrix} + \dots \quad (29)$$

$$\dots \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{\sim\nu}^a \\ \Gamma_{\mu\sim}^{-b} & 0 \end{pmatrix}$$

Le couplage entre les espaces ne peut qu'être ajouté après coup, une fois les transformations opérées. La création des h-tenseurs va permettre ici de travailler simultanément sur plusieurs espaces de descriptions sans se préoccuper de l'homogénéité des dimensions. Nous allons voir une application simple en deux physiques : CEM et thermique.

## VIII. EXEMPLE D'USAGE AVEC ESPACES COUPLÉS

Considérons le cas simple de résistances thermiques pour un circuit électronique dont on étudie par ailleurs les interactions en CEM. Entre la puissance électrique engendrée dans le circuit et les différences de températures nous avons une relation scalaire :

$$P^\mu = \gamma^{\mu\nu} \Delta Q_\nu \quad (30)$$

$\gamma$  a ici la dimension d'une conductance thermique. P est le vecteur des flux de puissance développés par effet Joule et  $\Delta Q$  le vecteur des différentiels de températures. La

température étant un scalaire il est naturel de la traiter dans l'espace nodal. En choisissant un nœud de référence arbitrairement forcé à 0 degré kelvin, on écrit simplement l'équation du bilan puissance – température du circuit sous la forme :

$$P^\mu = \gamma^{\mu\nu} Q_\nu \quad (31)$$

En parallèle de ce calcul on effectue dans l'espace modal uniquement (ici pour simplifier l'explication) le calcul des interactions en CEM. Ces interactions sont synthétisées sous la forme d'une équation similaire à l'équation 18. De cette équation, on va déduire à chaque instant les valeurs des courants modaux. De ces courants modaux on déduit les courants vectoriels dont découlent la puissance de l'effet Joule. On résout donc le système :

$$\begin{pmatrix} P^\mu \\ e_{\mu\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & Z_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_\nu \\ \tilde{t}^\nu \end{pmatrix} \quad (32)$$

Mais sous cette forme n'apparaît pas le couplage entre les deux physiques (on appelle physique une science avec ses notations, son heuristique et sa symbolique). Il faut remplacer le terme source dans l'espace nodal par un opérateur qui le déduit d'une fonction du type :

$$P^\mu \rightarrow \text{forme} : R(i)^2 \Rightarrow \dots \quad (32)$$

$$\dots P^\mu = R_{\sim\nu}^\mu \tilde{t}^\nu \quad \text{avec} : R_{\sim\nu}^\mu = B_{\sim a}^\mu \delta^{aa} R_{ab} (L_{\sim\nu}^b \tilde{t}^\nu)^2$$

Par double usage de connectivités et de la métrique unitaire on exprime directement le couplage entre la puissance source de température dans l'espace nodal et le courant vectoriel issu des modes. L'équation 31 se transforme alors dans sa forme couplée :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mu\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu} & -R_{\sim\nu}^\mu \\ 0 & Z_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_\nu \\ \tilde{t}^\nu \end{pmatrix} \quad (33)$$

Le système a une h-métrique non symétrique ce qui est autorisé par le formalisme de Kron de toute façon non Riemannien. Dans l'expression du terme de couplage un changement d'échelle (c'est à dire un changement de variété) d'ordre 2 est effectué (on fait usage de 2 connectivités pour revenir dans l'espace de travail du terme source).

## IX. NOTATION POUR UNE GÉNÉRALISATION

La notation indicielle des objets tensoriels revêt un caractère plus qu'anecdotique. Il ne s'agit pas seulement d'une astuce mais bien d'une technique permettant de produire des expressions, des équations dont la richesse n'a d'égal que la capacité prédictive dans l'étude théorique. Comme souligne Penrose [10], cette notation n'est pas appréciée des mathématiciens et pourtant, bien des physiciens depuis Einstein ont constaté que « l'algèbre tensoriel et la notation indicielle connaît mieux la physique que le physicien lui-même » pour reprendre une expression de Langevin. Si les h-tenseurs ne sont pas des tenseurs entre autre car les termes de couplages ne sont pas forcément invariants lors d'un changement d'axes, il n'en reste pas moins que l'on peut leur appliquer

les mécanismes de transformation classiques sous condition d'être rigoureux sur les quantités manipulées et leurs espaces respectifs d'appartenance. On est donc rapidement tenté de créer des vecteurs et des matrices de tenseurs sous la convention que l'on réserve par exemple les deux espaces indiciaux de gauche à une première variété et les deux suivants à une deuxième variété, etc. Pour mettre en évidence ces séparations on peut utiliser symboliquement des crochets précédés d'un référent pour l'espace de travail pour grouper les couples d'indices comme des indices simples. L'équation 3 s'écrirait sous cette convention d'écriture :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e_{\mu\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^{uv} & -R_{\sim v}^u \\ 0 & Z_{\mu v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_v \\ i^v \end{pmatrix} \Leftrightarrow S_{2[\mu\sim]}^{0[u]} = \zeta_{\sim 2[\mu v]}^{0[uv]} V_{0[v]\sim}^{2[v]} \quad (34)$$

0 étant le référent pour l'espace nodal, 1 pour l'espace vectoriel et 2 pour l'espace modal. Cette notation permet d'exprimer de façon très condensée toute l'information des objets manipulés. On utilise par ailleurs en pratique des indices placés sur des parenthèses qui entourent les h-tenseurs pour faire référence aux coordonnées spatio-temporelle de l'espace géométrique sous-jacent au graphe.

## X. ROTATIONS

Les transformations vues équation 29 sont des translations d'axes. On peut envisager effectuer des rotations et faire usage de connectivités qui dépendent du temps ou de l'espace. Dans ce cas la h-métrie peut être décomposée par exemple en somme d'une h-métrie statique et d'une h-métrie faisant intervenir des dérivations (nous limitons l'exemple formulé ici aux dérivations temporelle) :

$$\zeta_{\sim 1[cd]}^{1[ab]} = \zeta_{\sim 1[cd]}^{r1[ab]} + \zeta_{\sim 1[cd]}^{r1[ab]} \partial_t \quad (35)$$

L'espace de travail ici est l'espace vectoriel, centré en indice. La h-métrie regroupe à la fois une métrique et son inverse. Reprenons la démarche d'application de la métrique dans un changement d'axe généralisé comme fait précédemment équation 16. On s'aperçoit alors que l'on peut utiliser pour les matrices de transformation une écriture très explicite qui respecte l'organisation de la matrice en terme d'indices lignes-colonnes et indique en plus directement les opérations de transformations réalisées :

$$\begin{aligned} C_{\mu < c}^{u < a} \zeta_{\sim 1[cd]}^{1[ab]} \left( C_{d > v}^{b > v} \right) \rightarrow \dots \\ \dots C_{\mu < c}^{u < a} \left[ \zeta_{\sim 1[cd]}^{r1[ab]} + \zeta_{\sim 1[cd]}^{r1[ab]} \partial_t \right] \left( C_{d > v}^{b > v} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

L'application du h-opérateur métrique sur la h-matrice de transformation C engendre deux types d'objets dès lors que ces matrices dépendent du temps (ou de l'espace-temps en général). Appliquée à un h-vecteur comme dans 34 on retrouve l'expression invariante de la relation entre sources et inconnues additionnée d'un terme provenant de la dérivée de la h-transformation. C'est ce dernier terme qui crée, lorsque l'on exprime la transformation par le

Jacobien des dérivées partielles, les coefficients de Christoffel, non tensoriels [11].

## XI. CONNECTIVITÉ DYNAMIQUE : OBTENTION D'UN OUTIL GÉNÉRALISTE

Certains phénomènes physiques ne sont visibles que pour des domaines limités du temps ou de l'espace. Ainsi un modèle de Branin de propagation en structure guidée n'est-il efficace que pour des domaines du temps où les ondes, relativement à la longueur de ligne, engendrent des ondes propagées et non évanescentes (existence d'une composante transverse). On peut vouloir basculer d'un modèle de propagation conduite (branche unique) vers un modèle de propagation transverse suivant les caractéristiques des sources et de la géométrie. D'une manière générale on peut vouloir changer de modèles suivant des domaines définis. De même l'espace des moments [12] n'est-il intervenant que pour des domaines rattachés aux ondes de champ lointain. Ces basculements sont possibles dans le formalisme de Kron. Même si Mr Kron ne les avait pas utilisés dans ce sens, il avait mis en évidence la possibilité de définir des fonctions de connexions et pas seulement des connexions binaires. Ces connexions dynamiques doivent avoir des propriétés de raideur adéquates pour ne pas engendrer de divergences dans les superpositions de domaines. En particulier, ces connexions dynamique vont forcément apparaître comme des rotations, mais les termes de Christoffel qu'elles peuvent engendrer n'ont pas forcément de sens physique. Il faut donc veiller à maîtriser ces termes.

Dans les connectivités dynamiques, les 1, 0 et -1 sont remplacés par des fonctions qui sélectionnent les connexions suivant des valeurs de l'espace ou du temps. Ces fonctions ont pour valeurs limites les valeurs statiques de la connexion, donc soit 1 ou -1 ou 0, sauf à ce qu'un opérateur métrique existe conjointement sur plusieurs domaines. Cette gestion par domaine peut être facilitée si l'on décompose les sources sur des fonctions propres à chaque domaine. Dans ce cas, les connexions sont des fonctions de Dirac qui sélectionnent les valeurs adéquates suivant le domaine courant. Parmi les décompositions possibles on a évidemment la décomposition en série de Fourier, mais qui ne sont réellement exploitables directement que si l'on travaille uniquement dans le domaine harmonique. On a aussi essayé avec succès des décompositions en gaussiennes. Cette décomposition a l'énorme avantage d'autoriser le travail simultané dans les deux domaines temporel et harmonique. Ainsi, lorsque les modèles sont plus particulièrement définis dans le domaine harmonique on transforme localement (à un instant donné) les vecteurs temporels en vecteurs fréquentiel pour ressortir une fonction de transfert et un résultat que l'on réintègre dans le temps. Cette approche s'apparente un peu aux ondelettes, mais on ne cherche pas ici tant à décrire un spectre instantané qu'à découper le domaine du temps en sous-domaine sur lesquels les modèles physiques varient [13]. Sous cette décomposition, chaque instant s se

décline comme un fonction gaussienne  $G(t-s)$  retardée en  $s$  et pourvue d'une amplitude  $A(s)$ . Le temps  $t$  couvre le domaine complet de  $s$  mais  $s$  apparaît comme un sous-échantillonnage de  $t$ . Les composantes de la matrice de connexion dynamique sont des fonctions portées. Prenons par exemple le graphe présenté figure 1.

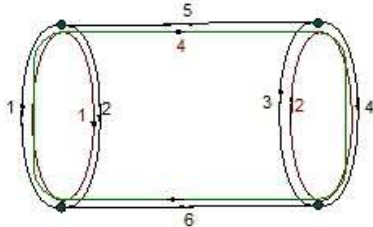


Fig.1 Schéma à connectivité dynamique

On imagine que par un processus physique donné, les branches 1 et 4 sont connectées à la maille 1 uniquement lorsque le temps dépasse une valeur fixée par la réponse indiciaire, et elles communiquent via les branches 2 et 4 et les mailles 1 et 2 pour les temps inférieurs à la valeur de basculement. Les matrices de connectivité ont deux formes :

$$\text{forme 1 : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{forme 2 : } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Ces deux formes se synthétisent en une seule connectivité dynamique définie, si  $s_0$  est le temps de basculement, par :

$$\wp = \begin{bmatrix} \Pi_{\in [s_0, \infty]} & \Pi_{\in [0, s_0]} & 0 \\ \Pi_{\in [s_0, \infty]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{\in [s_0, \infty]} \\ 0 & \Pi_{\in [0, s_0]} & \Pi_{\in [s_0, \infty]} \end{bmatrix} \quad (38)$$

L'avantage de cette description est qu'étant invariante dans le temps, elle n'engendre pas de termes supplémentaires dans une rotation. Les valeurs de  $s$  sont les indices des fonctions gaussiennes liées.

## XII. CONCLUSION

L'ingénieur veut pouvoir disposer d'un formalisme qui le guide et l'aide à prédire le comportement et les interactions au sein d'un système dit complexe [14] et régit par diverses physiques et échelles. Nous proposons une structure d'objets tensoriels qui peut répondre à ce cahier des charges en facilitant l'insertion de modèles physiques analytiques ou numériques hétérogènes, c'est à dire construits sur des unités et des jargons propres à un métier, qui garde toute la puissance de l'approche Diakoptique de Mr. Gabriel Kron [15] mais nous proposons aussi de l'étendre par l'usage de connectivité par domaines, ce qui revient à créer une Diakoptique dynamique. Ces possibilités permettent d'envisager l'étude et l'analyse théorique de tout agencement pour ensuite réaliser des optimisations et pouvoir exploiter au

mieux les outils numériques en vue d'une simulation elle-même complexe, basée sur un choix justifié d'architectures et de solutions d'automatique. Parmi les nombreux travaux à venir viennent les actions pour éprouver ce formalisme et l'implémenter numériquement, les calculs étant rapidement impensable manuellement.

## REFERENCES

- [1] G.Kron, "Tensorial analysis of network", GE edition, Senectasy, 1939.
- [2] S.Leman, "Contribution à la résolution de problèmes de compatibilité électromagnétique par le formalisme des circuits électriques de Kron", Thèse soutenue au laboratoire TELICE, 14 Nov. 2009.
- [3] S.Dubois, O.Maurice, « General EMC techniques for power systems in the conception phase », ESA Workshop, Firenze, April 2009.
- [4] A.Alaeldine & all., « EMC oriented analysis of electric near field in high frequency », HaL server, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00356161/fr/>
- [5] SPICE, Berkeley's server : <http://bwrc.eecs.berkeley.edu/Classes/icbook/SPICE/>
- [6] Kauffmann, « Mise en équation des réseaux électriques en régime transitoire par la méthode tensorielle », thèse, serveur TeL, [http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=ouch0ucjr80tl07n9bua6o7iul&view\\_this\\_doc=tel-00277449&version=1](http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=ouch0ucjr80tl07n9bua6o7iul&view_this_doc=tel-00277449&version=1)
- [7] A.Angot, « Mathématiques pour l'ingénieur », Edition Masson, 1982.
- [8] R.Paul, « Electromagnetic compatibility for engineers », Wiley edition, 2004.
- [9] O.Maurice, « Proposal of a method of real cables EMC modeling », Publication HaL, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00311651/fr/>
- [10] R.Penrose, « A la découverte des lois de l'univers », édition Odile Jacob, 2004.
- [11] Papin, Kauffmann, « cours de calcul tensoriel appliqué », édition Albin Michel, 1966.
- [12] O.Maurice, « conférence invité NUMELEC06 », congrès Numelec 2006.
- [13] O.Maurice, « Both frequency and time domain simulation for EMC », congrès 2EMC, Rouen, 2005.
- [14] A.Berthoz, « Simplexité », édition Odile Jacob, 2009.
- [15] G.Kron, « Tensorial analysis of control system », journal of applied physics, June 1946.