



**HAL**  
open science

## Semaine d'Etude Mathématiques et Entreprises 5 : Propriétés asymptotiques de processus à volatilité stochastique

Paul Cazeaux, Paul Charton, Nhung Pham, Laura Vinckenbosch, Raghid  
Zeineddine

► **To cite this version:**

Paul Cazeaux, Paul Charton, Nhung Pham, Laura Vinckenbosch, Raghid Zeineddine. Semaine d'Etude Mathématiques et Entreprises 5 : Propriétés asymptotiques de processus à volatilité stochastique. 2013. hal-00833375v2

**HAL Id: hal-00833375**

**<https://hal.science/hal-00833375v2>**

Preprint submitted on 12 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SEMAINE D'ETUDE MATHS-ENTREPRISES 5

11–15 février 2013, Ecole des Mines de Nancy

## Propriétés asymptotiques de processus à volatilité stochastique

Paul CAZEAUX<sup>a</sup>      Paul CHARTON<sup>b</sup>  
Nhung PHAM<sup>c</sup>      Laura VINCKENBOSCH<sup>b</sup>  
Raghid ZEINEDDINE<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire Jacques Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, France*

<sup>b</sup> *Institut Elie Cartan, Université de Lorraine et INRIA Nancy Grand-Est, France*

<sup>c</sup> *IRMA Strasbourg, France*

Sujet proposé par :

**Deloitte.**

Correspondant : Alan PICONE

**MATHS  
& ENTREPRISES**



**a m i e s**

## Résumé

Cet article est une synthèse de notre travail de recherche durant la cinquième SEME (Semaine d'Etudes pour les Mathématiques en Entreprise) à l'Ecole des Mines de Nancy. Durant cette semaine, nous avons étudié une alternative au modèle de Black-Scholes : le modèle GARCH(1,1). Ce modèle est suffisamment simple pour être implémenté sur un ordinateur de bureau classique, et suffisamment proche du modèle de Black-Scholes pour ne pas dérouter les personnes habituées à ce dernier. Dans un premier temps, nous passons en revue différents résultats connus pour le modèle GARCH. En particulier, nous montrons que, sous certaines hypothèses, et contrairement au modèle de Black-Scholes, dans le modèle GARCH la distribution des rendements est à queue épaisse, similaire à celle d'une loi de puissance. Ensuite, nous illustrons à l'aide de simulations le comportement asymptotique de la distribution des rendements et nous proposons une méthode pour estimer le paramètre de la loi de puissance associée. Enfin, nous nous intéressons au phénomène de volatility clustering et à la durée des périodes de forte volatilité.

**Mots clés** : volatilité stochastique, processus GARCH, densité à queue lourde, estimation de loi stationnaire

# 1 Introduction et motivation

Au début des années 1970, Fisher Black et Myron Scholes proposèrent un modèle d'évaluation d'option qui fera office de référence quasi-absolue dans le monde des mathématiques financières. Outre plusieurs hypothèses sur la nature du marché (absence d'arbitrage, possibilité de vente à découvert, etc.), ce modèle repose sur l'idée que les log-rendements d'un actif boursier  $S_t$ , notés

$$r_t = \log S_{t+1} - \log S_t$$

sont indépendants entre eux et sont distribués selon une loi normale centrée et de variance  $\sigma$  constante. Les progrès informatiques ont ensuite permis de collecter un très grand nombre de données financières dont l'étude n'a eu de cesse d'intéresser à la fois l'industrie (banques, assurances, ...) mais aussi les chercheurs. Depuis, les limites du modèle gaussien ont été mieux comprises et de nombreux nouveaux modèles ont été proposés. Leur but étant d'illustrer le plus fidèlement possible les propriétés statistiques qui sont observés dans les séries financières. Parmi ces propriétés figurent certaines caractéristiques qui semblent universelles dans la description des lois de probabilités de titres aussi différents que des actions, des obligations ou des produits dérivés. Elles sont appelées *faits stylisés* et on peut citer parmi eux la non-stationnarité de la volatilité et la dépendance des log-rendements entre eux. Dans la théorème 1, par exemple, nous pouvons voir que les log-rendements historiques de l'indice du CAC40 n'évoluent pas de manière stationnaire et que leur volatilité varie selon des épisodes. Une autre propriété faisant défaut dans le modèle de Balck-Scholes

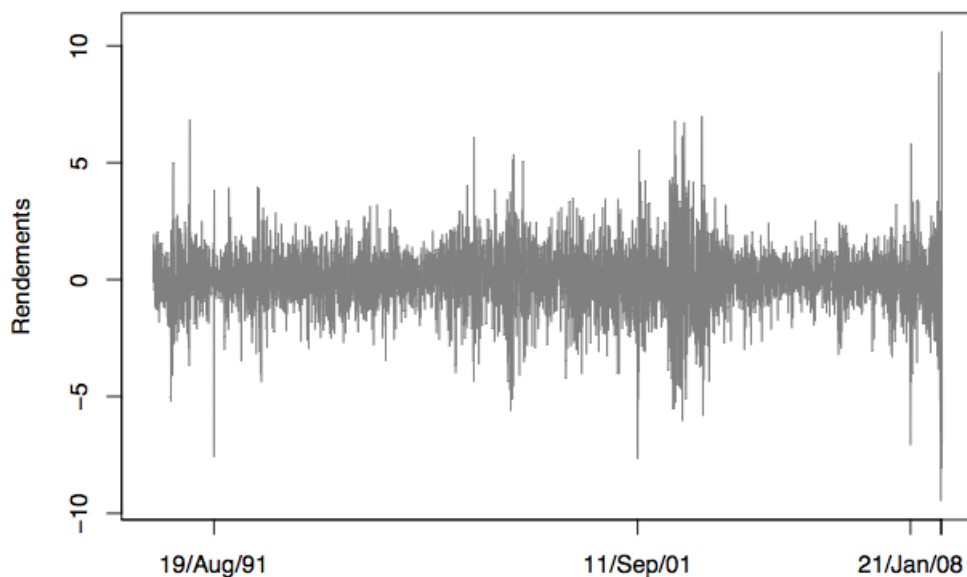


FIGURE 1 – Rendements de l'indice CAC 40 (02/03/1990-15/10/2008).

est le phénomène de queue lourde dans la distribution des log-rendements. En effet, selon les hypothèses du modèle gaussien, les événements extrêmes sont distribués selon une loi à décroissance exponentielle. Or, les données financières réelles contredisent ce principe et on observe plutôt une décroissance en loi de puissance. Ceci a pour conséquence que les

événements dits rares, se produisent en réalité beaucoup plus souvent que dans le modèle gaussien. L'évaluation du risque lié à la possession d'un actif financier est directement liée à la loi de ces événements et il est donc important de pouvoir quantifier leur probabilité avec précision.

En 1986 Bollerslev a introduit une nouvelle classe de processus à volatilité stochastique appelés GARCH. En utilisant ce type de processus pour décrire les log-rendements d'une série financière, il est possible de faire apparaître le phénomène de pics de volatilité. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la distribution de ces rendements et plus particulièrement à la répartition de leurs extrêmes, c'est-à-dire aux propriétés asymptotiques de leur loi stationnaire. La principale question qui nous a été posée était de savoir si ce genre de processus permettaient également de décrire le principe de queue lourde que l'on observe dans les séries financières.

Dans la section 2, nous définissons le processus GARCH(1,1) et faisons une revue de quelques résultats concernant sa loi stationnaire. Nous verrons entre autre que dans les cas où cette loi existe, elle se comporte effectivement comme une loi de puissance dans les extrêmes. Dans la section 3, nous proposons une étude du comportement asymptotique de cette loi à l'aide de simulations numériques et nous rechercherons à estimer l'exposant de la loi de puissance à partir de données simulées. Finalement, dans la section 4, nous nous intéresserons au temps de retour à l'équilibre de la volatilité du processus GARCH(1,1).

## 2 Le modèle GARCH(1,1) et sa loi stationnaire

Le modèle GARCH (Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity) est une généralisation du modèle ARCH introduit par Engle en 1982. Dans ces modèles, notamment utilisés pour prédire la volatilité des marchés financiers, la variance conditionnelle d'un processus est représentée de manière autorégressive. Elle évolue de manière stochastique et est associée au processus des log-rendements pour former un processus bivarié.

### 2.1 Le modèle GARCH(1,1)

Soit  $\sigma_0$  est une variable aléatoire positive donnée. Un processus  $(r_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus GARCH(1,1) s'il vérifie la propriété de récurrence suivante :

$$\begin{cases} r_t = \sigma_t \zeta_t \\ \sigma_{t+1}^2 - \tilde{\sigma}^2 = \alpha(\sigma_t^2 - \tilde{\sigma}^2) + g r_t^2 \end{cases} \quad (1)$$

pour tout  $t \in \mathbb{N}$ , où :

- $g \in \mathbb{R}_+$  et  $\alpha \in [0, 1]$  sont les paramètres de couplage ;
- $\tilde{\sigma} \in \mathbb{R}_+$ , une constante fixée, est un paramètre d'échelle ;
- $(\zeta_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est le bruit blanc, c'est-à-dire, une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée réduite, et indépendantes de  $\sigma_0$ .

Le modèle GARCH présente plusieurs similarités avec le modèle Black-Scholes. Par exemple, le rendement  $r_t$  est instantanément normal. C'est-à-dire qu'à un instant  $t$  fixé, conditionnellement à la connaissance de la volatilité  $\sigma_t$ , le rendement  $r_t$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$ . Les rendements sont également décorrélés. En effet, pour  $t_1 > t_2$

$$\mathbb{E}[r_{t_1} r_{t_2}] - \mathbb{E}[r_{t_1}] \mathbb{E}[r_{t_2}] = \mathbb{E}[\zeta_{t_1}] \mathbb{E}[\sigma_{t_1} \zeta_{t_2} \sigma_{t_2}] - \mathbb{E}[\zeta_{t_1}] \mathbb{E}[\sigma_{t_1}] \mathbb{E}[\zeta_{t_2}] \mathbb{E}[\sigma_{t_2}] = 0.$$

Cependant, selon les valeurs des paramètres  $\alpha$ ,  $g$  et  $\sigma_0$ , le comportement du processus peut se révéler radicalement différent de celui du modèle de Black-Scholes. Regardons par exemple la simulation suivante :

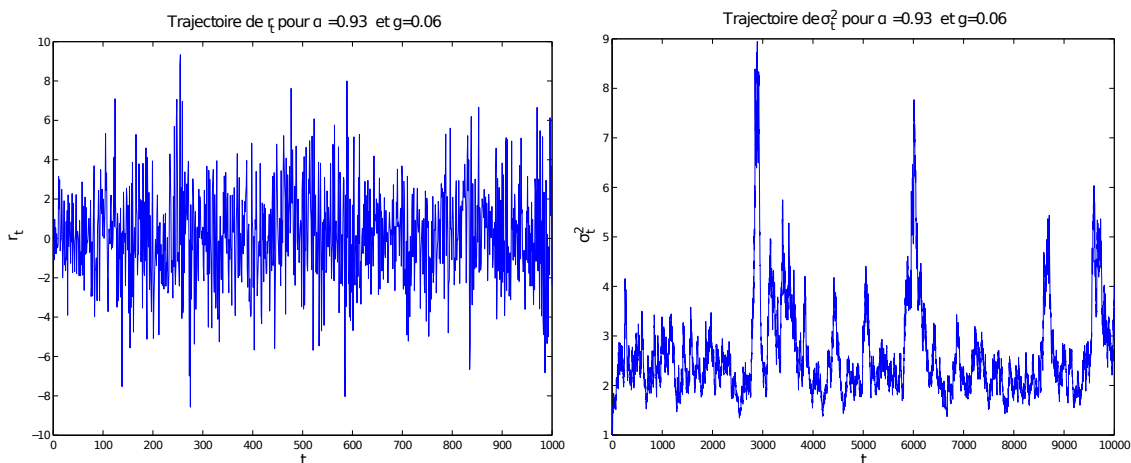


FIGURE 2 – Trajectoire d'un processus GARCH(1,1), pour  $\sigma_0 = 1$ ,  $\tilde{\sigma} = 1$ ,  $\alpha = 0.93$  et  $g = 0.06$ .

La trajectoire des rendements  $r_t$  est clairement différente de celle des rendements dans le modèle de Black-Scholes. De plus, nous pouvons remarquer tantôt des pics de volatilité, tantôt des épisodes plus calmes dans la trajectoire de  $(\sigma_t)$ . Ce type de trajectoire est plus proche des observations faites sur les marchés, car le modèle GARCH(1,1) permet d'inclure les faits stylisés évoqués dans la section précédente.

Le processus GARCH est une *chaîne de Markov*. En effet, la relation (1) implique :

$$\sigma_{t+1}^2 = (\alpha + g\zeta_t^2)\sigma_t^2 + (1 - \alpha)\tilde{\sigma}. \quad (2)$$

Un raisonnement par récurrence permet alors d'obtenir l'égalité suivante :

$$\sigma_t^2 = (1 - \alpha)\tilde{\sigma}^2 \left( 1 + \sum_{s=1}^{t-1} \left( \prod_{u=1}^s (\alpha + g\zeta_{t-u}^2) \right) \right) + \sigma_0^2 \prod_{u=1}^t (\alpha + g\zeta_{t-u}^2), \quad \forall t > 0. \quad (3)$$

Comme les composantes du vecteur  $(\sigma_u)_{0 \leq u \leq t-1}$  sont indépendantes et que ce vecteur est indépendant de  $\sigma_0$ , la relation (3) implique que  $\sigma_t$  est indépendant de  $\zeta_t$  pour tout  $t \in \mathbb{N}$ . Il suffit d'utiliser les relations (1) et (2) pour conclure que le processus  $(r_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov.

*Remarque 1.* Si  $g = 0$  et si  $\sigma_0$  est constant, alors d'après la relation (2), le processus  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est déterministe et tend vers  $\tilde{\sigma}$  à vitesse géométrique. Les rendements sont alors gaussiens comme dans le modèle de Black-Scholes.

La relation (1) ne définit que l'évolution du processus. Toutefois, la connaissance de la loi de  $\sigma_0$ , caractérise la loi de  $(r_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$  de manière unique. Pour toute mesure de probabilité positive  $\nu$ , on notera  $\mathbb{P}^\nu$  la loi du processus  $(r_t, \sigma_t)$  lorsque  $\sigma_0$  suit la loi  $\nu$ .

Dans la section suivante, nous développons quelques résultats théoriques sur la loi limite du processus  $(r_t, \sigma_t)$ , ainsi que sur l'existence de ses moments.

## 2.2 Convergence vers la loi stationnaire

Le processus GARCH(1,1) peut être considéré comme un cas particulier des modèles étudiés par Kensten dans [Kes73]. Dans [BP92], Bougerol et Picard détaillent comment utiliser ces résultats dans le cadre du processus GARCH multidimensionnel. Il ressort que les coefficients de Lyapunov permettent d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une distribution stationnaire. Nous proposons ici une preuve pour le cas unidimensionnel ne faisant pas intervenir ces coefficients. Bien que moins générale, cette démonstration est plus simple et plus claire pour des lecteurs non familiarisés avec les coefficients de Lyapunov.

**Théorème 1.** *Le processus GARCH(1,1) possède une distribution stationnaire si et seulement si*

$$\gamma = \mathbb{E} [\ln(\alpha + g\zeta_0^2)] < 0. \quad (4)$$

*De plus, s'il existe une distribution stationnaire pour le processus GARCH(1,1), alors elle est unique.*

En regardant (3) de plus près, nous pouvons voir que le processus  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$  se comporte comme la somme des termes d'une suite géométrique. Ainsi, la condition (4) revient à exiger que la suite géométrique converge. Les cas  $\gamma < 0$  et  $\gamma > 0$  se traitent assez facilement à l'aide de la loi forte des grands nombres, mais pour le cas  $\gamma = 0$ , nous aurons besoin du résultat intermédiaire suivant :

**Lemme 2.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=0}^n (\alpha + g\zeta_i^2) = 0$  p.s.; (5)
2.  $\gamma < 0$ .

*Démonstration.* Puisque

$$\prod_{i=0}^n (\alpha + g\zeta_i^2) = \exp \left( \sum_{i=0}^n \ln(\alpha + g\zeta_i^2) \right),$$

la propriété (5) est équivalente à

$$\sum_{i=0}^n \ln(\alpha + g\zeta_i^2) \rightarrow -\infty \text{ p.s. lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

En utilisant la loi forte des grands nombres, nous montrons facilement que, si  $\gamma > 0$ , alors (6) n'est pas vérifié et donc (5) non plus. Au contraire, si  $\gamma < 0$ , alors (5) est vérifié.

Il ne reste plus qu'à traiter le cas  $\gamma = 0$ . Supposons que  $\gamma = 0$  et que (5) soit vérifié. Comme  $\zeta_t$  suit une loi normale, on montre facilement que  $\mathbb{E} [(\alpha + g\zeta_i^2)] < +\infty$ . Alors, d'après le théorème central limite et (6), nous avons

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \frac{\sum_{i=0}^n \ln(\alpha + g\zeta_i^2)}{\sqrt{n}} \leq 0 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \sum_{i=0}^n \ln(\alpha + g\zeta_i^2) < 0 \right) = 1,$$

ce qui est absurde. □

*Preuve du Théorème 1.* Il suffit de montrer ce résultat pour la distribution stationnaire de  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$ . Supposons qu'il existe une distribution stationnaire notée  $\pi_\sigma$ . Si  $\sigma_0$  suit la loi  $\pi_\sigma$ , alors, pour tout  $t > 0$ , nous avons les égalités en loi suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \sigma_t^2 = (1 - \alpha) \tilde{\sigma}^2 \left( 1 + \sum_{s=1}^{t-1} \left( \prod_{u=1}^s (\alpha + g\zeta_{t-u}^2) \right) \right) + \sigma_0^2 \prod_{u=1}^t (\alpha + g\zeta_{t-u}^2) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} (1 - \alpha) \tilde{\sigma}^2 \left( 1 + \sum_{s=1}^{t-1} \left( \prod_{u=1}^s (\alpha + g\zeta_u^2) \right) \right) + \sigma_0^2 \prod_{u=1}^t (\alpha + g\zeta_u^2) \\ &\geq (1 - \alpha) \tilde{\sigma}^2 \left( 1 + \sum_{s=1}^{t-1} \left( \prod_{u=1}^s (\alpha + g\zeta_u^2) \right) \right) \stackrel{\Delta}{=} A_t. \end{aligned}$$

La suite de variables aléatoires  $(A_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est croissante positive, elle converge donc presque sûrement ainsi qu'en loi vers une variable aléatoire  $A_\infty \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sigma_0$ . Ainsi,  $A_\infty$  est presque sûrement finie. La variable aléatoire  $A_\infty$  est une série aléatoire convergente, son terme tend donc vers 0. D'après le lemme 2,  $\gamma$  est donc strictement négatif.

Montrons maintenant la réciproque, à savoir, si  $\gamma < 0$ , alors il existe une distribution stationnaire pour le processus GARCH(1,1). Soit  $(G_t)_{t \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires centrées réduites indépendantes. En utilisant la loi forte des grands nombres, nous avons

$$\left( \prod_{u=1}^s (\alpha + gG_u^2) \right)^{\frac{1}{n}} = \exp \left( \frac{1}{n} \sum_{u=1}^s (\alpha + gG_u^2) \right) \rightarrow \exp(\gamma) < 1 \text{ lorsque } u \rightarrow +\infty \text{ p.s.}$$

Alors, d'après la règle de Cauchy, il suit que la variable aléatoire

$$\sqrt{(1 - \alpha) \tilde{\sigma}^2 \left( 1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \left( \prod_{u=1}^s (\alpha + g\zeta_u^2) \right) \right)},$$

est presque sûrement finie, notons  $\pi_\sigma$  sa loi. On vérifie facilement que  $\pi_\sigma$  est une distribution stationnaire pour le processus GARCH(1,1).

Montrons finalement l'unicité de cette loi. Soient  $\sigma_0$  et  $\sigma'_0$  deux variables aléatoires suivant une loi stationnaire. À partir de ces deux variables et d'une famille  $(\zeta_t)_{t \in \mathbb{N}}$ , on construit deux processus  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$  et  $(\sigma'_t)_{t \in \mathbb{N}}$  en utilisant la relation (2). Comme il existe une distribution stationnaire, il suit que  $\gamma < 0$ . Alors, d'après le lemme 2,

$$|\sigma_t'^2 - \sigma_t^2| = |\sigma_0'^2 - \sigma_0^2| \prod_{u=1}^t (\alpha + g\zeta_{t-u}^2) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty,$$

ce qui implique l'unicité de la loi et conclut la preuve.  $\square$

Dans le cas où  $\gamma < 0$ , nous pouvons voir dans (1) et avec un raisonnement similaire à celui de la démonstration précédente, que le processus  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$  oublie à vitesse exponentielle sa condition initiale et converge en loi vers sa loi stationnaire. En fait, lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $(r_t, \sigma_t)$  tend vers l'indépendance vis à vis de  $(\sigma_0, r_0)$ . Ce processus est un processus de mélange fort comme expliqué dans [Mok90]. Ceci est illustré par le résultat suivant :



**Théorème 3.** Si  $\gamma < 0$  et si  $\pi_\sigma$  dénote la loi stationnaire du processus  $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$ , alors

$$\sup_{B \in \mathcal{F}_0^s, D \in \mathcal{F}_t^{+\infty}} \{ \mathbb{P}^{\pi_\sigma}(B \cap D) - \mathbb{P}^{\pi_\sigma}(B) \mathbb{P}^{\pi_\sigma}(D) \} = \varphi(|t-s|) \xrightarrow{|t-s| \rightarrow \infty} 0, \quad (7)$$

où

- $t$  et  $s$  sont des entiers naturels tels que  $t \geq s$  ;
- $\mathcal{F}_0^s$  est la tribu engendrée par  $(\sigma_u)_{0 \leq u \leq s}$  ;
- $\mathcal{F}_t^{+\infty}$  est la tribu engendrée par  $(\sigma_u)_{u \geq t}$ .

De plus, la vitesse de convergence de  $\varphi$  est géométrique.

La figure suivante illustre cette convergence en loi. Nous avons simulé 10000 trajectoires indépendantes d'un processus GARCH(1,1) avec  $\sigma_0 = \tilde{\sigma} = 1$  jusqu'au temps  $T = 100$ . Nous avons ensuite tracé les densités empiriques des rendements au temps  $t = 25, t = 50, t = 75$  et  $t = 100$ .

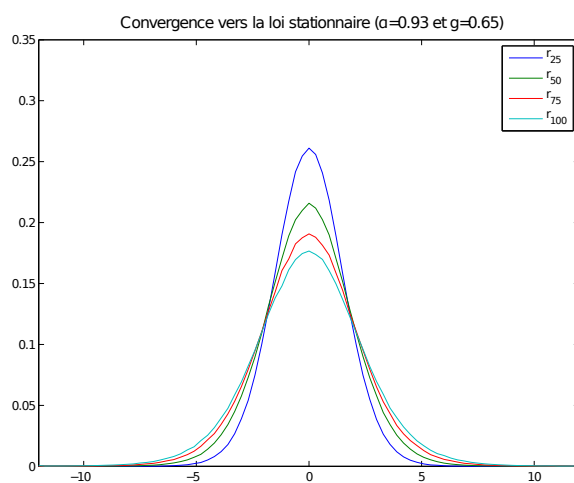


FIGURE 3 – Convergence des densités empiriques des rendements.

### 2.3 Queue de la loi stationnaire

Nous allons maintenant nous intéresser à la queue de distribution des rendements sous la loi stationnaire. La queue d'une loi de probabilité détermine les moments qu'admet cette loi. Nous commençons donc par étudier les moments.

**Théorème 4.** Sous la loi stationnaire, les variables  $\sigma_t$  et  $r_t$  possèdent un moment d'ordre  $p > 0$  si et seulement si

$$\mathbb{E} \left[ (\alpha + g\zeta_0^2)^{\frac{p}{2}} \right] < 1. \quad (8)$$

*Idée de la preuve.* Comme  $\sigma_t$  est indépendant de  $\zeta_t$ ,  $r_t$  possède un moment d'ordre  $p$  si et seulement si  $\sigma_t$  possède un moment d'ordre  $p$ . Sous la loi stationnaire, nous avons l'égalité en loi suivante :

$$\sigma_t^2 = (1 - \alpha)\tilde{\sigma}^2 \left( 1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \left( \prod_{u=1}^s (\alpha + g\zeta_u^2) \right) \right).$$

Pour que cette série à termes positifs converge dans  $L^{\frac{p}{2}}$ , il faut et il suffit qu'elle converge absolument dans  $L^{\frac{p}{2}}$ .  $\square$

La condition (8) peut être explicitée pour les moment d'ordre  $p$  entier. En particulier, sous la loi stationnaire, la condition pour qu'il y ait des moments d'ordre 2 est  $\alpha + g < 1$ . Pour l'existence de moment d'ordre 4, la condition est  $\alpha^2 + 3g^2 + 2\alpha g < 1$ . De plus, la relation (2) permet de déterminer ces moments s'ils existent. En particulier, nous avons

$$\mathbb{E}[r_t^2] = \frac{(1 - \alpha)\tilde{\sigma}^2}{1 - \alpha - g}, \quad (9)$$

$$\mathbb{E}[r_t^4] = \frac{3(1 - \alpha)^2\tilde{\sigma}^4(1 + \alpha + g)}{(1 - \alpha - g)(1 - \alpha^2 - 2\alpha g - 3g^2)},$$

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[r_t^4]}{(\mathbb{E}[r_t^2])^2} = 3 \frac{1 - (\alpha + g)^2}{1 - (\alpha + g)^2 - 2g^2}. \quad (10)$$

*Remarque 2.* Le paramètre  $\kappa$  est le kurtosis (le coefficient d'aplatissement) des rendements. Il peut donner une indication sur la proximité d'une loi par rapport à une loi normale dont le kurtosis vaut  $\kappa = 3$ . Comme mentionné précédemment, si  $g = 0$ , alors les rendements sont gaussiens. Nous pouvons voir dans (10) que dans ce cas (et dans ce seul cas)  $\kappa$  vaut effectivement 3.

Dans le cas où  $g$  est non nul, la condition (8) n'est pas vérifiée pour tout  $p$ . La loi n'admet donc plus de moment à partir d'un certain ordre. Ceci est caractéristique des densités à queue épaisse. Les auteurs de [Kes73] et [BP92] montrent que la queue de la distribution de la loi stationnaire est similaire à la densité d'une *loi de Pareto* définie par

$$f(x) = \frac{\mu A^\mu}{x^{1+\mu}}, \quad x \geq A. \quad (11)$$

Leur résultat est le suivant :

**Théorème 5.** *Si  $(r_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est un processus GARCH(1,1) stationnaire, alors pour tout  $t$ ,*

$$\mathbb{P}(|r_t| > x) \sim Cx^{-1-\mu}, \quad (12)$$

où  $\mu$  est l'unique solution strictement positive de

$$\mathbb{E} \left[ (\alpha + g\zeta_0^2)^{\frac{\mu}{2}} \right] = 1. \quad (13)$$

*Démonstration.* L'équivalence (12) est démontrée dans [Kes73] et [BP92]. L'exposant  $\mu$  est le premier moment infini de la loi de Pareto et d'après l'équivalence (12), c'est aussi le premier moment infini de la loi stationnaire. Il suffit d'utiliser la propriété (8) pour trouver la caractérisation (13).  $\square$

Dans la Figure 2.3, nous avons représenté la valeur du paramètre  $\mu$  pour différentes valeurs des paramètres de couplage  $\alpha$  et  $g$ . Ces valeurs ont été obtenues par résolution numérique de l'équation intégrale (13). Nous pouvons voir que le paramètre est extrêmement sensible par rapport au paramètre  $g$ . Cela rend son estimation difficile, comme nous pourrons le voir dans la section suivante.

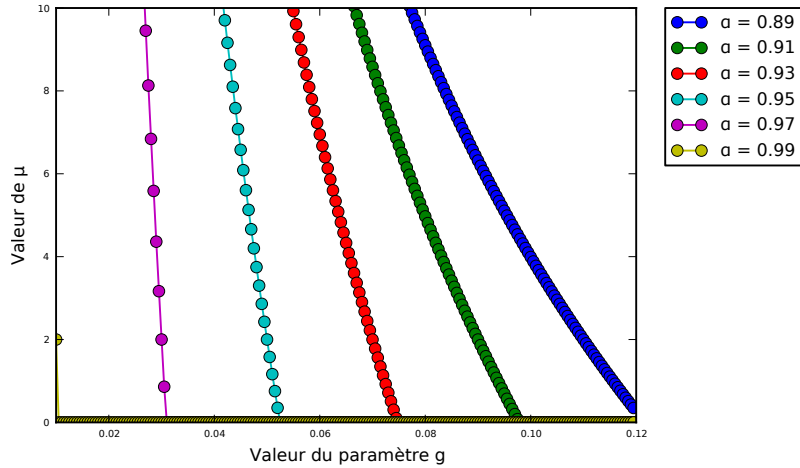


FIGURE 4 – Valeur de l’exposant  $\mu$  de la loi de puissance de la loi stationnaire des rendements en fonction de  $\alpha$  et  $g$ .

### 3 Etude numérique autour de l’exposant de la loi

#### 3.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons des résultats d’estimations statistiques du coefficient  $\mu$  de la loi de puissance donnée en (12) à partir de données simulées. Nous verrons que cette estimation n’est pas aisée de par la nature du coefficient  $\mu$ . En effet, ce paramètre décrit le comportement *asymptotique* de la loi stationnaire du processus défini en (1). Nous aurons donc à étudier la distribution d’événements extrêmes. Ceci induit premièrement de fortes corrélations au sein des sous-échantillons choisis, car les données extrêmes proviennent essentiellement des épisodes à forte volatilité. Autrement dit, les réalisations de très grands ou de très petits log-rendements se produisent par paquets et sont donc fortement corrélées. Deuxièmement, l’estimation de  $\mu$  nécessite un très grand nombre de simulations puisque la majorité des réalisations ne sont pas le résultat d’événements rares et sont donc rejetées au moment de l’analyse des données. Ces considérations mettent d’ores et déjà en évidence les difficultés à donner une bonne estimation de  $\mu$  à partir de données réelles (en nombre restreint) et la nécessité d’utiliser des méthodes statistiques propres à l’étude des extrêmes (voir par exemple [Col01] ou [dHF06]).

#### 3.2 Théorème ergodique

Notre étude numérique est basée sur un résultat très important des chaînes de Markov : le théorème ergodique dont la loi forte des grands nombre est un cas particulier. Avant de l’énoncer, nous aurons besoin de quelques résultats sur les chaînes de Markov tirés de [Rob96].

**Définition 6.** Soit  $\{X_n; n \geq 1\}$  est une chaîne de Markov sur un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ . Un ensemble  $A \subset E$  est *récurrent au sens de Harris* si  $\mathbb{P}_x(\eta_A = \infty) = 1$  pour tout  $x$  dans  $A$ , où  $\eta_A$  est le nombre de passage de la chaîne dans  $A$ .

Si  $\{X_n; n \geq 1\}$  est irréductible et si pour tout  $A \subset E$ ,  $A$  est récurrent au sens de Harris, alors la chaîne est récurrente au sens de Harris.

**Théorème 7.** Soit  $\{X_n; n \geq 1\}$  une chaîne de Markov irréductible. On note  $\tau_A$  le temps d'atteinte de  $A \subset E$ . S'il existe un sous-ensemble  $C \subset E$  tel que  $\mathbb{P}_x(\tau_C < \infty) = 1$  pour tout  $x \in E$ , alors  $X$  est récurrente au sens de Harris.

**Théorème 8.** Si  $\{X_n; n \geq 1\}$  est une chaîne de Markov admettant une mesure invariante  $\pi$ , alors il y a équivalence entre

1. la chaîne est récurrente au sens de Harris ;
2. pour  $f, g \in L^1(\pi)$  tels que  $\int g(x) d\pi(x) \neq 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(X_1) + \dots + f(X_n)}{g(X_1) + \dots + g(X_n)} = \frac{\int f(x) d\pi(x)}{\int g(x) d\pi(x)}. \quad (14)$$

En particulier, en prenant  $f(x) = \mathbf{1}_A(x)$ ,  $A \in \mathcal{E}$  et  $g \equiv 1$ , l'équation (14) devient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{1}_A(X_1) + \dots + \mathbf{1}_A(X_n)}{n} = \pi(A).$$

Autrement dit, si  $X$  est une chaîne récurrente au sens de Harris admettant une mesure invariante  $\pi$ , alors la fréquence des visites de la chaîne dans un sous ensemble  $A$  tend vers la mesure de  $A$  par rapport à  $\pi$ .

Nous avons vu précédemment (voir théorème 1) que, si  $\gamma = \mathbb{E}(\ln(\alpha + g\zeta_0^2)) < 0$ , alors le processus  $(r_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov admettant une mesure invariante (une loi stationnaire)  $\pi$ . De plus, de par la propriété d'indépendance des variables  $\zeta_t$  dans (1), il est clair que la condition du théorème 7 est vérifiée. Ainsi,  $(r_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{N}}$  est récurrente au sens de Harris et nous pouvons utiliser le théorème ergodique pour approcher la loi  $\pi$  par la distribution empirique des valeurs prises par une trajectoire d'un processus GARCH. Nous noterons  $\pi_r$  la loi stationnaire marginale des rendements et  $\hat{\pi}_r$  la loi empirique d'un échantillon de rendements appartenant à une même trajectoire simulée.

### 3.3 Premières observations

Avant de chercher à estimer l'exposant  $\mu$  de la loi de puissance de la queue de  $\pi_r$ , nous commençons par étudier graphiquement la distribution empiriques des rendements, leur trajectoires et leur volatilité. Nous avons choisi quatre couples de valeurs pour les paramètres  $\alpha$  et  $g$ , et pour chacun d'eux nous avons simulé le processus  $(r_t, \sigma_t)$  jusqu'au temps  $T = 10^7$  avec  $\sigma_0 = \tilde{\sigma} = 1$ . La table 1 donne les valeurs des paramètres choisis.

	$\alpha$	$g$		$\alpha$	$g$
Simulation 1 :	0.9	0.1	Simulation 3 :	0.9	0.092
Simulation 2 :	0.94	0.058	Simulation 4 :	0.93	0.06

TABLE 1 – Table des valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $g$  choisis pour les simulations.

Comme nous pouvons le voir dans les Figures 5 et 6, les trajectoires respectives de  $r_t$  et  $\sigma_t$  sont très sensibles aux paramètres  $\alpha$  et  $g$ . Une très petite variation sur la valeur de

ces derniers influence grandement les valeurs extrêmes de  $r_t$ , de même que la durée et la fréquence des périodes à forte volatilité. À noter que les trajectoires ne sont données que pour les 1000 premiers pas pour les rendements et les 10000 premiers pas pour la volatilité.

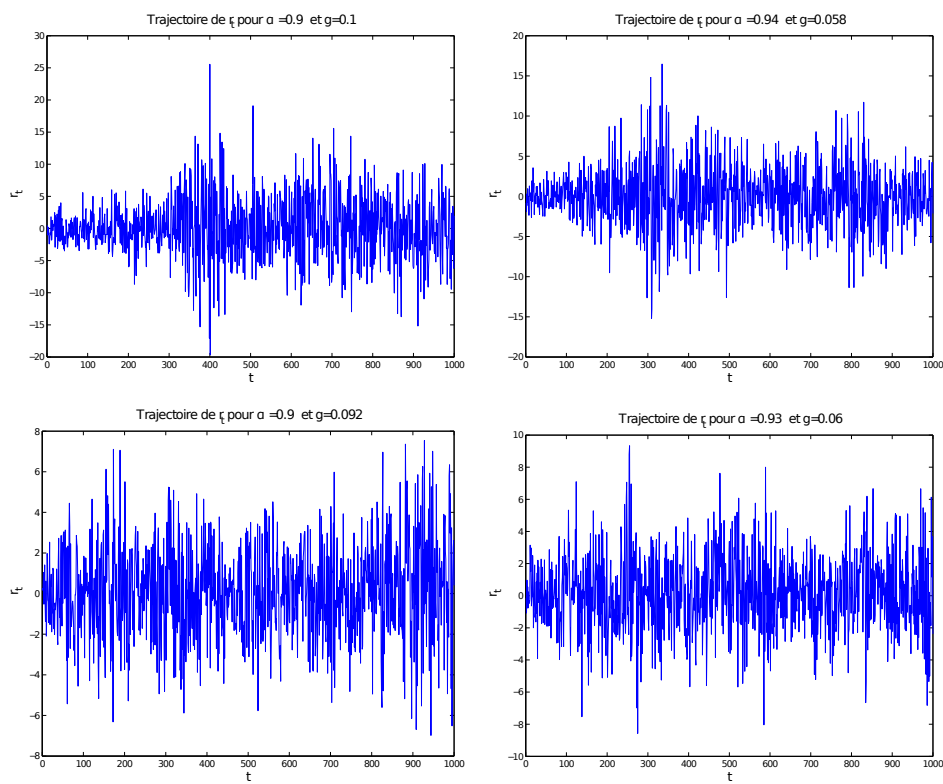


FIGURE 5 – Trajectoire simulée du processus  $(r_t)$  pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $g$  (seulement les 100 premiers pas).

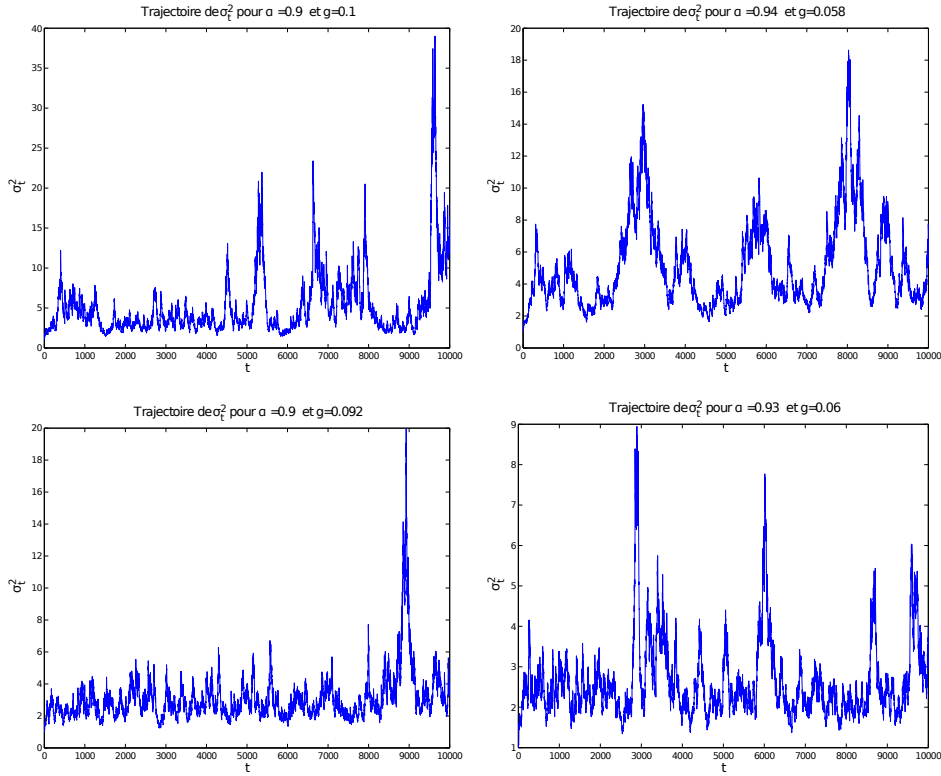


FIGURE 6 – Trajectoire simulée du processus  $(\sigma_t)$  pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $g$  (seulement les 1000 premiers pas).

Puisque la loi de rendements est symétrique, il convient de considérer la distribution empirique de la valeur absolue des rendements. Ceci aura pour effet de réduire la variance de nos échantillons. Dans la figure 7, par exemple nous donnons les histogrammes de répartition des échantillons  $(|r_1|, \dots, |r_T|)$  obtenus pour les quatre simulations. Nous pouvons voir que la queue de la répartition est effectivement plus lourde que celle de la loi normale (tracée en rouge). Il n'est cependant pas facile de quantifier cette différence avec cette représentation. C'est pourquoi, nous donnons également les histogrammes en échelle logarithmique (LogLog) dans la figure 8. Dans cette dernière, nous pouvons voir que les grandes valeurs de rendements sont distribuées selon une droite en échelle LogLog, ce qui correspond à la loi de puissance que nous cherchons à estimer. Notons aussi le bruit pour les valeurs les plus extrêmes. Leur loi empirique est très volatile et nous pouvons déjà anticiper les problèmes d'estimation que nous allons avoir. Il faudra trouver un compromis entre considérer les valeurs les plus grandes possible de nos échantillons tout en éliminant les données aberrantes qui se trouvent dans les extrêmes.

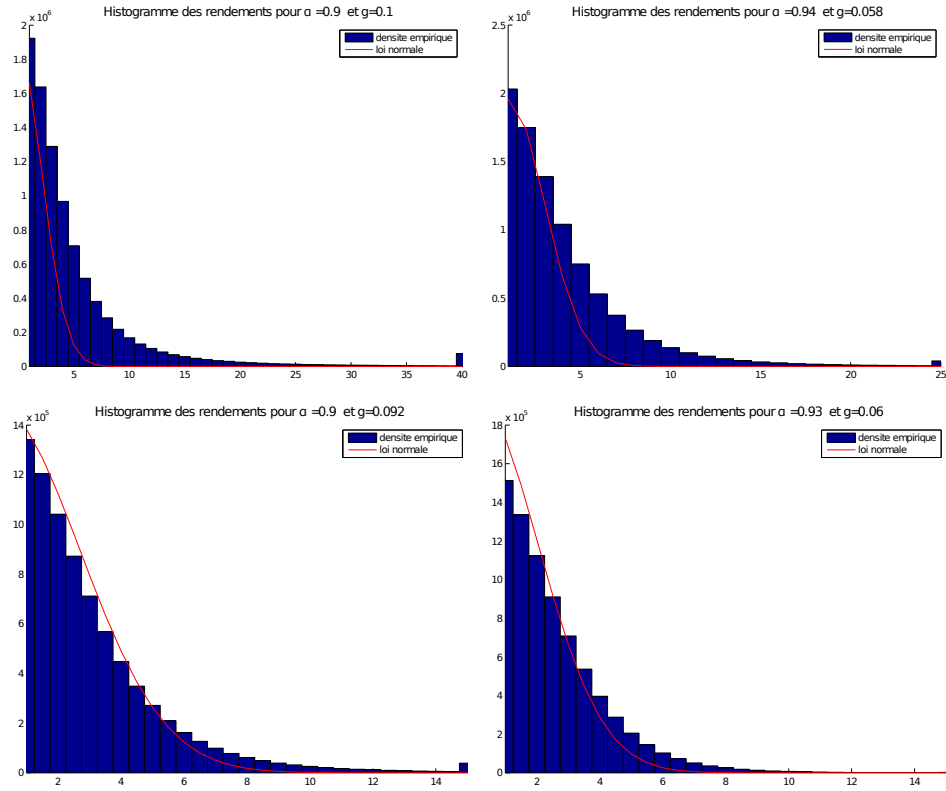


FIGURE 7 – Histogrammes des rendements en valeur absolue ( $|r_1|, \dots, |r_T|$ ) pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $g$  et comparaison avec la loi normale.

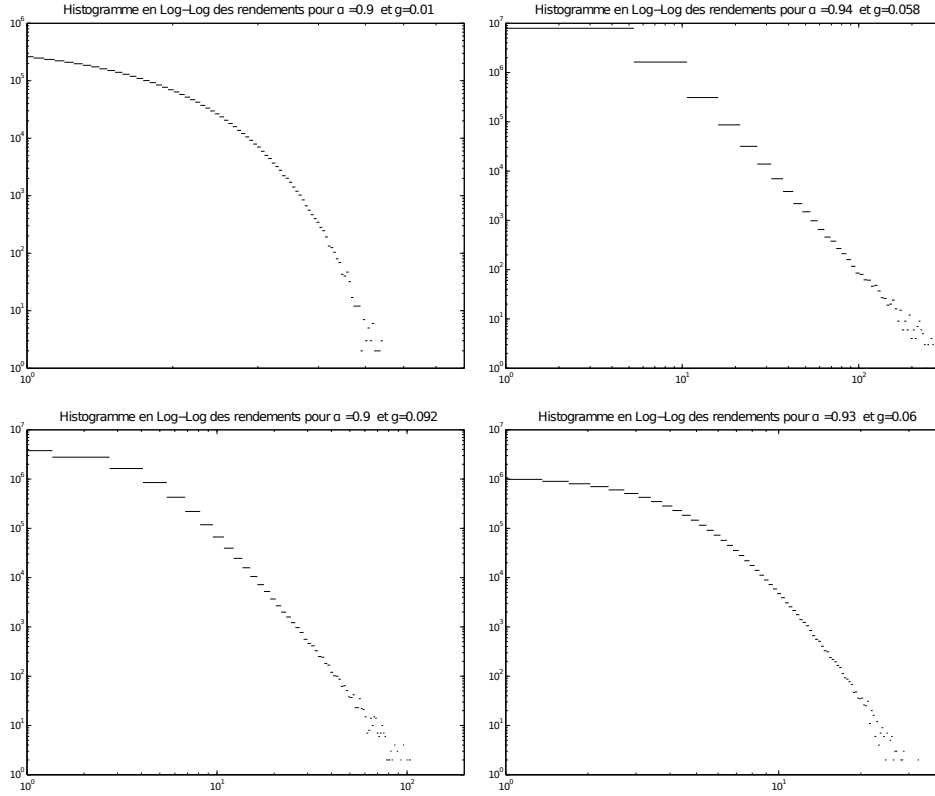


FIGURE 8 – Histogrammes Log-Log des rendements en valeur absolue pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $g$ .

### 3.4 Estimation

Nous commençons par estimer le paramètre  $\mu$  donné dans (12) par une méthode des moindres carrés. Nous savons que  $\mathbb{P}(|r_t| > x) \sim Cx^{-1-\mu}$ . Pour des grandes valeurs de  $x$ , la différence entre ces deux termes est petite devant  $x^{-1-\mu}$  et nous pouvons donc la négliger. Le modèle linéaire utilisé est alors le suivant :

$$\log(\pi_r(x)) = a \log(x) + b,$$

avec  $\mu = -(1 + a)$  (voir (11)). Nous considérons le 1% des données les plus extrêmes dans un échantillon de  $T = 10^7$  observations de rendements provenant d'une même trajectoire. Ensuite, nous retirons de ces données le 1% des valeurs les plus grandes, car comme mentionné plus haut, celles-ci sont extrêmement bruitées et perturbent les estimations. La loi empirique des données restantes est discrétisée sur 100 intervalles de même longueur. Ceci nous donne 100 couples  $(x_i, \hat{\pi}_r(x_i))$  pour lesquels nous cherchons  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  tels que la quantité

$$\sum_{i=1}^{100} (\log(\hat{\pi}_r(x_i)) - a \log(x_i) - b)^2$$

soit minimale.



*Remarque 3.* Ce modèle n'est pas une régression linéaire au sens statistique classique (voir par exemple [Mor07]). Nous ne faisons aucunement d'hypothèses ni du type Gauß-Markov (erreurs non-corrélées, de variance égale et d'espérance nulle), ni de normalité. En effet, nous n'avons pas, à proprement parler de variables expliquée et explicative, ni de mesure i.i.d.. Nous verrons plus loin que le test statistique approprié à l'adéquation de densité est celui du  $\chi^2$ .

	Estimate	SE
(Intercept)	10.061	0.072783
(slope)	-4.0439	0.021881

TABLE 2 – Résultats de la régression sur la loi empirique du 1% des données les plus extrêmes dans un échantillon de  $T = 10^7$  observations de rendements. Valeurs des paramètres :  $\alpha = 0.94$  et  $g = 0.058$ .

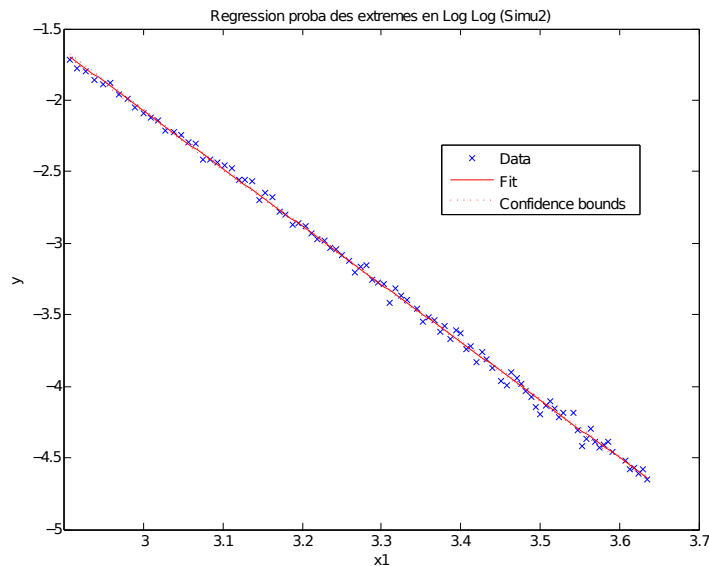


FIGURE 9 – Adéquation de la droite de régression du modèle  $\log(\pi_r(x)) = a \log(x) + b$  pour  $\alpha = 0.94$  et  $g = 0.058$ .

La table 2 résume les résultats de la régression pour les valeurs des paramètres  $\alpha = 0.94$  et  $g = 0.058$  et la figure 9 illustre l'adéquation de la droite de régression avec la loi empirique. L'estimation vaut  $\hat{\mu} = -(\hat{a} + 1) = 3.0439$ , la valeur théorique de la formule (13) étant donnée par  $\mu = 3.2$ . Nous pouvons déjà remarquer que l'erreur standard est relativement faible. Ceci traduit d'une bonne précision de l'estimation, malgré le biais par rapport à la véritable valeur. Pour nous convaincre un peu plus de cette précision, nous répliquons cette estimation 100 fois de façon indépendante et ceci pour les quatre couple de paramètres donnés dans la table 1. Les résultats d'estimations sont résumés dans la table 3 et les boîtes de Tukey (box plot) correspondantes sont données dans la figure 10.

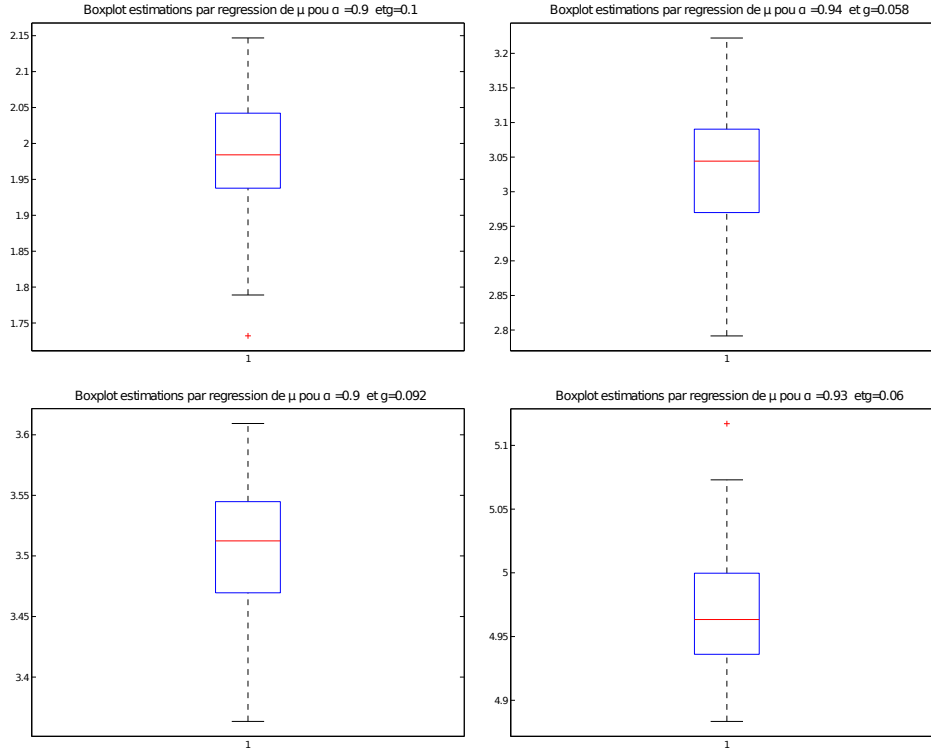


FIGURE 10 – Boxplot de 100 estimations indépendantes du paramètre  $\mu$  par régression pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $g$ .

On remarque une sous-estimation systématique par rapport à la vraie valeur. Ceci s'explique par le caractère asymptotique de notre quantité d'intérêt comme expliqué plus haut (voir section 3.1). Malgré cela, les estimations sont précises (déviations standards petites). Finalement, plus  $\mu$  est grand, plus l'écart avec la valeur estimée est important.

	$\alpha$	$g$	$\alpha + g$	$\mu$	moyenne ( $\hat{\mu}$ )	std ( $\hat{\mu}$ )
Simulation 1 :	0.9	0.1	1	2	1.98	0.07
Simulation 2 :	0.94	0.058	0.998	3.2	3.02	0.08
Simulation 3 :	0.9	0.092	0.992	3.9	3.5	0.05
Simulation 4 :	0.93	0.06	0.99	6.9	4.96	0.04

TABLE 3 – Table des estimations par régression du paramètre  $\mu$  pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $g$ .

Comme expliqué dans la Remarque 3, la régression linéaire que nous avons faite n'est pas une estimation statistique à proprement parler. La méthode statistique la plus répandue permettant de tester l'adéquation d'une loi empirique à une famille de loi théorique est le test du  $\chi^2$  (voir par exemple [Mor07]). L'hypothèse nulle de ce test postule que l'échantillon est distribué selon une loi donnée  $F$  (dans notre cas, la loi de Pareto). La statistique de

test est donnée par

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{\left(N_k^{\text{obs.}} - N_k^{H_0}\right)^2}{N_k^{H_0}}$$

où  $N_k^{H_0}$  est le nombre de réalisations de l'échantillon qui devraient (sous l'hypothèse nulle) se trouver dans l'intervalle  $I_k$ ,  $N_k^{\text{obs.}}$  est le nombre de réalisations effectivement observée dans  $I_k$  et  $(I_1, \dots, I_n)$  est une partition du support de la loi  $F$ . Sous l'hypothèse nulle,  $S$  suit asymptotiquement une loi du  $\chi^2$  à  $n - 1$  degrés de liberté.

Dans notre cas, nous testons l'hypothèse nulle : «les valeurs extrêmes sont distribuées selon une loi de Pareto d'exposant  $-(1 + \hat{\mu})$ », où  $\hat{\mu}$  est l'estimation par régression. La table 4 résume les résultats obtenus pour ce test avec le même échantillon que celui décrit plus haut et auquel correspond l'estimation donnée dans la table 2. Le niveau du test est à 5%. L'hypothèse nulle est acceptée de justesse avec une p-valeur de 0.06 (la probabilité sous  $H_0$  d'observer  $S \geq 29.2458$ ). Malgré une bonne adéquation *graphique* (voir fig. 9), le test réfute souvent l'hypothèse nulle (même en remplaçant  $\hat{\mu}$  par la vraie valeur) et lorsqu'il l'accepte, la p-valeur reste petite.

$\alpha$	$g$	$\hat{\mu}$	$n$	$S$	p-valeur	acceptation de $H_0$
0.94	0.058	3.0439	20	29.2458	0.06	oui

TABLE 4 – Résultats du test du  $\chi^2$  sur 20 intervalles. Valeurs des paramètres :  $\hat{\mu} = 3.04$ ,  $\alpha = 0.94$  et  $g = 0.058$ .

Pour comprendre les difficultés rencontrées avec le test du  $\chi^2$  et la différence entre ce que nous observons visuellement et les résultats du test, nous utilisons les diagrammes Quantile-Quantile (QQ-plot). La figure 11 donne les quantiles empiriques de nos données contre ceux de la loi de Pareto de paramètre  $\hat{\mu} = 3.04$ . La figure 12 quant à elle, donne les quantiles empiriques contre ceux de la loi de Pareto de paramètre  $\mu = 3.2$ . L'adéquation semble très bonne pour les premiers quantiles, mais de plus en plus mauvaise pour les derniers. Ceci s'explique non seulement par le fait que les données dans les derniers quantiles sont énormément corrélées, comme évoqué dans la section 3.1. Ces figures rendent aussi plus clair le fait que l'estimation de  $\mu$  est systématiquement en deçà de sa vraie valeur. En effet, nous pouvons voir qu'en supprimant plus de valeurs parmi les rendements en ne considérant, par exemple, que le 0.5% des données les plus extrêmes, l'estimation de  $\mu$  sera plus grande. Cependant, elle sera également beaucoup moins précise.

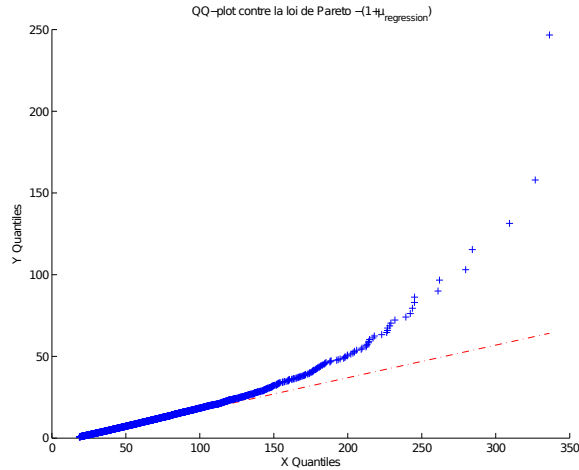


FIGURE 11 – QQ-plot entre la loi de Pareto de paramètre  $-(1 + \hat{\mu})$  et la distribution empirique de la queue des rendements simulés avec l’estimation par régression  $\hat{\mu} = 3.04$ .

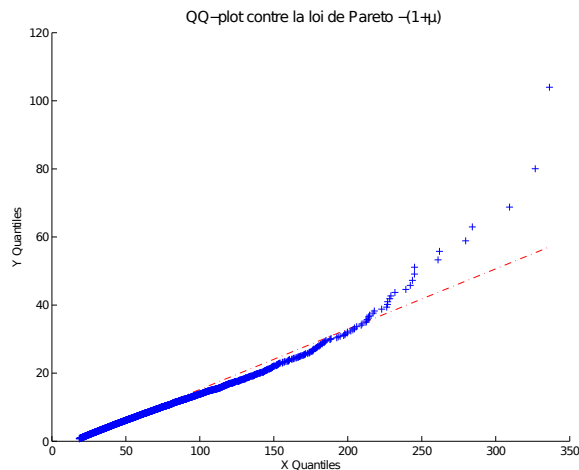


FIGURE 12 – QQ-plot entre la loi de Pareto de paramètre  $-(1 + \mu)$  et la distribution empirique de la queue des rendements simulés avec la valeur théorique  $\mu = 3.2$ .

## 4 Retour à l’équilibre et temps caractéristiques

Nous proposons dans cette section une étude numérique d’un autre aspect du modèle GARCH : la dépendance en temps du modèle dans le cas non-stationnaire.

### 4.1 Motivation

L’un des *faits stylisés* des séries financières, comme présentés dans l’introduction, est celui de l’alternance de périodes de volatilité élevée avec des périodes de volatilité plus basse, dont l’étude vis-à-vis du modèle GARCH nous a été proposée par Alan Picone.

Il s'agit ici d'un phénomène qui échappe par nature à l'analyse de la loi stationnaire du processus des parties précédentes. En effet, le seul aspect de loi de puissance peut être reproduit par un tirage i.i.d à chaque pas de temps des rendements selon une loi bien choisie. Toutefois, un tel modèle ne montre pas d'évolution de la volatilité empirique au cours du temps.

En revanche, un modèle doté d'une *volatilité stochastique* tel que le modèle GARCH(1,1) propose par nature un modèle d'évolution temporelle de la volatilité, ce qui permet de reproduire le phénomène dit de *volatility clustering*.

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à l'étude du cas hors-équilibre du modèle GARCH(1,1) et particulièrement au phénomène de retour à l'équilibre suite à un choc qui induit une volatilité élevée au temps  $t = 0$ . Lorsque le coefficient de couplage  $g$  est fixé à 0, la volatilité est déterminée en tout temps par la condition initiale, et la différence  $\sigma_t^2 - \bar{\sigma}^2$  suit une loi de décroissance géométrique (ou exponentielle) en temps de temps caractéristique  $-1/\ln(\alpha)$ . Dans le cas  $g > 0$ , l'évolution de la volatilité n'est plus déterministe mais on s'attend à retrouver certaines caractéristiques du cas découplé :

- Un retour à l'équilibre en moyenne de façon géométrique vers la variance inconditionnelle,
- Une dépendance du temps caractéristique de retour à l'équilibre en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $g$ .

Dans tout ce qui suit on notera  $\bar{\sigma}^2$  la variance à long terme du procédé GARCH(1,1), dont l'expression est donnée par (cf (9))

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha - g} \tilde{\sigma}^2.$$

En utilisant cette notation, on peut de plus écrire le procédé GARCH sous une forme plus adaptée à l'étude du retour à la moyenne :

$$\sigma_{t+1}^2 - \bar{\sigma}^2 = (\alpha + g\zeta_t^2)(\sigma_t^2 - \bar{\sigma}^2) + g\bar{\sigma}^2(\zeta_t^2 - 1).$$

**Notion de demi-vie d'un choc de volatilité** Au vu de la linéarité des équations du processus GARCH (1,1) au regard des quantités  $r_t^2$  et  $\sigma_t^2$ , nous savons ainsi que la convergence vers la loi stationnaire se fait de manière géométrique par rapport à la variable de temps discret  $t$  [Lin09]. En particulier, l'évolution de l'espérance de la volatilité au temps  $t$ , conditionnelle à une certaine valeur initiale  $\sigma_0$ , est caractérisée par une demi-vie, c'est à dire un temps  $\tau_m$  caractérisé comme le premier temps tel que

$$\mathbb{E} \left[ \sigma_{\tau_m}^2 - \bar{\sigma}^2 \right] \leq \frac{1}{4} \left( \sigma_0^2 - \bar{\sigma}^2 \right). \quad (15)$$

Notons que  $\tau_m$  est indépendant de la valeur initiale  $\sigma_0$  (voir la remarque 5). Ce temps de relaxation est souvent présenté comme la demi-vie d'un choc de volatilité pour le processus GARCH.

Plus généralement, nous appellerons distribution de demi-vie la distribution du temps nécessaire pour faire baisser de moitié l'écart avec la valeur calme  $\tilde{\sigma}$ . L'étude empirique de cette distribution et de sa dépendance par rapport aux coefficients donne un aperçu des propriétés en régime non-stationnaire du modèle. On notera  $\tau_{th}$  la moyenne de cette distribution, *a priori* différente de  $\tau_m$  et dépendante de  $\sigma_0$ .

## 4.2 Etude numérique : distribution de demi-vie d'un choc de volatilité

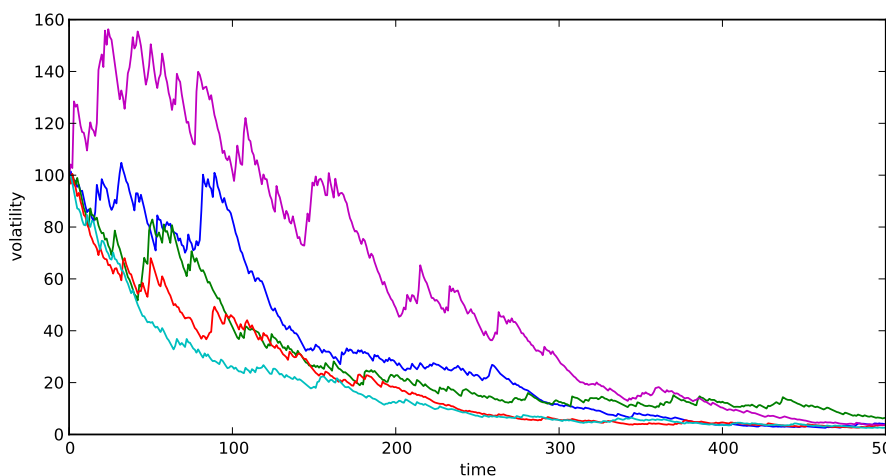


FIGURE 13 – Quelques réalisations de l'évolution de la volatilité en fonction du temps, avec les paramètres  $\sigma_0 = 100$ ,  $\tilde{\sigma} = 1$ ,  $\alpha = .94$ ,  $g = .05$ .

Nous présentons dans cette partie l'analyse de quelques simulations numériques autour du procédé GARCH(1,1). Au lieu de simuler le processus sur un long intervalle de temps, notre intérêt se porte ici sur des simulations plus courtes, de l'ordre de 100 ou 1000 pas de temps.

L'évolution de la volatilité prend alors l'allure présentée sur la Figure 4.2. On notera la forme d'exponentielle lentement décroissante qui apparaît comme le profil moyen. La distribution de demi-vie de ces "chocs" artificiels de volatilité, induits ici par la condition initiale à  $t = 0$ , est représentée sur les Figures 14 et 15 pour 1000 réalisations différentes et pour deux choix de paramètres. On observe des comportements bien différents suivant le choix de  $\alpha$  et  $g$ .

**Cas d'un exposant  $\mu$  élevé : Figure 14.** Tout d'abord, nous présentons les résultats obtenus avec les paramètres  $\alpha = .94$  et  $g = .5$  choisis de sorte que l'exposant de la queue du processus prenne une grande valeur  $\mu \approx 9$ . Dans ce cas, nous observons que la distribution de demi-vie décroît très vite par rapport au temps attendu, comme une loi exponentielle. Le profil obtenu est assez resserré autour de la valeur moyenne théorique, dont la valeur est discutée en détail au paragraphe suivant. La demi-vie  $\tau_m$  de  $\mathbb{E}[\sigma]$  n'est également pas très éloignée du pic de la distribution.

**Cas d'un exposant  $\mu$  bas : Figure 15.** Dans le deuxième cas,  $\alpha = .94$  et  $g = .58$  sont choisis de sorte que le processus GARCH associé présente une queue de distribution beaucoup plus épaisse, avec un exposant  $\mu \approx 3$ . C'est ce cas qui est le plus intéressant au vu des applications en finance. On observe que la distribution de demi-vie est bien plus étalée avec des valeurs extrêmes plus représentées. Notons que la demi-vie moyenne  $\tau_{th}$  est proche du double des valeurs les plus probables. La demi-vie  $\tau_m$  de  $\mathbb{E}[\sigma]$  est par contre

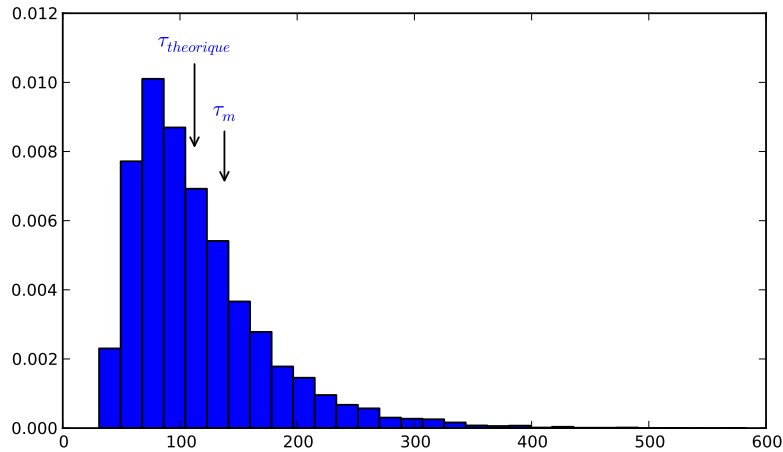


FIGURE 14 – Distribution de demi-vie de la volatilité avec les paramètres  $\sigma_0 = 100$ ,  $\tilde{\sigma} = 1$ ,  $\alpha = .94$ ,  $g = .05$

très éloignée du pic de la distribution, avec une valeur près du triple de  $\tau_{th}$ . On notera par ailleurs que des épisodes assez long de volatilité élevée sont beaucoup plus probables que dans le premier cas.

*Remarque 4.* On peut d'ailleurs se poser la question de savoir si la queue de la distribution de demi-vie est elle-même épaisse, avec un comportement en loi de puissance lorsque  $\mu$  est plus bas que 4 et le processus de variance  $\sigma_t^2$  ne possède plus de moment d'ordre 2.

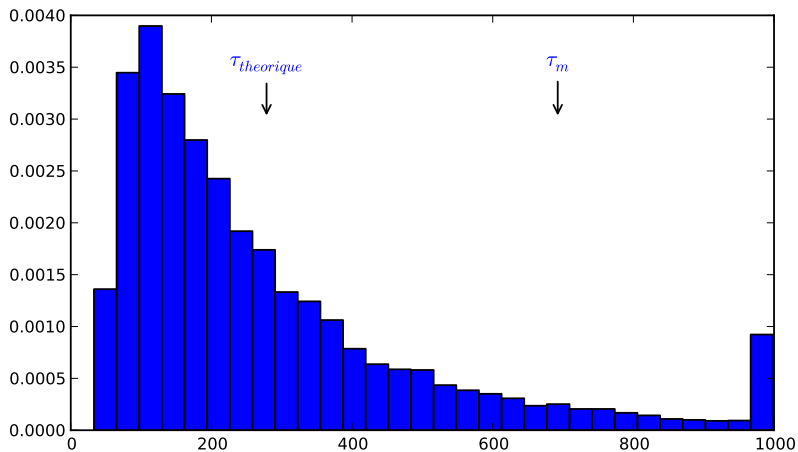


FIGURE 15 – Distribution de demi-vie de la volatilité avec les paramètres  $\sigma_0 = 100$ ,  $\tilde{\sigma} = 1$ ,  $\alpha = .94$ ,  $g = .058$

### 4.3 Demi-vie d'un choc de volatilité : théorie et illustration numérique

Dans cette section, nous nous intéressons de plus près à l'espérance de la demi-vie pour le processus volatilité. D'un point de vue théorique, une expression approchée peut être trouvée dans le cadre du processus GARCH(1,1). En effet, soit  $\tau_{1/2}$  la demi-vie de la volatilité, vue comme le temps d'atteinte associé au procédé  $\sigma_t^2 - \bar{\sigma}^2$  par

$$\tau_{1/2} = \inf \left\{ t \in \mathbb{N} \mid \left( \sigma_t^2 - \bar{\sigma}^2 \right) < \frac{1}{4} \left( \sigma_0^2 - \bar{\sigma}^2 \right) \right\}.$$

Il est facile de calculer la demi-vie de l'espérance de la volatilité par l'équation 15 : on trouve

$$\tau_m = \left\lceil \frac{-2 \ln(2)}{\ln(\alpha + g)} \right\rceil.$$

De façon générale, la demi-vie moyenne pour un choc de volatilité (l'espérance de  $\tau_{1/2}$ ) dépend de la volatilité initiale,  $\sigma_0$ . Nous allons montrer que pour  $\sigma_0$  assez grand, une approximation en est donnée par l'expression

$$\tau_{th}(\alpha, g) = \frac{-2 \ln(2)}{\mathbb{E}[\ln(\alpha + g\zeta^2)]}.$$

Un encadrement est donné par la proposition 9 :

**Proposition 9.** *Soit  $\zeta$  est une variable aléatoire de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Supposons que  $\alpha, g$  sont tels que  $\mathbb{E}[\ln(\alpha + g\zeta^2)] < 0$ . Alors*

$$\tau_{th}(\tilde{\alpha}, g) \leq \mathbb{E}[\tau_{1/2}] \leq \left( 1 - \frac{\ln(\tilde{\alpha})}{2 \ln(2)} \right) \tau_{th}(\alpha, g), \quad \text{où} \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{4g\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2 - \bar{\sigma}^2}, \quad (16)$$

avec  $\sigma_0^2 > \bar{\sigma}^2$  est assez grand pour que  $\tilde{\alpha} > 0$ .

Notons que pour  $\sigma_0$  assez grand,  $\tilde{\alpha}$  tend rapidement vers  $\alpha$ .

*Remarque 5.* Remarquons que la demi-vie  $\tau_m$  de la variance du processus  $\mathbb{E}[\sigma_t^2 \mid \sigma_0^2]$  est différente de la demi-vie moyenne  $\tau_{th}$  de la variance instantanée  $\sigma_t$ . En particulier,  $\tau_m$  est indépendante de  $\sigma_0$  au contraire de  $\tau_{th}$ .

*Démonstration.* Introduisons la variable aléatoire arrêtée définie pour  $t \geq 0$  par

$$X_t = \ln \left( \frac{\sigma_{t \wedge \tau_{1/2}}^2 - \bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2 - \bar{\sigma}^2} \right) - (t \wedge \tau_{1/2}) \mathbb{E}[\ln(\alpha + g\zeta^2)].$$

La variable  $X_t$  est bien définie pour  $\sigma_0$  assez grand, i.e. tel que

$$\sigma_{t \wedge \tau_{1/2}}^2 - \bar{\sigma}^2 \geq \alpha(\sigma_{t \wedge \tau_{1/2}-1}^2 - \bar{\sigma}^2) - g\bar{\sigma}^2 \geq \frac{\alpha}{4}(\sigma_0^2 - \bar{\sigma}^2) - g\bar{\sigma}^2 > 0.$$

Remarquons que cette condition est bien équivalente à écrire

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \frac{4g\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2 - \bar{\sigma}^2} > 0.$$



On vérifie facilement que  $X_t$  est alors bornée inférieurement :

$$X_t \geq \ln \left( \frac{\tilde{\alpha}}{4} \right).$$

Par définition du processus GARCH on a, pour  $1 \leq t < \tau_{1/2}$ ,

$$X_{t+1} - X_t = \ln \left( \alpha + g\zeta_t^2 + \frac{g\overline{\sigma^2}}{\sigma_t^2 - \overline{\sigma^2}} (\zeta_t^2 - 1) \right) - \mathbb{E}[\ln(\alpha + g\zeta^2)],$$

et donc, en notant que  $\frac{\zeta^2 - 1}{\alpha + g\zeta^2} \leq \frac{\zeta^2 - 1}{\alpha + g}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{t+1}|X_t] - X_t &= \mathbb{E} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\overline{\sigma^2}}{\sigma_t^2 - \overline{\sigma^2}} \frac{g(\zeta^2 - 1)}{\alpha + g\zeta^2} \right) \mid \sigma_t \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \frac{\overline{\sigma^2}}{\sigma_t^2 - \overline{\sigma^2}} \frac{g(\zeta^2 - 1)}{\alpha + g} \mid \sigma_t \right] = 0. \end{aligned}$$

$(X_t)_{t \geq 0}$  est ainsi une surmartingale. En appliquant le théorème de Doob et le lemme de Fatou à la suite de variables positives  $(X_{k \wedge \tau_{1/2}} - \ln \tilde{\alpha}/4)_{k \geq 0}$  on obtient

$$\mathbb{E}[X_{\tau_{1/2}}] \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_{k \wedge \tau_{1/2}}] \leq \mathbb{E}[X_0],$$

et donc

$$-\ln \left( \frac{\tilde{\alpha}}{4} \right) - \mathbb{E}[\tau_{1/2}] \mathbb{E}[\ln(\alpha + g\zeta^2)] \leq 0.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}[\tau_{1/2}] \leq \frac{\ln(\tilde{\alpha}) - 2 \ln(2)}{\mathbb{E}[X_{\tau_{1/2}}]} = \left( 1 - \frac{\ln(\tilde{\alpha})}{2 \ln(2)} \right) \tau_{th}(\alpha, g).$$

Pour obtenir la deuxième partie de l'encadrement, observons que

$$\begin{aligned} X_{t+1} - X_t &\geq \ln \left( \alpha - \frac{4g\overline{\sigma^2}}{\sigma_0^2 - \overline{\sigma^2}} + g\zeta_t^2 \right) - \mathbb{E}[\ln(\alpha + g\zeta^2)] \\ &= \ln(\tilde{\alpha} + g\zeta_t^2) - \mathbb{E}[\ln(\alpha + g\zeta^2)]. \end{aligned}$$

Soit la suite de variables i.i.d.  $Y_t = \ln(\tilde{\alpha} + g\zeta_{t-1}^2) - \mathbb{E}[\ln(\alpha + g\zeta_{t-1}^2)]$  définies pour  $t \geq 1$  et de même loi, et la marche aléatoire  $X_t^- = Y_1 + \dots + Y_t$ . Par construction,  $X_t \geq X_t^-$ . Comme le temps d'arrêt  $\tau_{1/2}$  est intégrable, l'identité de Wald donne

$$\mathbb{E}[\tau_{1/2}] \mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}[X_{\tau_{1/2}}^-] \leq \mathbb{E}[X_{\tau_{1/2}}] \leq \ln \left( \frac{1}{4} \right) - \mathbb{E}[\tau_{1/2}] \mathbb{E}[\ln(\alpha + g\zeta^2)].$$

On obtient ainsi l'inégalité voulue :

$$\mathbb{E}[\tau_{1/2}] \geq \frac{-2 \ln(2)}{\mathbb{E}[\ln(\tilde{\alpha} + g\zeta^2)]}$$

Ceci termine la démonstration de la proposition. □

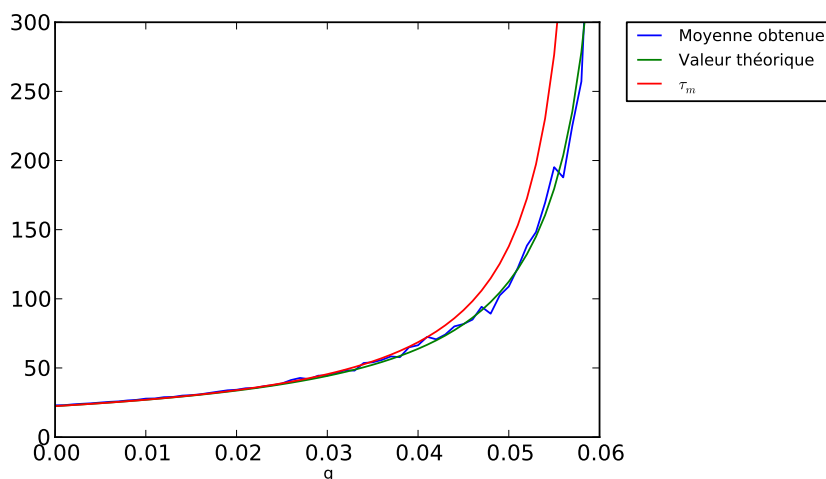


FIGURE 16 – Demi-vie théorique et empirique sur un ensemble de 100 réalisations pour  $\alpha = .94$ , en fonction de  $g$ .

**Etude numérique** Pour illustrer ce résultat théorique, nous avons étudié graphiquement la courbe de demi-vie moyenne obtenue empiriquement pour 100 réalisations du processus GARCH(1,1) avec  $\alpha = .94$  et  $0 < g < .06$  par rapport à la courbe théorique donnée par l’expression 16. Les résultats sont présentés sur la Figure 16. On remarque en particulier que la valeur théorique est effectivement retrouvée dans la pratique sans trop de déviations, et ce pour un nombre relativement faible de réalisations du procédé. Par ailleurs, il est intéressant de constater que  $\tau_m \gg \tau_{th}$  pour les valeurs de  $\alpha$  et  $g$  intéressante dans les applications.

## 5 Conclusion et perspectives

Le modèle GARCH(1,1) est un modèle relativement simple : avec uniquement deux paramètres, il permet de reproduire un certain nombre des *faits stylisés* qui échappent au modèle gaussien de Black–Scholes. En particulier, nous avons présenté des résultats théoriques et numériques montrant que le modèle GARCH permet de reproduire la distribution à queue épaisse observée pour les rendements d’actifs financiers réels, avec des formules fermées permettant le calcul de la plupart des quantités d’intérêt du processus. Les variations de la volatilité au cours du temps sont aussi partie du modèle, faisant apparaître par exemple des épisodes de volatilité plus élevée qui font suite à des valeurs particulièrement grandes des rendements (des chocs). Toutes ces caractéristiques du modèle GARCH sont bien documentées dans la littérature (cf par exemple [Lin09]). Il s’agit ainsi d’un modèle pratique et bien connu dans le monde de la finance.

**Problème inverse et limitations de l’analyse** Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à quantifier et à décrire plusieurs propriétés d’un processus GARCH donné. Dans la pratique, on se pose généralement la question inverse, à savoir : étant donné l’historique

d'un actif financier, comment calibrer au mieux un modèle GARCH(1,1) pour en refléter le comportement réel? Le but est alors de faire de l'inférence statistique, c'est-à-dire, d'estimer à partir des observations les paramètres pour lesquels le modèle GARCH(1,1) décrit le mieux la réalité. L'estimateur utilisé le plus souvent est l'estimateur du quasi maximum de vraisemblance [Ziv09]. Notons que la simplicité du modèle est ici un grand avantage puisque il est nécessaire de fixer seulement deux paramètres,  $\alpha$  et  $g$ .

Dans les parties précédentes, nous avons mis en évidence deux quantités mesurables empiriquement : la puissance  $\mu$  de la distribution des extrêmes étudiée dans les sections 2 et 3, et les temps caractéristiques étudiés dans la section 4. Ces deux observables permettent théoriquement de retrouver les deux paramètres inconnus  $\alpha$  et  $g$ . Notons toutefois que l'étude proposée dans la section 4 ne peut être directement reliée à la réalité, puisque la volatilité n'est pas explicitement mesurable sur les marchés. En outre, il est intéressant d'observer que le modèle GARCH présente plusieurs temps caractéristiques reliés au retour à l'équilibre : par exemple, les deux quantités  $\tau_m$  et  $\tau_{th}$  donnent des temps caractéristiques différents caractérisant deux aspects du retour de la distribution des rendements  $r_t$  vers la loi stationnaire du processus. D'autres estimateurs sont proposés et discutés dans la littérature [Ziv09].

**Perspectives** Certaines difficultés particulières qui nous sont apparues pendant ce travail ouvrent la porte à de nouvelles perspectives d'études. En particulier, nous avons observé la difficulté de retrouver en pratique les paramètres prédits par la théorie tels que l'exposant gouvernant l'épaisseur de la queue de distribution des rendements. Ce problème est lié à des difficultés classiques dans la simulation des événements extrêmes, notamment la petites quantité et la forte corrélation des données disponibles [DM09]. Notons que dans cette étude numérique, nous nous sommes autorisés des millions de points de donnée là où en pratique au plus quelques milliers sont disponibles, rendant le problème encore plus délicat. La mise au point d'estimateurs mieux adaptés est ainsi un enjeu important pour le problème de calibration déjà cité.

Enfin, notons l'existence d'autres modèles très largement étudiés, on peut citer en temps discret les modèles GARCH(p,q) ou EGARCH ([Ter09]). Malgré une théorie déjà bien développée, leur caractère multidimensionnel complique significativement les estimations. En ce qui concerne, les modèles en temps continu, le modèle de Heston est déjà fréquemment utilisé, mais leur mise en place requiert des moyens informatiques et mathématiques plus conséquents.

## Remerciements

Nous remercions chaleureusement tous les organisateurs de la cinquième Semaine d'Etude Maths Entreprises pour cette expérience enrichissante, ainsi que notre correspondant, Alan Picone de chez Deloitte de nous avoir donné un sujet très intéressant qui aura permis à notre groupe de se rencontrer et de travailler ensemble malgré nos domaines de spécialité différents.

## Références

- [BP92] P. Bougerol and N. Picard. Stationarity of garch processes and of some nonnegative time series. *Journal of Econometrics*, 52(12) :115 – 127, 1992.
- [Col01] S. Coles. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer Series in Statistics. Springer, 2001.
- [dHF06] L. de Haan and A. Ferreira. *Extreme Value Theory : An Introduction*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, 2006.
- [DM09] R. A. Davis and T. Mikosch. Extreme value theory for garch processes. In *Handbook of Financial Time Series*, pages 187–200. Springer–Verlag, 2009.
- [Kes73] A. Kesten. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Mathematica*, 131 :207–248, 1973.
- [Lin09] A. M. Lindner. Stationarity, mixing, distributional properties and moments of garch(p,q)-processes. In *Handbook of Financial time series*, pages 43–69. Springer–Verlag, 2009.
- [Mok90] A. Mokkadem. Propriétés de mélange des processus autoregressifs polynomiaux. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 26 :219—260, 1990.
- [Mor07] S. Morgenthaler. *Introduction à la statistique*. Enseignement des mathématiques. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.
- [Rob96] C. Robert. *Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov*. Statistique Mathématique et Probabilité. Economica, 1996.
- [Ter09] T. Terasvirta. An introduction to univariate garch models. In *Handbook of Financial time series*, pages 17–42. Springer–Verlag, 2009.
- [Ziv09] E. Zivot. Practical issues in the analysis of univariate garch models. In *Handbook of Financial time series*, pages 113–155. Springer–Verlag, 2009.