



HAL
open science

Analyse thermographique du comportement des matériaux

Jean-Christophe Batsale, André Chrysochoos, Hervé Pron, Bertrand Wattrisse

► **To cite this version:**

Jean-Christophe Batsale, André Chrysochoos, Hervé Pron, Bertrand Wattrisse. Analyse thermographique du comportement des matériaux. Mesures de champs et identification en mécanique des solides, Hermes, pp.467-496, 2011, 978-2-7462-3112-2. hal-00832805

HAL Id: hal-00832805

<https://hal.science/hal-00832805>

Submitted on 11 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse thermographique du comportement des matériaux

Chapitre rédigé par J.-C. Batsale¹, A. Chrysochoos², H. Pron³ et B. Wattrisse

Issu de l'ouvrage « **Mesures de champs et identification en mécanique des solides** » ISBN 978-2-7462-3112-2

1 Jean-Christophe Batsale, I2M Arts et Métiers Paritech- Bordeaux France

2 André Chrysochoos, Bertrand Wattrisse, LMGC, UMR5508, CNRS, Université Montpellier 2

3 Hervé Pron, Grespi, université de Reims, Champagne Ardenne, France

Chapitre 16

Analyse thermographique du comportement des matériaux

16.1. Introduction

L'utilisation de techniques thermographiques dans le domaine de la mécanique des matériaux est, depuis quelques années, en fort développement dans les laboratoires et dans les centres de recherche et de développement. Cette évolution a été, en grande partie, favorisée par les progrès réalisés en matière de numérisation, de transfert et de traitement des images infrarouges, rendant plus conviviale l'utilisation des nouveaux systèmes thermographiques. Ces systèmes permettent une mesure sans contact de champs de température de surface à des cadences atteignant plusieurs centaines de Hertz pour des images d'environ 80 000 pixels. De façon courante, les variations de température détectables vont de quelques dixièmes à quelques centaines de degré Celsius.

L'intérêt de la thermographie pour le mécanicien vient du fait que la déformation d'un matériau s'accompagne presque toujours de dégagements de chaleur et donc, le plus souvent, de variations de température. Les chaleurs mises en jeu ont plusieurs origines : on distinguera les sources liées à une dissipation d'énergie de celles provenant de couplages thermomécaniques. Les premières traduisent l'irréversibilité des processus de déformation. Lorsque le comportement est visqueux, plastique, viscoplastique ou

lorsque le matériau vieillit, s'endommage, ou se fissure, une partie de l'énergie nécessaire à la déformation est transformée de façon irréversible en chaleur ; on dit alors qu'il y a dissipation d'énergie. Les sources dues aux couplages thermomécaniques sont, elles aussi, révélatrices du comportement du matériau. Elles apparaissent dès que l'état du matériau est sensible aux variations de température. On dit alors que le matériau est le siège de couplages thermomécaniques. L'exemple de la thermo-élasticité est certainement le plus connu des mécanismes de couplage [THO 53]. Un matériau thermo-élastique s'échauffe quand on le comprime ou se dilate quand on l'échauffe. Naturellement, d'autres mécanismes de couplage existent. Citons par exemple celui de l'élasticité caoutchoutique ou entropique des élastomères [CHA 84] ou celui associé aux transformations de phase solide-solide [PEY 98]. Dans ces deux derniers cas, les matériaux se refroidissent quand on les comprime ou se contractent quand on les échauffe.

L'analyse quantitative des dégagements de chaleur, induits par la déformation, reste délicate malgré les progrès accomplis dans le domaine de la mesure, de l'acquisition et du traitement des données infrarouges. En effet, cette analyse s'appuie sur une mesure des effets (les variations de température) pour remonter aux causes (la puissance calorifique). Le lien entre température et source est complexe car les variations de température dépendent non seulement de l'intensité et de la répartition des sources, mais encore de la nature du matériau (diffusivité) et de l'environnement dans lequel il est plongé (échanges avec l'extérieur). Les variations de température ne sont donc pas totalement intrinsèques au comportement des matériaux. Enfin, l'équation de diffusion de la chaleur qui relie température et puissance calorifique fait intervenir plusieurs caractéristiques physiques du matériau (émissivité, chaleur spécifique, tenseur des conductions) qu'il convient de connaître pour mesurer correctement les températures et estimer les sources de chaleur.

Les applications de la thermographie infrarouge en mécanique des matériaux se sont principalement orientées vers le contrôle non destructif. Le domaine d'application le plus ancien et le plus répandu est celui de l'analyse thermique des contraintes. En effet, pour un matériau thermodilatable ayant un comportement thermo-élastique linéaire (isotrope), les variations de température de surface – de l'ordre de quelques dixièmes de degré – peuvent alors être reliées, moyennant quelques hypothèses complémentaires, aux variations de la trace du tenseur des contraintes [SAT 07]. Un autre domaine d'application, actuellement en plein essor, est l'utilisation de la thermographie pour analyser la tenue en fatigue de certains composants. Pour des chargements monochromatiques en contrainte, le principe utilisé pour repérer les zones les plus sollicitées est d'analyser le contenu spectral en temps des champs de température et particulièrement la composante associée à la fréquence double de celle du chargement (méthode dite $2f$ [BRE 82]). Cette composante

ne correspond généralement pas aux effets thermo-élastiques et peut être associée aux effets dissipatifs de la fatigue. Les auto-échauffements induits vont alors de quelques degrés à quelques dizaines de degrés. On peut enfin citer les applications pour lesquelles les variations de température atteignent plusieurs dizaines voire plusieurs centaines de degrés. Dans cette catégorie intervient l'étude du comportement dynamique des matériaux [RAN 08], des procédés d'usinage [SUT 07] ou de mise en forme, des opérations de soudage [PIN 04], des mécanismes de frottement, etc.

Le présent chapitre décrit par la suite les principales étapes du protocole menant à l'estimation des champs de source. Il débute par une présentation succincte du cadre théorique d'interprétation des mesures thermiques et calorimétriques et permet de faire un lien entre les sources de chaleur et les équations comportementales. Il évoque ensuite les difficultés inhérentes à la mesure infrarouge elle-même et à sa retranscription en termes de température. Il présente enfin divers modèles classiques de diffusion permettant de relier les températures aux sources de chaleur mais aussi d'estimer à partir des champs de température, les constantes thermophysiques.

16.2. Cadre thermomécanique

L'interprétation des mesures thermiques ne peut se faire sans référence à un cadre thermodynamique précis, nécessaire à la définition des paramètres thermophysiques et à la classification des sources de chaleur. Nous utiliserons ici le cadre de la thermodynamique des processus irréversible (TPI) du proche équilibre, dont les applications à la modélisation du comportement des matériaux ont commencé à se multiplier à partir des années 60. Pour en savoir plus, le lecteur pourra se référer aux travaux de [COL 67, HAL 75, GER 83] et plus récemment à ceux de [FRE 07]. La TPI offre un cadre cohérent et souple pour décrire le comportement des matériaux. Sa souplesse vient du fait que l'on peut choisir un ensemble de variables d'état afin de décrire les effets macroscopiques de phénomènes microstructuraux nombreux, complexes et souvent couplés.

16.2.1. Equations de comportement

Le processus de déformation est considéré comme étant quasi statique au sens thermodynamique, c'est-à-dire constitué d'une suite continue d'états d'équilibre. L'état d'équilibre de chaque élément de matière est alors décrit en utilisant un ensemble de N variables d'état. On prend le plus souvent : la température T , un

tenseur de déformation ε et $N-2$ variables d'état complémentaires, nécessaires à la description de l'état du matériau. On notera symboliquement α le vecteur regroupant ces variables d'état appelées parfois « internes ».

On note $\psi = e - Ts$, l'énergie libre spécifique de Helmholtz, où e et s sont respectivement l'énergie interne et l'entropie. On suppose que l'énergie est une fonction monotone croissante de l'entropie et que la température absolue est par définition $T = e_{,s}$.

Les équations constitutives du comportement du matériau se scindent en deux groupes.

Les équations d'état : ce sont les dérivées premières de l'énergie libre par rapport aux variables d'état. Ces lois d'état s'écrivent :

$$\begin{cases} s = -\psi_{,T} & (a) \\ \sigma^r = \rho \psi_{,\varepsilon} & (b) \\ A = \rho \psi_{,\alpha} & (c) \end{cases} \quad [16.1]$$

où σ^r est la partie réversible de la contrainte et A est le vecteur récapitulant l'ensemble des variables conjuguées associées aux variables internes.

L'expression locale du second principe de la thermodynamique conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem et permet d'écrire la dissipation sous la forme suivante :

$$d = \sigma : D - \rho \psi_{,\varepsilon} : \dot{\varepsilon} - \rho \psi_{,\alpha} \cdot \dot{\alpha} - \frac{q}{T} \cdot \text{grad} T \geq 0 \quad [16.2]$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy, D le tenseur vitesse de déformation, ρ la masse volumique et q le vecteur courant de chaleur.

Les équations d'évolution : dans le contexte particulier des matériaux standard généralisés [HAL 75], les équations d'évolution sont les dérivées du potentiel de dissipation $\varphi(\dot{\varepsilon}, \dot{\alpha}, q; T)$, dépendant du flux des variables d'état, la température T (ou toute autre variable d'état) agissant comme un paramètre. Le potentiel de dissipation doit être convexe, positif, minimal et nul en $(\dot{\varepsilon} = 0, \dot{\alpha} = 0, q = 0)$ afin que l'inégalité de Clausius-Duhem puisse être vérifiée lors de toute évolution. Lorsque le potentiel

de dissipation est différentiable, les équations de comportement complémentaires s'écrivent :

$$\begin{cases} -\frac{\text{grad}T}{T} = \varphi, q & (a) \\ \sigma^{\text{ir}} = \varphi, \dot{\varepsilon} & (b) \\ X = \varphi, \dot{\alpha} & (c) \end{cases} \quad [16.3]$$

Elles définissent les forces thermodynamiques permettant de réécrire la dissipation comme étant une somme de produit force-flux thermodynamiques. Sous l'hypothèse des petites perturbations (HPP), le tenseur vitesse de déformation s'identifiant à la dérivée temporelle du tenseur des déformations, la dissipation s'écrit :

$$d = \underbrace{(\sigma - \sigma^r)}_{\sigma^{\text{ir}}} : \dot{\varepsilon} - \underbrace{A}_{X} \cdot \dot{\alpha} - \frac{\text{grad}T}{T} \cdot q \geq 0 \quad [16.4]$$

L'identité $d \equiv 0$ définit un processus thermodynamique réversible. Habituellement, la dissipation s'écrit comme la somme de deux termes, supposés séparément positifs : la dissipation intrinsèque, $d_1 = \sigma^{\text{ir}} : \dot{\varepsilon} + X \cdot \dot{\alpha}$, représentative de la dégradation du matériau et la dissipation thermique, $d_2 = -\text{grad}T/T \cdot q$, traduisant le caractère irréversible de la diffusion de la chaleur.

16.2.2. Equation de la chaleur

En petites perturbations, les deux principes de la thermodynamique s'écrivent localement :

$$\begin{cases} \rho \dot{\varepsilon} = \sigma : \dot{\varepsilon} - \text{div}q + r_e \\ \rho T \dot{s} = d_1 - \text{div}q + r_e \end{cases} \quad [16.5]$$

où r_e est une source de chaleur d'origine extérieure (par exemple puissance rayonnée). Une fois noté que :

$$\rho T \dot{s} = -\rho T \frac{d\psi, T}{dt} = \underbrace{-\rho T \psi, TT}_{\rho C_{\varepsilon, \alpha}} \dot{T} - \underbrace{-\rho T \psi, T\varepsilon}_{-w_{\text{the}}^{\cdot}} : \dot{\varepsilon} - \underbrace{-\rho T \psi, T\alpha}_{-w_{\text{thc}}^{\cdot}} \cdot \dot{\alpha} \quad [16.6]$$

l'écriture locale de l'équation de diffusion de la chaleur se déduit directement. En admettant la loi de conduction de Fourier, l'équation de la chaleur s'écrit de la façon suivante :

$$\rho C_{\varepsilon,\alpha} \dot{T} \underbrace{-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)}_{q = -k \operatorname{grad} T} = d_1 + \underbrace{T \sigma_{,T}^r : \dot{\varepsilon} + T A_{,T} \cdot \dot{\alpha}}_{w_h^*} + r_e \quad [16.7]$$

où $C_{\varepsilon,\alpha}$ est la chaleur spécifique¹¹ à ε et α constants, et où k est le tenseur de conduction.

Le terme w_h^* représente la puissance calorifique globale mise en jeu. La notation $(\circ)^*$ signifie que (\circ) dépend du trajet thermodynamique suivi, ce qui signifie, en d'autres termes, que w_h n'est pas, *a priori*, une fonction d'état.

Dans le membre de gauche de l'équation [16.7], le terme $\rho C_{\varepsilon,\alpha} \dot{T}$ représente la puissance calorifique absorbée ou libérée par unité de volume, tandis que le terme $-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T)$ correspond aux fuites locales de chaleur par conduction. Dans la partie droite, on trouve successivement, la dissipation intrinsèque d_1 , les sources de couplage thermomécanique, prenant en compte la sensibilité éventuelle à la température de la contrainte réversible σ^r et des variables conjuguées A . Enfin on trouve la source volumique de chaleur d'origine extérieure r_e .

Les sources de couplage thermomécanique peuvent se scinder en deux parties : la source thermo-élastique w_{the}^* induite par le caractère thermodilatable du matériau, et les autres sources de couplage w_{thc}^* , pouvant par exemple représenter un taux de chaleur latente de changement de phase. Il convient de noter que ces deux puissances ne correspondent pas respectivement de façon systématique aux termes $T \sigma_{,T}^r : \dot{\varepsilon}$ et $T A_{,T} \cdot \dot{\alpha}$. La seule relation générale que l'on puisse écrire est :

$$w_{the}^* + w_{thc}^* = T \sigma_{,T}^r : \dot{\varepsilon} + T A_{,T} \cdot \dot{\alpha} \quad [16.8]$$

1. La chaleur spécifique qui intervient ici est donc définie pour des processus anisothermes durant lesquels toutes les variables d'état, hormis la température, restent constantes. Le lecteur pourra s'interroger sur la pertinence de l'existence de tels processus. Par ailleurs, on rappelle que le classique C_p des *Handbooks of Chemistry and Physics* implique que température et pression sont les seules variables d'état utilisées pour décrire le comportement thermomécanique du matériau.

Si ρ et $C_{\varepsilon,\alpha}$ sont des constantes matérielles et si le tenseur de conduction reste aussi constant et isotrope – en notant alors k le coefficient de conduction isotrope – l'équation de la chaleur se simplifie en :

$$\rho C_{\varepsilon,\alpha} \dot{T} - k \Delta T = w_h^* + r_e \quad [16.9]$$

Si enfin on suppose que le champ de température d'équilibre T_0 et la source r_e sont indépendantes du temps, en notant $\theta = T - T_0$ la variation de température par rapport à l'équilibre thermique local, on a $-k \Delta T_0 = r_e$ et :

$$\rho C_{\varepsilon,\alpha} \dot{\theta} - k \Delta \theta = w_h^* \quad [16.10]$$

16.2.3. Bilan d'énergie associé à un essai de charge-décharge

Considérons maintenant un essai de charge-décharge pour lequel $\mathcal{A} = (T_{\mathcal{A}}, \varepsilon_{\mathcal{A}}, \alpha_{\mathcal{A}})$ et $\mathcal{B} = (T_{\mathcal{B}}, \varepsilon_{\mathcal{B}}, \alpha_{\mathcal{B}})$ représentent les états thermodynamiques du matériau en début et fin d'essai. La forme du bilan d'énergie varie suivant les situations suivantes, illustrées schématiquement à la figure 16.1 :

- a) $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$: cas général ;
- b) $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ mais $\varepsilon_{\mathcal{A}} = \varepsilon_{\mathcal{B}}$: une boucle d'hystérésis mécanique est associée au cycle charge-décharge ;
- c) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$: le cycle mécanique est aussi un cycle thermodynamique.

Dans le cadre de petites perturbations, la puissance mécanique développée par le matériau pour se déformer est définie par :

$$w_{\text{def}}^* = \sigma : \dot{\varepsilon} \quad [16.11]$$

L'équation [16.4] montre que la dissipation intrinsèque est la différence entre le taux d'énergie de déformation et le taux d'énergie élastique, w_e^* , augmentée de la puissance bloquée w_s^* :

$$\begin{cases} d_1 = w_{\text{def}}^* - (w_e^* + w_s^*) & (a) \\ w_e^* + w_s^* = \sigma^r : \dot{\varepsilon} + A \cdot \dot{\alpha} & (b) \end{cases} \quad [16.12]$$

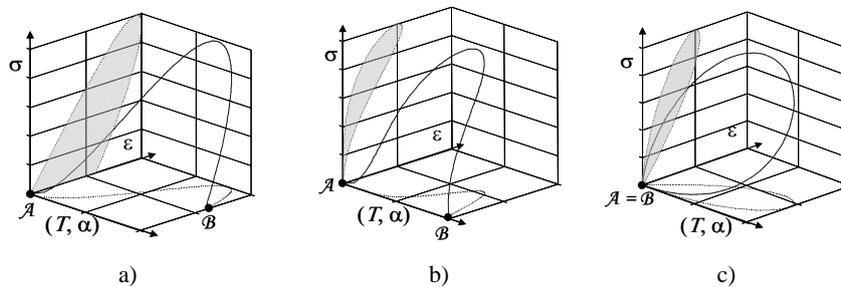


Figure 16.1. Courbe contrainte-déformation vue comme une projection dans un plan « mécanique » d'un trajet « thermomécanique » [CHR 10]

A nouveau, on notera que la correspondance systématique entre les termes des deux membres de l'équation [16.12b] n'est possible que pour des modèles thermo-mécaniques particuliers.

En notant $t_B - t_A$ la durée de l'essai, les équations [16.5] et [16.12] conduisent à une écriture de l'énergie de déformation associée au cycle charge-décharge de la forme :

$$w_{\text{def}} = \int_{t_A}^{t_B} d_1 dt + \int_{t_A}^{t_B} (\rho \dot{e} - \rho C_{\varepsilon, \alpha} \dot{T} + w_{\text{the}}^{\bullet} + w_{\text{thc}}^{\bullet}) dt \quad [16.13]$$

Cette équation montre que :

a) dans le cas général, l'énergie de déformation peut s'écrire en fonction de l'énergie dissipée, des variations d'énergie interne, de la chaleur absorbée durant l'essai de charge-décharge et de la chaleur mise en jeu par les couplages thermo-mécaniques ;

b) lorsque l'essai mécanique engendre une boucle d'hystérésis, l'énergie de déformation correspond à l'énergie A_h de l'aire de la boucle d'hystérésis, si l'essai n'est qu'uniaxial ;

c) lors d'un cycle thermodynamique, l'énergie de déformation est due aux effets dissipatifs intrinsèques et aux mécanismes de couplages, le produit $\rho C_{\varepsilon, \alpha}$ étant considéré comme constant. Le bilan d'énergie s'écrit alors, sous HPP, avec la forme simplifiée suivante :

$$w_{\text{def}} = \int_{t_A}^{t_B} \left(\sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) dt = \int_{t_A}^{t_B} d_1 dt + \int_{t_A}^{t_B} (w_{\text{the}}^{\bullet} + w_{\text{thc}}^{\bullet}) dt \quad [16.14]$$

L'équation [16.14] permet d'établir les conditions restrictives pour lesquelles l'énergie dissipée peut être estimée en calculant l'aire d'une boucle d'hystérésis. Sur un plan mécanique tout d'abord, (ii) rappelle qu'il importe de connaître le caractère localement multi-axial de l'essai de charge-décharge et de n'oublier aucune contribution. Ensuite, l'équation [16.14] montre que les sources de couplage peuvent aussi jouer sur la taille de l'aire d'hystérésis. Ceci renforce bien sûr l'intérêt de déduire des variations de température les diverses sources de chaleur afin d'estimer l'importance relative des effets dissipatifs et de couplage [CHR 10].

16.3. Aspects métrologiques

Le domaine du spectre électromagnétique associé au rayonnement infrarouge correspond aux longueurs d'onde comprises entre 0.8 et 1 000 μm . La thermographie utilise généralement les plages 2-5 μm (SW) et 7-15 μm (MW). Le rayonnement issu de la scène thermique observée traverse l'atmosphère, puis l'optique de la caméra avant d'arriver sur le capteur infrarouge (le plus souvent de type InSb ou HgCdTe) dont il va modifier l'état électrique pendant la durée du temps d'intégration. Dans le cas des caméras à matrices de détecteurs, les charges électriques de chaque capteur (pixel) sont ensuite transférées au système d'acquisition *via* un multiplexeur, avant d'être stockées dans la mémoire d'un ordinateur. La grandeur d'intérêt pour les applications est rarement le rayonnement, mais plutôt la température. Il convient donc de convertir de façon fiable le rayonnement ainsi numérisé en température de la scène observée. Chacune de ces différentes étapes est susceptible de générer des perturbations qui vont diminuer l'exactitude et la qualité de la mesure thermique.

Dans de nombreuses applications (détermination de sources de chaleur ou de propriétés thermo-physiques), il est nécessaire d'estimer les dérivées spatiales et temporelles des champs de température obtenus par thermographie infrarouge. Ainsi, les aspects métrologiques que sont la fiabilité temporelle et la résolution spatiale et l'étalonnage demeurent aussi des fondamentaux, quelle que soit l'analyse retenue (nodale ou modale, impulsionnelle ou modulée, etc.). Par exemple, le calcul correct de gradients nécessite une combinaison des caractéristiques thermiques et spatiales, celui de dérivées temporelles relève d'une combinaison étalonnage en température/fiabilité temporelle. En ce qui concerne l'identification de propriétés thermo-physiques, des combinaisons des trois aspects interviennent le plus souvent, sauf dans quelques cas particuliers (par exemple, la détermination de la diffusivité thermique, ne nécessite qu'une maîtrise des paramètres spatiaux et temporels).

Dans ce paragraphe, les principales lois du rayonnement sont brièvement rappelées. Elles permettent de décrire le trajet du rayonnement jusqu'à la caméra [GAU 99, PAJ 89, PAP 07]. Les principales méthodes d'étalonnage utilisées dans le cas des matrices de détecteurs seront ensuite évoquées tout comme quelques points de métrologie liés à la mesure infrarouge, sans toutefois aborder les effets proprement géométriques liés à la formation des images (distorsions, aberrations, etc.).

16.3.1. Rappels de physique du rayonnement

La luminance L (unité : $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$) est la puissance émise ($d\Phi$) par unité d'angle solide ($d\Omega$) et par unité de surface apparente ($dS \cos\theta$) d'une source étendue dans une direction donnée (θ, φ) :

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dS \cos\theta} \quad [16.15]$$

L'émittance M (unité : $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$) est la puissance émise $d\Phi$ par unité de surface d'une source étendue, dans tout un hémisphère. Il s'agit donc de la luminance intégrée sur toutes les directions d'un hémisphère. Si la luminance est la même suivant toutes les directions (θ, φ), elle satisfait alors la loi de Lambert, qui permet d'écrire : $M = \pi L$. La luminance et l'émittance monochromatiques L_λ et M_λ sont définies comme étant les dérivées de la luminance et de l'émittance par rapport à la longueur d'onde λ . Lorsqu'un rayonnement incident Φ_i rencontre un objet, une partie de ce rayonnement est réfléchi Φ_r , une autre est absorbée par l'objet Φ_a et le reste est transmis Φ_t . On introduit ainsi les facteurs de réflexion $\rho_r(\lambda, T, \theta, \varphi)$, d'absorption $\alpha_r(\lambda, T, \theta, \varphi)$ et de transmission $\tau_r(\lambda, T, \theta, \varphi)$, qui dépendent de la longueur d'onde λ , de la température T de l'objet, et de la direction du rayonnement (θ, φ). La conservation de l'énergie implique que la somme de ces trois facteurs doit toujours être égale à 1. Lorsque l'objet est à l'équilibre thermodynamique, il réémet le rayonnement absorbé, de sorte que le facteur d'émissivité ε_r est égal à α_r .

Les capteurs infrarouges sont sensibles au rayonnement infrarouge issu d'un objet. Les corps noirs ont la particularité de réémettre tout le rayonnement qu'ils reçoivent quelle que soit la longueur d'onde (c'est-à-dire $\alpha_r = \varepsilon_r = 1$). Dans ce cas particulier, la loi de Planck permet de relier la luminance spectrale L_λ^{CN} à la température T du corps noir observé :

$$L_\lambda^{\text{CN}} = \frac{c_1}{\pi\lambda^5 \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad [16.16]$$

où $c_1 = 3.741832 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^2$ et $c_2 = 1.438786 \cdot 10^{-2} \text{ K.m}$. En intégrant la loi de Planck sur toutes les longueurs d'onde, on obtient la loi de Stefan : $L^{\text{CN}} = \pi^{-1} \sigma_b T^4$ ou bien, en appliquant la loi de Lambert au corps noir : $M_{\text{CN}} = \sigma_b T^4$, avec $\sigma_b = 5.67032 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ la constante de Stefan-Boltzmann. Ces deux dernières expressions permettent de relier le flux rayonné, mesuré par un capteur infrarouge, à la température du corps noir observé. Dans la pratique très peu d'objets se comportent comme des corps noirs et on établit la relation entre rayonnement et température en intégrant la luminance monochromatique L_λ du corps sur la gamme de longueurs d'onde, avec $L_\lambda = \varepsilon_r(\lambda, T, \theta, \varphi) L_\lambda^{\text{CN}}$. Selon les valeurs prises par les coefficients α_r , ρ_r et τ_r , on distingue plusieurs catégories de corps : les corps opaques ($\tau_r \approx 0$), les corps brillants ($\rho_r \gg 0$ et $\varepsilon_r \approx 0$), et les corps gris ($\varepsilon_r \approx \varepsilon_{r0} = \text{constante}$). Souvent, les mesures sont effectuées sur des échantillons plans, revêtus d'une peinture mate noire afin d'obtenir des surfaces d'émissivité proches de 1, sensiblement uniformes, indépendantes de la direction d'observation, et les variations de température sont suffisamment faibles pour pouvoir négliger la dépendance de l'émissivité avec T .

16.3.2. Etalonnage

Les caméras infrarouges sont généralement commercialisées avec leur système de paramétrage et d'acquisition, ainsi qu'avec des applications permettant d'effectuer des traitements élémentaires (conversion flux numérisé-température, moyenne, écart-type, affichage, etc.). Les lois d'étalonnage proposées par les constructeurs sont basées sur une hypothèse de linéarité de la réponse (flux émis-flux numérisé) sur toute la gamme comprise entre les saturations haute et basse des capteurs (pixels). Les différences de réponse entre les pixels sont interprétées comme des distributions de gain et d'offset à appliquer à la réponse moyenne du détecteur (correction de non-uniformité : *NUC*). Les gains et offsets de chaque pixel sont calculés de manière à obtenir des distributions de flux numérisés uniformes correspondant aux images de deux scènes thermiques uniformes prises à des températures différentes. Il est prudent d'utiliser pour cela un corps noir étendu de qualité. Récemment, certains constructeurs ont proposé de relier les valeurs des gains et offsets à la « température interne » de la caméra pour rendre compte des dérives thermiques liées à l'établissement des fuites entre la caméra et son environnement (correction de non-uniformité étendue : *ENUC*). La dérive temporelle des caméras infrarouges sera abordée plus en détail dans le paragraphe 16.3.3.

Une fois la réponse de chaque capteur ramenée à la réponse moyenne du détecteur, on utilise une loi d'étalonnage globale (le plus souvent un polynôme de degré 2 ou 3) pour relier le flux numérisé moyen à la température moyenne.

Les matrices de capteurs présentent toujours un certain nombre de pixels défectueux (en général moins de 0,5 %) correspondant, par exemple, à des pixels saturés ou à des pixels « éteints ». Ils sont localisés à partir de critères portant principalement sur des écarts par rapport à la réponse moyenne (en termes de flux numérisé, de gain, d'offset, etc.). Les constructeurs proposent de remplacer les valeurs des flux numérisés pour ces pixels par celles de leur plus proche voisin non défectueux (opération de remplacement des pixels défectueux : *BPR*).

La validité de l'étalonnage constructeur peut être vérifiée facilement en observant, avec la même caméra, la même scène thermique en utilisant des lois d'étalonnage constructeur associées à des paramètres d'acquisition différents (temps d'intégration ou gamme de mesure).

La figure 16.2 illustre les résultats issus d'observations faites sur un corps noir à l'aide de différentes caméras matricielles. Ils montrent qu'il est préférable d'utiliser le centre de la matrice et le milieu de la gamme si l'on applique les lois d'étalonnage constructeur. De plus, si l'exigence de précision va au-delà du degré, il est préférable de réaliser soi-même un étalonnage complet de la matrice dans les conditions d'essais, et la configuration de la caméra (temps d'intégration, fenêtrage) utilisée pour les mesures.

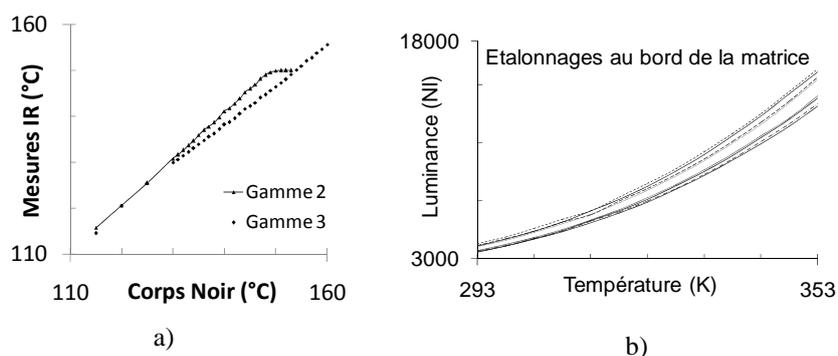


Figure 16.2. Vérification de l'étalonnage constructeur à l'aide d'un corps noir étendu :
 a) comparaison entre deux gammes d'une même caméra (FLIR SC1000), b) comparaison
 entre les réponses de différents pixels (CEDIP IRC 320-4LW)

Cet étalonnage permet aussi de s'affranchir des limitations inhérentes aux procédures de type *NUC-BPR* (hypothèse de linéarité valable « suffisamment loin » de la saturation pour la *NUC*, introduction d'une corrélation spatiale forte entre certains pixels voisins pour la *BPR*). Il nécessite cependant un corps noir étendu pour imposer une source de rayonnement uniforme associée à différentes valeurs de température. La loi d'étalonnage de chaque pixel peut être considérée sous forme polynomiale ou sous forme d'une loi de type « Planck », et les coefficients d'étalonnage de chaque pixel sont obtenus, en approximant au sens des moindres carrés, les couples (flux numérisé, température) par la loi d'étalonnage retenue.

Les pixels défectueux sont ensuite localisés en utilisant un critère d'écart à la température de consigne. L'opération de *BPR* est supprimée, les températures de ces *bad pixels* n'étant pas prises en compte dans tous les traitements ultérieurs. Une procédure particulière d'étalonnage « pixel à pixel » est détaillée dans [HON 05].

16.3.2.1. Analyse temporelle

Le temps d'intégration fixe la durée pendant laquelle le rayonnement issu de la scène thermique va être capté par la caméra. A ce titre, il détermine la résolution temporelle du dispositif. Le temps de transfert des images vers la mémoire de stockage étant souvent bien supérieur au temps d'intégration (quelques ms contre quelques μ s), la caméra ne « voit » donc pas la scène pendant la majeure partie d'une période image, ce qui est particulièrement pénalisant pour l'observation de phénomènes rapides.

Une fois choisi le temps d'intégration, l'analyse temporelle peut être perturbée par l'absence de certaines images dans une séquence. Selon les matériels, un décalage temporel d'une ou deux images peut être observé en début de séquence. Il est associé au fait que les premières images stockées ne sont pas forcément les premières images de la séquence en cours. Un simple décalage dans la séquence saisie suffit alors pour corriger cet « effet de bord ».

Le second problème, plus pénalisant, est l'absence de certaines images au beau milieu d'un film. Si ce problème est relativement insignifiant en termes de visualisation, il peut devenir critique dès que le temps intervient dans le traitement d'image. Il est alors impératif d'utiliser des algorithmes qui soient compatibles avec des fréquences d'acquisition variables. Pour dénombrer et isoler les temps des images manquantes, il est possible de lire directement les informations de temps dans les fichiers issus de la caméra, sous réserve que la précision avec laquelle elles sont stockées, soit suffisante vis-à-vis des fréquences d'acquisition utilisées. Selon, les modèles de caméra, le nombre d'images ainsi manquantes peut aller de une à plusieurs dizaines.

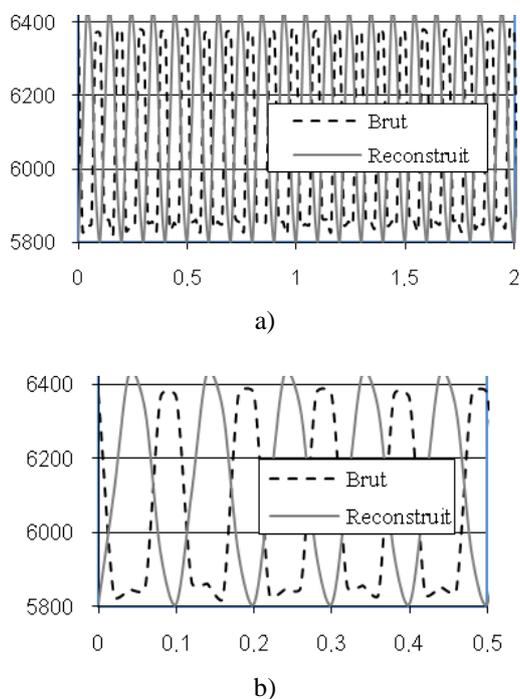


Figure 16.3. Erreurs induites par la perte d'images : en détection synchrone, l'amplitude est peu affectée (a) mais la phase est fortement faussée (b)

La figure 16.3 présente les artefacts observés dans le cas d'un traitement de détection synchrone numérique appliqué à une série de cinq cents images dans laquelle il manquait seulement deux images.

Si l'amplitude est relativement peu affectée, la phase a un comportement totalement erratique, et prend une valeur dépendant directement du nombre et de la phase des images manquantes.

16.3.2.2. Résolution spatiale

Incontestablement, le passage de la technologie « balayage » vers la technologie « matricielle » a conduit à une amélioration de la qualité d'imagerie (figure 16.4).

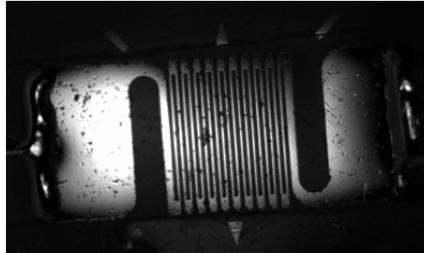


Figure 16.4. Jauge extensométrique (pistes de 20 μm environ) observée avec un objectif G1

Dans ces capteurs matriciels, l'indépendance réelle de chaque capteur par rapport à ses voisins mérite d'être vérifiée. Un des tests les plus courants en caractérisation spatiale des appareillages de mesure est la fonction de réponse à une fente (*FRF*) : la caméra est placée au regard d'une fente thermique (fente de largeur variable refroidie et placée devant une plaque chaude), et on étudie la fonction de contraste suivante :

$$FRF = \frac{V(x) - V_{\text{fond}}}{V_{\text{max}} - V_{\text{fond}}} \quad [16.17]$$

où $V(x)$ est la valeur relevée sur la fente pour une largeur x , V_{max} la valeur relevée dans la fente lorsque sa largeur est grande et V_{fond} la valeur relevée sur la pièce refroidie (figure 16.5a). En général, une « bonne mesure » nécessite, pour des caméras 320×240 pixels, que l'objet soit projeté sur deux détecteurs au moins. Ainsi, avec un objectif « grandissement 1 » et une matrice de périodicité 30 μm , on n'obtient une information véritablement indépendante que tous les 60 μm .

Une étude de cette fonction pour différentes positions montre clairement (figure 16.5b) que les pixels sont nettement plus corrélés sur les bords de l'image qu'au centre. Notons qu'il s'agit bien d'un problème de corrélation entre points de mesure voisins ; cela signifie, d'une part, que c'est le contraste (et nullement la valeur moyenne) qui se trouve être dégradé, et, d'autre part, qu'il y a convolution de la scène thermique par cette fonction de réponse.

Il ne suffit donc pas de réaliser une simple correction « géométrique » (de repositionnement des points dans l'image, ou de matrice de gains ou d'offsets par exemple appliqués à chaque pixel) de l'image pour obtenir un champ de mesures de températures fiables et indépendantes, mais réellement d'une procédure de déconvolution.

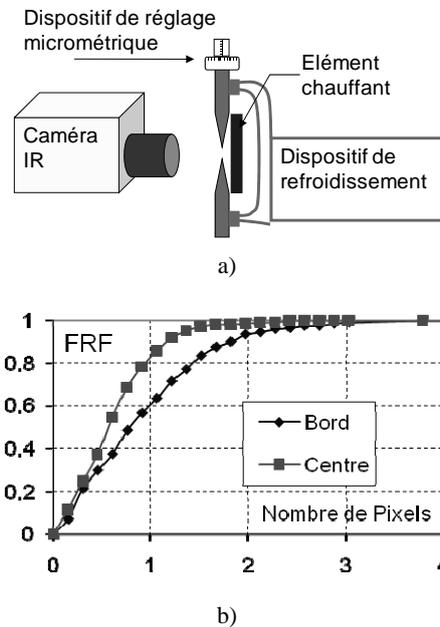


Figure 16.5. a) Fonction de réponse à une fente ; b) FRF en bord de matrice par rapport à celle au centre de matrice (caméra CEDIP IRC 320-4 LW)

16.3.3. Bruits et dérives

16.3.3.1. Stabilité thermique du matériel

Afin de limiter le rayonnement au voisinage du capteur infrarouge, ce dernier est refroidi à environ 80 K. Dans les caméras de mesure récentes, le refroidissement est assuré par un moteur de cycle Stirling, qui a remplacé le refroidissement à l'azote liquide des caméras plus anciennes. Là encore, si les appareillages ont gagné en portabilité, ils ont, par contre, perdu en performance. D'une part, la mise en froid qui était quasi instantanée avec un refroidissement à l'azote, nécessite désormais au moins une dizaine de minutes avant laquelle toute mesure est impossible (figure 16.6a).

D'autre part, une fois la mise en froid effectuée, des dérives de certains matériels de l'ordre de 1 à 5 mK par seconde ont été observées sur des durées pouvant atteindre quelques heures (figure 16.6b). Ces dérives de température interne de la caméra modifiant les réponses des capteurs, il convient soit d'utiliser la caméra une fois qu'elle est stabilisée, soit de tenir compte de la dérive interne dans la conversion

du signal numérisé en température (NUC compensée). Par ailleurs, certains matériels de technicité moindre présentent des instabilités de 0,5 voire même 1 K et se révèlent de fait inadaptés aux mesures quantitatives.

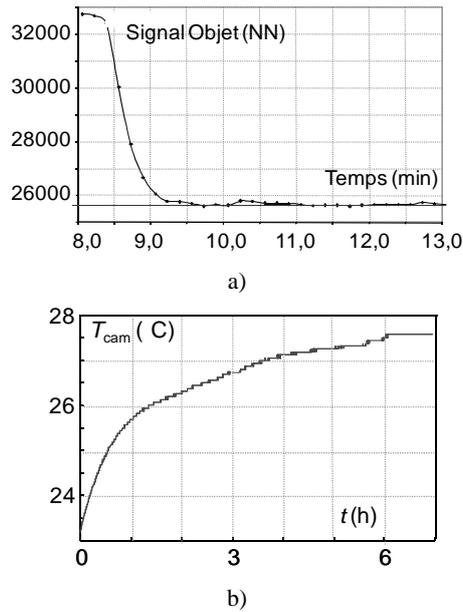


Figure 16.6. a) Mise en froid CEDIP IRC320-4LW,
b) dérive interne CEDIP JADE III

16.3.3.2. Stabilité de l'ambiance

Le signal mesuré par une caméra (qui s'apparente à une luminance) provient, certes, essentiellement de l'objet (supposé opaque et gris sur la bande spectrale de la caméra) mais aussi, dans une moindre mesure, de l'environnement et de l'atmosphère (figure 16.7). Si l'environnement est assimilable à un radiateur intégral de température T_{env} et si l'atmosphère entre la cible et la caméra est isotherme à la température T_{atm} , de coefficient de transmission τ_a , la luminance mesurée L_{mes} s'écrit en fonction de la luminance L^0 de l'objet sous la forme :

$$L_{mes} = \tau_a \cdot \varepsilon \cdot L^0(T_{obj}) + \tau_a (1 - \varepsilon) L^0(T_{env}) + (1 - \tau_a) L^0(T_{atm}) \quad [16.18]$$

Pour des mesures à courte distance (de l'ordre de quelques dizaines de centimètres), l'atmosphère peut être raisonnablement considérée comme transparente (athermane), et donc :

$$L_{\text{mes}} = \varepsilon L^0(T_{\text{obj}}) + (1 - \varepsilon) L^0(T_{\text{env}}) \quad [16.19]$$

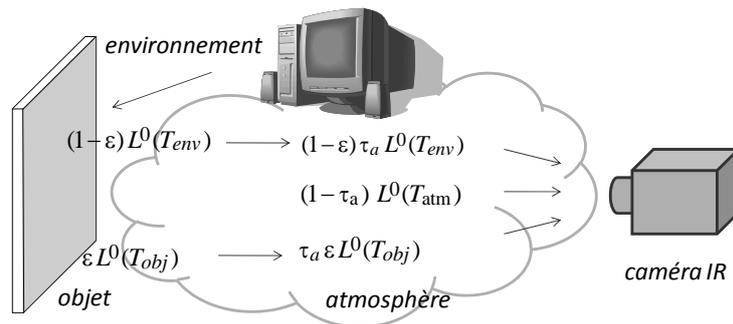


Figure 16.7. Bilan radiométrique (simplifié)

Cette équation montre que l'environnement doit être raisonnablement maîtrisé pour limiter l'influence des rayonnements parasites (reflet d'un radiateur ou de toute autre source de rayonnement IR, ne serait-ce que l'opérateur lui-même) ; cette précaution est bien d'autant plus importante que les élévations de température que l'on cherche à mesurer sont faibles. Par ailleurs, l'intérêt d'utiliser un revêtement de forte émissivité (et donc de faible réflectivité) est évident pour minimiser le ratio flux parasites/flux objet.

Dans ce même ordre d'idée, notons également la présence de l'« effet Narcisse » (reflet du détecteur sur la scène), particulièrement observable lors de l'utilisation d'objectifs « macro » (par exemple objectif de grandissement 1, [PRON 00]) ; en général, il ne s'agit que d'une carte d'offsets qui se superpose à la scène, et qui peut donc être compensée par soustraction d'une image de référence.

Enfin, les éventuelles instabilités de l'environnement, parce qu'elles modifient les conditions d'échange entre l'échantillon et l'ambiance, doivent être prises en compte lorsque l'évolution temporelle du champ de température est nécessaire ; par exemple, il est utile de vérifier que l'évolution de la température de la pièce aux différentes heures de la journée (figure 16.8) n'influence pas de façon significative les mesures.

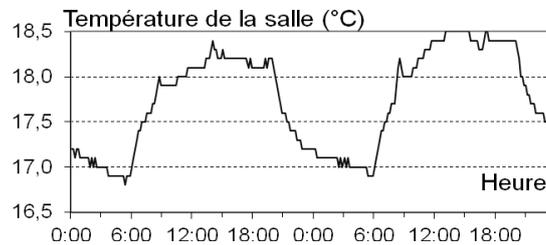


Figure 16.8. Evolution temporelle de la température de l'environnement dans une pièce standard sur 14 heures

16.4. Modèles de diffusion et méthodes d'identification

Un objectif ultime du traitement des images thermiques pourrait être la détermination des champs de source en tout point d'une structure 3D en tenant des évolutions des caractéristiques thermophysiques au cours du processus. Pour des raisons de métrologie liées à la physique du rayonnement et aux techniques IR, mais aussi des raisons d'ordre mathématique (mesures en surface, problème inverse mal posé), ceci est (actuellement) hors d'atteinte. Les modèles proposés dans la suite se focaliseront sur des problèmes de diffusion dans des systèmes simplifiés, soit 2D (plaque mince, milieu semi-infini), soit 1D (poutre droite), voire 0D, (point matériel placé dans un environnement homogène sollicité de façon uniforme). On pourra cependant, grâce à des transformations intégrales, présenter des relations directes entre le champ des températures mesuré et certains types de sources dans le cas de milieux épais. Cette section met donc en avant les équations permettant d'estimer un paramètre thermophysique ou encore une source de chaleur à partir des variations de température observées. Les potentialités multiples offertes par les transformations intégrales du champ spatial de température en lien avec le modèle de transfert de chaleur sont un des avantages du traitement de champs de température offert par une caméra infrarouge. Dans ce qui suit, il sera fait systématiquement référence à des exemples opérationnels d'application.

16.4.1. Equation de diffusion pour des plaques minces

Le milieu considéré est une plaque mince de longueur L , de largeur l et d'épaisseur e . Les coordonnées associées sont respectivement (x, y, z) . Dans le cadre des essais, les hypothèses suivantes sont souvent faites :

- la chaleur spécifique et le coefficient de conduction sont des constantes caractéristiques du matériau, indépendantes de l'état interne ;

– les essais étant quasi statiques, les termes convectifs sont négligés dans la dérivation particulière. Notons que le couplage de techniques thermographiques avec celles de corrélation d'images de granularité permet désormais de suivre la température d'éléments de surface matériels (*esm*) et de prendre en compte la chaleur convectée [BER 08, CHR 09, CHR 10].

Pour se ramener à un problème 2D, l'idée ici est de considérer que la valeur moyenne suivant l'épaisseur de la source $s(x, y, z, t)$ est suffisamment représentative de sa distribution suivant cette épaisseur. On note alors classiquement :

$$\bar{f}(x, y, t) = \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} f(x, y, z, t) dz \quad [16.20]$$

l'opération de moyenne appliquée à f . En supposant les paramètres thermophysiques constants suivant l'épaisseur et en appliquant l'opération de moyenne à l'équation de diffusion de la chaleur [16.10], on obtient :

$$\rho C \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\bar{\theta}}{\tau_{th}^{2D}} \right) - k \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} \right) = \bar{s} \quad \text{avec} \quad \rho C \frac{\bar{\theta}}{\tau_{th}^{2D}} \approx -\frac{k}{e} \left[\frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \quad [16.21]$$

où l'approximation relative aux pertes de chaleur hors plan suppose des fuites linéaires en température (conditions de Fourier) à la frontière et où la constante de temps τ_{th}^{2D} caractérise les flux de chaleur au travers des surfaces $z = \pm \frac{e}{2}$.

16.4.2. Equation de diffusion pour des poutres droites

Lorsque la géométrie le permet, il peut être intéressant de travailler uniquement avec des profils de température et de source le long d'une poutre droite. Ceci représente un gain en ce qui concerne le stockage des données, la rapidité du traitement et l'amélioration du rapport signal sur bruit des mesures thermiques. Cette approximation est d'autant plus acceptable que la distribution des sources au sein même d'une section droite S fluctue peu et que sa valeur moyenne reste représentative. En supposant que les paramètres thermophysiques restent constants sur chaque section droite et en intégrant alors l'équation [16.10] sur S , on obtient une version 1D de l'équation de diffusion de la chaleur. En effet en notant :

$$\bar{\bar{f}}(x, t) = \frac{1}{S} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} f(x, y, z, t) dz dy \quad [16.22]$$

l'équation de diffusion devient :

$$\rho C \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \frac{\bar{\theta}}{\tau_{th}^{1D}} \right) - k \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2} \right) = s \quad \text{avec} \quad \frac{\bar{\theta}}{\tau_{th}^{1D}} \approx - \frac{k}{\rho C} \left(\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \right) \quad [16.23]$$

L'approximation sur les fuites de chaleur latérales repose encore ici sur une hypothèse d'échange de chaleur linéaire en température à la frontière ∂S de chaque section droite. Le coefficient d'échange h entre l'échantillon et l'air ambiant est supposé constant :

$$-k \text{grad} \theta \cdot n = h \theta \quad [16.24]$$

où n est la normale extérieure à ∂S .

Des exemples d'application à la striction des aciers et des polymères ont été présentées dans [CHR 00] et [MUR 08].

16.4.3. Equation de diffusion pour un élément de volume matériel monotherme

Dans le cadre classique et important en pratique des essais de traction sur des plaques, on peut ramener le problème de diffusion au centre de la partie utile de l'échantillon à un simple problème différentiel du temps. Il faut pour cela que le matériau possède des caractéristiques thermophysiques constantes, que le chargement soit homogène, se traduisant ici par une distribution uniforme de sources, que le champ de (variation de) température initial soit uniforme, et enfin, que les conditions aux limites de l'éprouvette soient linéaires de type Fourier et symétriques sur chaque couple de surfaces en regard. Sous toutes ces conditions, on peut montrer [CHR 00] que la solution du problème de diffusion 3D est presque totalement portée par le premier vecteur propre de la solution spectrale. Le problème de diffusion 3D se ramène alors à l'équation différentielle suivante :

$$\rho C \left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau_{eq}} \right) \approx s \quad [16.25]$$

où θ est une variation de température calculée au centre de l'échantillon, la constante de temps τ_{eq} caractérisant l'ensemble des fuites [CHR 95]. Cette équation de la chaleur sous forme d'EDO a été utilisée en fatigue à grand nombre de cycles [BOU 04, DOU 09].

16.4.4. Transformations intégrales et méthode des quadripôles dans le cas de milieux épais

Il est souvent pratique de disposer de relations directes entre le champ de température observé par une caméra infrarouge et la source d'excitation. Dans le cas de la caractérisation de propriétés thermophysiques, pour des milieux épais, la source est calibrée et appliquée, le plus souvent, en surface de l'échantillon. Dans le cas de caractérisation de sources internes ces méthodes permettent d'accéder à la réponse à un point source localisé (fonction de Green) en profondeur.

L'idée principale est de ramener l'équation générale de diffusion à une équation 1D dépendant de la variable d'espace relative à la profondeur, disons, x . Examinons un cas de transfert uniquement 1D dans le sens x en supposant que les pertes latérales sont négligeables (où $\tau_{th}^{1D} \rightarrow +\infty$). On retrouve alors l'expression [16.23]. Il peut être important de développer des expressions directes de la réponse de température en fonction d'une excitation localisée grâce à une transformation de Laplace fonction de la variable temporelle. L'équation de la chaleur régissant les transferts 1D transitoires dans un mur homogène d'épaisseur e s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad [16.26]$$

où $a = k/\rho C$ est la diffusivité thermique d'un milieu homogène. Ce paramètre thermophysique (en m^2s^{-1}) est crucial pour l'estimation de la répartition spatiale des termes sources.

L'expression précédente peut être exprimée par une transformation de Laplace telle que :

$$\tilde{\theta}(x, p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) \theta(x, t) dt \quad [16.27]$$

la variable de Laplace p est alors homogène à une fréquence en s^{-1} . Si $\theta(x, t = 0) = 0$ en tout point du milieu, alors l'équation différentielle suivante est obtenue dans l'espace de Laplace :

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}}{dx^2} = \frac{p}{a} \tilde{\theta} \quad [16.28]$$

La définition de la transformée de Laplace du flux de chaleur à une profondeur x dans cet espace étant :

$$\tilde{q}(x, p) = -k \frac{d\tilde{\theta}}{dx}(x, p) \quad [16.29]$$

Le système différentiel ordinaire suivant fait intervenir les vecteurs [température, flux] dans l'espace de Laplace :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/k \\ -\rho C p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} \quad [16.30]$$

Intégrée sur un domaine $[0, e]$, la solution du système [16.30] s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}(x=0, p) \\ \tilde{q}(x=0, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(x=e, p) \\ \tilde{q}(x=e, p) \end{bmatrix} \quad [16.31]$$

où, en notant $r_a(p) = \sqrt{\frac{p}{a}}$:

$$A = D = \cosh(r_a e), \quad B = \frac{\sinh(r_a e)}{k r_a} \quad \text{et} \quad C = k r_a \sinh(r_a e) \quad [16.32]$$

Ce type d'approche a été utilisée initialement pour la description analogique de circuits électriques de type « quadripôles » d'où le nom de la méthode [CAR 59, MAI 00].

Dans le cadre d'une excitation impulsionnelle en $x=0$ ($\tilde{q}(x=0, p) = Q$, avec Q en J.m^{-2}) pour un échantillon supposé par ailleurs isolé thermiquement, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}(x=0, p) \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(x=e, p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad [16.33]$$

La transformée de Laplace de la réponse de température, visée par la caméra infrarouge donne en face avant ($x=0$) :

$$\tilde{\theta}(x=0, p) = Q \frac{A}{C} = Q \frac{\cosh(r_a e)}{k r_a \sinh(r_a e)} \quad [16.34]$$

et en face arrière ($x = e$) :

$$\tilde{\theta}(x = e, p) = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{k r_a \sinh(r_a e)} \quad [16.35]$$

On peut aussi déduire une relation simple entre la température en face avant et la température en face arrière aux temps courts ou aux hautes fréquences (p grand), telle que :

$$\tilde{\theta}(x = e, p) = \tilde{\theta}(x = 0, p) \cdot \exp(-r_a e) \quad [16.36]$$

Outre l'avantage de donner des relations explicites dans l'espace de Laplace, les expressions [16.34] à [16.36] peuvent être modifiées pour aborder des problèmes avec pertes latérales ou multidimensionnels. En fait, cette approche analytique permet d'aborder le cas de milieux très épais (milieu semi-infini, voir paragraphe 16.4.4.2) ou très minces (voir paragraphe 16.4.4.3) grâce à des développements asymptotiques. Elle peut aussi décrire des phénomènes de transfert transitoires périodiques en remplaçant la transformation de Laplace par une transformation de Fourier sur la variable t . Enfin, elle permet de décrire très simplement le transfert dans des milieux multicouches par de simples produits de matrices (voir [BAT 94, MAI 00]).

Ces expressions ainsi que les développements asymptotiques constituent aussi la base de méthodes d'estimation de la diffusivité liées à une instrumentation visant à se placer dans des conditions de transfert 1D (voir [HAY 04] pour une revue de ces méthodes).

16.4.4.1. Cas multidimensionnels

Les problèmes de non-uniformité spatiale du flux incident (en $x = 0$) peuvent se rencontrer, par exemple, dans le cas d'excitation par laser. En considérant un problème 2 ou 3D transitoire, éventuellement en supposant que l'échantillon n'est pas isotrope, l'équation générale s'écrit en coordonnées cartésiennes dans les axes principaux d'anisotropie :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{k_y}{k_x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{k_z}{k_x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a_x} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad [16.37]$$

où k_x, k_y, k_z sont les conductivités thermiques dans les directions principales x, y, z et où $a_x = k_x / \rho C$ est la diffusivité thermique relative à la direction x .

Un cas simple est de considérer que l'échantillon est adiabatique sur les faces latérales (en $y = 0$ et $y = L$ et en $z = 0$ et en $z = l$), soit :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=L} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=l} = 0 \quad [16.38]$$

Une transformation intégrale de Fourier sur les variables d'espace y et z ainsi qu'une transformation de Laplace sur la variable temps permet alors d'obtenir un formalisme similaire au cas 1D précédent. La transformation de Fourier-Laplace adaptée à ce problème est la suivante :

$$\theta(x, \alpha_n, \beta_m, p) = \int_0^L \int_0^l \int_0^\infty \theta(x, y, z, t) \cos(\alpha_n y) \cos(\beta_m z) \exp(-pt) dx dy dt \quad [16.39]$$

où les pulsations α_n et β_m sont définies par $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ et $\beta_m = \frac{m\pi}{l}$.

L'équation générale dans l'espace transformé, dans le cas où $\theta(x, y, z, t = 0) = 0$ devient alors :

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}}{dx^2} - \frac{k_y}{k_x} \alpha_n^2 \tilde{\theta} - \frac{k_z}{k_x} \beta_m^2 \tilde{\theta} = \frac{p}{a_x} \tilde{\theta} \quad [16.40]$$

La méthode exposée précédemment dans des cas 1D peut être étendue avec le même formalisme en posant cette fois $r_a^2 = \frac{p}{a_x} + \frac{k_y}{k_x} \alpha_n^2 + \frac{k_z}{k_x} \beta_m^2$.

L'estimation simultanée des paramètres : a_x , k_y/k_x et k_z/k_x peut être alors effectuée en considérant des combinaisons de signaux correspondant à des moyennes spatiales d'images thermiques relatives aux pulsations spatiales nulles ($\alpha_n = 0$, $\beta_n = 0$). Ces expressions permettent de modéliser de nombreuses situations expérimentales liées à la thermographie infrarouge et ont été utilisées pour estimer simultanément les termes du tenseur de diffusivité thermique [PHI 95, KRA 04].

16.4.4.2. Milieu semi-infini

Les cas 3D transitoires en milieux semi-infinis se déduisent simplement des expressions précédentes. En face avant (en $x = 0$), une excitation ponctuelle (en $y = z = 0$) et impulsionnelle a pour transformée de Laplace-Fourier, une constante Q_0 (en J). Ce type d'excitation peut être obtenu par un tir laser impulsionnel, focalisé

en $y = z = 0$. La réponse de température donne en faisant tendre l'épaisseur e vers l'infini dans l'expression [16.34] modifiée au cas 3D (transformations de Laplace-Fourier) :

$$\tilde{\theta}(x, \alpha_n, \beta_m, p) = \frac{Q_0}{k_x r_a} \exp(-r_a x) \text{ et } \tilde{\theta}(x=0, \alpha_n, \beta_m, p) = \frac{Q_0}{k_x r_a} \quad [16.41]$$

Ce type d'expression est très important car il décrit le comportement de tout milieu épais aux temps courts après l'impulsion de chaleur et sur la surface en $x = 0$.

Considérons l'expression « inverse » du flux d'excitation en $x = 0$ en fonction de la température d'observation en $x = e$:

$$Q_0 = \tilde{\theta}(x = e, \alpha_n, \beta_m, p) k_x r_a \exp(+r_a e) \quad [16.42]$$

Cette expression est instable aux hautes fréquences temporelles et spatiales par son effet amplificateur exponentiel du bruit de mesure de température. Cet exemple permet d'étudier le caractère « mal posé » des problèmes consistant à estimer une source thermique à partir de l'analyse de mesures de température dans le voisinage de cette source (voir par exemple [BEC 77]).

On peut aussi analyser l'expression [16.41] dans l'espace temporel et en restant dans l'espace de Fourier spatial, en effectuant uniquement une transformée de Laplace inverse :

$$\tau(x, \alpha_n, \beta_m, t) = (Q_0 / \rho C) \left(e^{(-x^2 / (4a_x t)) / \sqrt{\pi a_x t}} \right) e^{(-a_y \alpha_n^2 t)} e^{(-a_z \beta_m^2 t)} \quad [16.43]$$

On peut alors considérer une approximation de la transformée inverse de Fourier de cette dernière expression dans le cas où l et L sont grands :

$$\theta(x, y, z, t) = (Q_0 / \rho C) \left(e^{(-x^2 / (4a_x t)) / \sqrt{\pi a_x t}} \right) \left(e^{(-y^2 / (4a_y t)) / \sqrt{\pi a_y t}} \right) \left(e^{(-z^2 / (4a_z t)) / \sqrt{\pi a_z t}} \right) \quad [16.44]$$

On constate alors que cette dernière expression est « séparable », c'est-à-dire pouvant se décomposer comme un produit de 3 fonctions dépendant des trois directions d'espace : x , y et z .

Cette expression [16.44] contient tous les aspects du transfert de chaleur diffusif tridimensionnel. Notons que si on somme le signal thermographique suivant y et z

(ou si l'on considère à la fois $\alpha_n = 0$ et $\beta_m = 0$ dans l'expression [16.43]) on traite alors un signal relatif à un transfert 1D dans le sens des x et le paramètre estimable est l'effusivité dans le sens x , $\sqrt{k_x \rho C}$:

$$\int_0^L \int_0^l \theta(x=0, y, z, t) dy dz = \frac{Q_0}{\sqrt{k_x \rho C} \sqrt{\pi t}} \quad [16.45]$$

Ce résultat est à la base de la méthode dite du « plan chaud » pour l'estimation de l'effusivité : $\sqrt{k_x \rho C}$. Cette méthode consiste à appliquer un chauffage uniforme par contact sur la face avant d'un échantillon et à analyser la réponse de température en régime transitoire (voir [GUS 91] et [FUD 05]). L'utilisation d'une caméra infrarouge permettant de moyenniser l'ensemble des pixels selon y et z autorise cette analyse à partir d'un point source ou d'une répartition spatiale quelconque, sur la surface en $x = 0$ et sans avoir à prendre en compte l'inertie des dispositifs de chauffage et de mesure de température par contact.

Si on excite le milieu par une ligne source selon y (au lieu d'un point source), ce qui revient à considérer la somme des pixels thermographiques selon y (ou $\alpha_n = 0$) dans le cas d'un point source, on obtient en $z = 0$, une expression de la forme :

$$\int_0^L \theta(x=0, y, z=0, t) dy = \frac{Q_0}{\sqrt{k_x \rho C} \sqrt{\pi t}} \frac{1}{\sqrt{a_z} \sqrt{\pi t}} = \frac{Q_0}{\sqrt{k_x k_z} \pi t} \quad [16.46]$$

L'étude de la réponse à une « ligne source » aussi nommée méthode du « fil chaud » a donné lieu à des développements expérimentaux utilisant des capteurs solides (mince fil de platine permettant à la fois le chauffage et la mesure de température, montages fil-thermocouple, etc., voir [CAR 59, FUD 05]). A l'inverse du plan chaud, cette méthode est sensible non pas à l'effusivité mais à la conductivité thermique ou à une moyenne harmonique de conductivité thermique dans le cas orthotrope : $\sqrt{k_x k_z}$.

L'avènement des caméras infrarouges a permis d'effectuer ce genre d'expérience avec un chauffage et une détection optique de très faible inertie par rapport à un capteur solide (thermocouple ou sonde résistive). On peut constater ici que la possibilité de moyenniser l'image thermographique dans uniquement une direction d'espace permet de traiter ce type de signal de température avec une excitation de type « point source ».

16.4.4.3. *Plaque mince*

Si le milieu étudié est au contraire d'épaisseur très petite (e petit) alors l'expression [16.34] peut se ramener à un cas 2D qui justifie la transformée de Laplace-Fourier de l'approximation [16.16] présentée au paragraphe 16.3.1. :

$$\tilde{\theta}(x=0, \alpha_n, \beta_m, p) = \frac{Q_0}{e(\rho C p + k_y \alpha_n^2 + k_z \beta_m^2)} \quad [16.47]$$

Ces expressions analytiques peuvent être étudiées sous de nombreuses formes et constituent des pistes pour l'estimation de la diffusivité thermique ou de termes sources. L'utilisation de ces solutions peut être souvent faite directement dans l'espace transformé [DEG 96, BAT 01].

16.4.4.4. *Transformation de Laplace inverse – Algorithme de Stehfest*

Des algorithmes d'inversion numérique de Laplace peuvent aussi permettre d'inverser les expressions précédentes. Dans le cas d'excitations flash, l'algorithme de Stehfest explicité, parmi d'autres algorithmes, dans [MAI 00], est bien adapté et simple à mettre en œuvre puisqu'il se résume à effectuer une somme pondérée telle que :

$$f(t) = \frac{\text{Ln}(2)}{t} \sum_{j=0}^{j=N} V_j F\left(\frac{j \text{Ln}(2)}{t}\right) \quad [16.48]$$

où $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$. En pratique, un algorithme à $N = 10$ termes est bien adapté aux calculs en simple précision avec des coefficients V_j suivants : $V_1 = 1/12$, $V_2 = -385/12$, $V_3 = 1279$, $V_4 = -46871/3$, $V_5 = 505465/6$, $V_6 = -473915/2$, $V_7 = 1127735/3$, $V_8 = -1020215/3$, $V_9 = 328125/2$, $V_{10} = -65625/2$.

16.4.4.5. *Transformation de Fourier inverse*

Les transformations de Fourier font l'objet d'une abondante littérature (voir par exemple [PRE 07]). On se limite ici aux solutions classiques obtenues pour une transformation de Fourier en cosinus bien adaptée en thermique stationnaire à la considération de conditions aux limites adiabatiques en $y = 0$ et $y = L$ et en $z = 0$ et $z = L$:

$$\tilde{\theta}(\alpha_n) = \int_0^L \theta(y) \cos(\alpha_n y) dy \quad [16.49]$$

La transformation inverse est donnée par l'expression :

$$\theta(y) = \frac{1}{L}\bar{\theta}(0) + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\alpha_n y)\tilde{\theta}(\alpha_n), \text{ avec, } \alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad [16.50]$$

L'intégrale [16.44] appliquée à l'information discrète donnée par la caméra infrarouge est effectuée à l'aide d'approximations du type : méthode des trapèzes [PRE 07]. Dans la pratique, uniquement un nombre de pixels N fini offre une information de température répartie spatialement et permet donc d'accéder par une opération matricielle à un nombre fini N de températures transformées $\tilde{\theta}(\alpha_n)$. Une extension aux problèmes 2D est naturellement envisageable.

16.5. Conclusion

En conclusion, les domaines à aborder par la thermographie infrarouge représentent en fait un champ d'investigation considérable. Le comportement thermomécanique des matériaux sous chargement mécanique et thermique est encore trop souvent traité en identifiant la température du matériau à celle de consigne. Quand son rôle n'est pas réduit à celui de paramètre, la température est souvent qualifiée de variable de commande. Ces approximations cachent, c'est certain, des phénomènes importants qui ne peuvent être mis en évidence qu'en suivant une véritable approche thermomécanique du comportement des matériaux. Les progrès réalisés dans le domaine de l'imagerie thermographique permettent désormais d'avoir accès à des champs de mesure de température quantitativement fiables. Ces champs peuvent alors être utilisés pour atteindre localement certaines caractéristiques matérielles comme la diffusivité ou la conduction du matériau étudié. Dans un proche avenir, les distributions de constantes thermophysiques identifiées pourront être utilisées pour détecter les hétérogénéités matérielles qu'elles soient naturelles ou induites par les sollicitations mécaniques et thermiques. Une fois ces caractéristiques thermophysiques connues, les champs de températures peuvent ensuite être utilisés pour estimer les sources de chaleur accompagnant la déformation et qui traduisent l'irréversibilité des mécanismes de déformation et/ou les effets de couplage thermomécanique.

Les exemples évoqués ici se sont limités souvent aux transformations quasi-statiques à température ambiante constante. Bien qu'il reste encore beaucoup à faire dans ce domaine, il ne faudrait cependant pas croire que c'est là le seul domaine d'application de ces techniques infrarouges. De plus en plus, l'analyse thermographique permet d'aborder les problèmes de modélisation du comportement des matériaux à « haute » température et en « dynamique ». En effet, lors de traitements (trempe,

recuit, etc.) ou lors d'un processus de soudage (fusion, solidification), les phénomènes de couplage thermomécanique (changements de phase, cinétiques de précipitation) sont prépondérants. Le développement constant de caméras IR plus rapides permet déjà au mécanicien d'aborder le comportement des matériaux en dynamique où, là encore, les couplages jouent un grand rôle dans le mode de propagation des instabilités (bande de cisaillement adiabatique, cycle catalytique).

16.6. Bibliographie

- [BAT 94] BATSALE J.C., MAILLET D., DEGIOVANNI A., « Extension de la méthode des quadripôles thermiques à l'aide de transformations intégrales. Application au défaut plan bidimensionnel », *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37, vol. 1, p. 111-127, 1994.
- [BAT 01] BATSALE J.C., LE NILIOT C., « Estimation de paramètres par thermographie IR », *Métrologie Thermique et Techniques inverses*, vol. 1, chapitre 4, Presses Universitaires de Perpignan, Perpignan, p. 179-236, 2001.
- [BAT 04] BATSALE J.C., BATTAGLIA J.L., FUDYM O., « Autoregressive algorithms and spatially random flash excitation for 3D non destructive evaluation with infrared cameras », *Int. J. on Quantitative InfraRed Thermography (QIRT)*, vol. 1, p. 5-20, 2004.
- [BEC 77] BECK J.V., ARNOLD K.-J., *Parameters estimation in engineering and science*, Wiley, New York, 1977.
- [BER 08] BERTHEL B., CHRYSOCHOOS A., WATTRISSE B., GALTIER A., « Infrared image processing for the calorimetric analysis of fatigue phenomena », *Exp. Mechanics*, 48, vol. 1, p. 79-90, 2008.
- [BOU 04] BOULANGER T., CHRYSOCHOOS A., MABRU C., « Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels », *Int. J. of Fatigue*, 26-3, p. 221-229, 2004.
- [BRE 82] BRÉMOND P., Développement d'une instrumentation infrarouge pour l'étude des structures mécaniques, thèse de doctorat, Université de Marseille, 1982.
- [CAR 59] CARLSLAW H.S., JAEGER J.C., *Conduction of Heat in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [CHA 84] CHADWICK P., CREASY C.F.M., « Modified entropic elasticity of rubberlike materials », *J. Mech. Phys. Solids*, 32, p. 337-357, 1984.
- [CHR 95] CHRYSOCHOOS A., « Analyse du comportement thermomécanique des matériaux par thermographie infrarouge », *Actes du colloque Photomécanique 95*, Cachan, p. 203-211, 1995.

- [CHR 00] CHRYSOCHOOS A., LOUCHE H., « An infrared image processing to analyze the calorific effects accompanying strain localization », *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 38, p. 1759-1788, 2000.
- [CHR 09] CHRYSOCHOOS A., WATTRISSE B., MURACCIOLE J.-M., EL KAÏM Y., « Fields of stored energy associated with localized necking of steel », *J. of the Mechanics of Materials and Structures*, vol. 4-2, p. 245-262, 2009
- [CHR 10] CHRYSOCHOOS A., HUON V., JOURDAN F., MURACCIOLE J.-M., PEYROUX R., WATTRISSE B., « Use of Full-Field DIC & IRT Measurements for the Thermomechanical Analysis of Material Behaviour », *Strain*, vol. 46, p. 117-130, 2010.
- [COL 67] COLEMAN B., GURTIN M., « Thermodynamics with internal state variables », *The Journal of Chem. Phys.*, vol. 47, (2), p. 597-613, 1967.
- [DEG 96] DEGIOVANNI A., BATSALE J.C., MAILLET D., « Mesure de la diffusivité longitudinale de matériaux anisotropes – Panorama des techniques développées au LEMTA », *Rev. Gen. de Thermique*, vol. 35, p. 141-147, 1996.
- [DOU 09] DOUDARD C., CALLOCH S., « Influence of hardening type on self-heating of metallic materials under cyclic loadings at low amplitude », *Eur. J. of Mechanics*, vol. 28-2, p. 233-240, 2009.
- [FRE 07] FRÉMOND M., *Non-smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [GER 83] GERMAIN P., NGUYEN Q.S., SUQUET P., « Continuum Thermo-mechanics », *J. Appl. Mech.*, vol.50, (4B), p. 1010-1020, 1983.
- [FUD 02] FUDYM O., BATSALE J.C., LECONTE D., « A seminumerical approach for heat diffusion in heterogeneous media, One extension of the analytical quadrupole method », *Numerical Heat Transfer, Part. B*, 42, p. 325-348, 2002.
- [FUD 04] FUDYM O., LADEVIE B., BATSALE J.C., « Heat diffusion at the boundary of stratified media, Homogenized temperature field and thermal constriction », *Int J. Of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, p. 2437-2447, 2004.
- [FUD 05] FUDYM O., BATTAGLIA J.L., BATSALE J.C., « Measurement of thermophysical properties in semi-infinite media by random heating and fractional model identification », *Rev. of Sci. Instrum.*, 76, (2), p.1-10, 2005.
- [FUD 07] FUDYM O., BATSALE J.C., BATTAGLIA J.L., « Thermophysical properties mapping in semi-infinite longitudinally cracked plates by temperature image processing », *Inverse Problem In Engineering*, 15, vol. 2, p. 163-176, 2007.
- [GAU] GAUSSORGUES G., *La Thermographie Infrarouge – Principes, Technologie, Applications*, 4^e édition, Lavoisier, Paris, 1999.

- [GUS 91] GUSTAFSON S.E., « Transient plane source techniques for thermal conductivity and thermal diffusivity measurements of solid materials », *Rev. of Sci. Instrum.*, vol. 62, p. 797, 1991.
- [HAL 75] HALPHEN B., NGUYEN Q.S., « Sur les matériaux standards généralisés », *Journal de Mécanique*, vol. 14, (1), p. 39-63, 1975.
- [HAY 96] HAY B., FILZ J.R., BATSALE J.C., « Mesure de diffusivité thermique par méthode flash », *Techniques de l'ingénieur*, R 2 955, p.1-12, 2004.
- [HON 05] HONORAT V., MOREAU S., MURACCIOLE J.-M., WATTRISSE B., CHRYSOCHOOS A., « Calorimetric analysis of polymer behaviour using a pixel calibration of an IRFPA camera », *Int J. on Quantitative IR Thermography*, vol. 2, (2), p.153-172, 2005.
- [KRA 04] KRAPEZ J.C., SPAGNOLO L., FRIE B.M., MAIER H.P., NETTER F., « Measurement of in-plane diffusivity in non-homogeneous slabs by applying flash thermography », *Int. J. of Therm. Sci.*, 43, p. 967-977, 2004.
- [LEP 96] LÉPOUTRE F., LEFEBVRE J., LHERMITTE T., AINOUCHE L., DELPECH P., FORGE P., HIRCHI S., JOULAUD J.L., « Mesures thermiques microscopiques », *Rev. Gen., Therm.*, 413, (35), p 344-354, 1996.
- [MAI 00] MAILLET D., ANDRE S., BATSALE J.C., DEGIOVANNI A., MOYNE C., *Thermal quadrupoles- Solving the heat equation through integral transforms*, John Wiley & Sons, Chichester, 2000.
- [MUR 08] MURACCIOLE J.M., WATTRISSE B., CHRYSOCHOOS A., « Energy Balance of a Semicrystalline Polymer During Local Plastic Deformation », *Strain*, 44-6, p. 468-474, 2008.
- [PAJ 89] PAJANI D., *Mesure Par Thermographie Infrarouge*, Editeur ADD, EAN13 9782950417107, 1989.
- [PAP 97] PAPINI F., GALLET P., *Thermographie infrarouge – Image et mesure*, Masson, Paris, 1997.
- [PEY 98] PEYROUX R., CHRYSOCHOOS A., LICHT C., LÖBEL M., « Thermo-mechanical couplings and pseudoelasticity of shape memory alloys », *Int. J. Engng. Sci.*, 36, (4), p. 489-509, 1998.
- [PHI 95] PHILIPPI I., BATSALE J.C., MAILLET D., DEGIOVANNI A., « Measurement of thermal diffusivity trough processing of infrared images », *Rev. Sci. Instrum.*, 66, p. 182-192, 1995.
- [PIN 04] PINA V., RANC N., WAGNER D., HERVE P., SUTTER G., PHILIPPON S., « Etude des comportements statique et dynamique de matériaux métalliques par pyrométrie ultraviolet, visible ou infrarouge », *Photonique*, 16, p. 1-4, 2006.

- [PRE 07] PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., WETTERLING W.T., FLANNERY B.P., *Numerical recipes, The art of scientific computing*, 3^e édition, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [PRO 04] PRON H., BISSIEUX C., « 3D thermal modelling applied to stress-induced anisotropy of thermal conductivity », *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 43-12, p. 1161-1169, 2004.
- [RAN 08] RANC N., TARAVELLA L., PINA V., HERVÉ P., « Temperature field measurement in titanium alloy during high strain rate loading – adiabatic shear bands phenomenon », *Mechanics of Materials*, 40, (4-5), p. 255-270, 2008.
- [SAT 07] SATHON N., DULIEU-BARTON J.M., « Evaluation of sub-surface stresses using thermoelastic stress analysis », *Applied Mechanics and Materials*, 7-8, p. 153-158, 2007.
- [SUT 07] SUTTER G., RANC N., « Temperature fields in a chip during high-speed orthogonal cutting – An experimental investigation », *Int. J. of Machine Tools & Manufacture*, vol. 47, p. 1507-1517, 2007.
- [THO 53] THOMSON W., LORD KELVIN, « On the thermoelastic and thermo-magnetic properties of matter », *Trans. Roy. Soc. Edinb.*, vol. 20, (161), p. 57-77, 1853.