



HAL
open science

**Description des couches limites des écoulements
stationnaires interdisques en configuration rotor-stator /
Description of the boundary layers of steady flows
between coaxial disks in rotor-stator configuration**

Nathalie M.M. Cousin-Rittemard, Olivier Daube, Patrick Le Quéré

► **To cite this version:**

Nathalie M.M. Cousin-Rittemard, Olivier Daube, Patrick Le Quéré. Description des couches limites des écoulements stationnaires interdisques en configuration rotor-stator / Description of the boundary layers of steady flows between coaxial disks in rotor-stator configuration. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 1999, 327 (2-3), pp.215-220. 10.1016/j.crme.2012.09.003 . hal-00832785

HAL Id: hal-00832785

<https://hal.science/hal-00832785>

Submitted on 11 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Description des couches limites des écoulements stationnaires interdisques en configuration rotor–stator ¹

Nathalie COUSIN–RITTEMARD, Olivier DAUBE, Patrick LE QUÉRÉ

Laboratoire d’Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l’Ingénieur
BP 133, 91403 Orsay CEDEX, France.
E–mail : nathalie.rittemard@free.fr

Résumé.

On étudie les écoulements stationnaires par simulation numérique. Les états stationnaires sont calculés avec une méthode de Newton par adaptation d’un code temporel pseudo–spectral. On montre que le nombre de Reynolds basé sur la hauteur d’entrefer permet une bonne description de l’écoulement et pilote l’épaisseur des couches limites.

Mots clés : interdisques / solution stationnaire / couches limites

Description of the boundary layers of steady flows between coaxial disks in rotor–stator configuration

Abstract.

Steady axisymmetric flows in disk systems are investigated numerically. Steady states are calculated by adapting a time–stepping pseudo–spectral code to carry out Newton’s method. It is shown that the Reynolds number based on height H yields a good description of the flow and measures the thickness of the boundary layers.

Keywords : two disk systems / steady flows / boundary layers

Abridged English Version

Flows in rotating disks system are a very well known example of rotating flow. In the 1950’s, because it was assumed that the steady state for a given configuration was unique, a famous controversy arose between Batchelor and Stewartson concerning the nature of the steady self–similar solutions [1, 7]. This note describes a numerical investigation of the steady states between enclosed coaxial disks in the rotor–stator configuration (see fig. 1), giving a description of the boundary layers. The end–wall is assumed to be attached to the stator. This flow is characterized by the aspect ratio $a = \frac{R_2}{H}$, the Reynolds number $Re_H = \frac{\Omega_0 H^2}{\nu}$ and the rotation ratio $\gamma = \frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 0$. We use asterisks (e.g. x^*) to denote dimensional quantities ; quantities without asterisks (e.g. x) are nondimensional. The flow is described by the Navier–Stokes equations and assumed to be axisymmetric. The steady states are calculated by Newton’s method with a preconditioned Jacobian [6] by adapting

¹Note présentée par Henri Cabannes

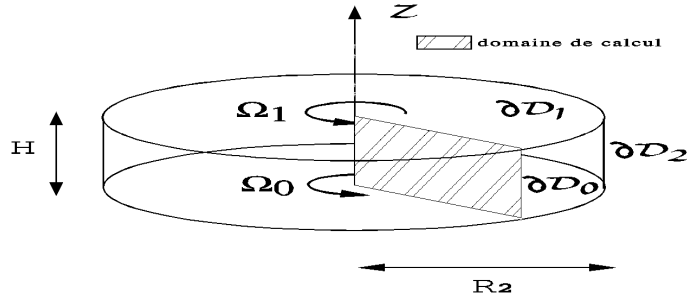


FIG. 1 – Cavité interdisques : le rotor est en bas et le stator est en haut ($\Omega_0 \neq 0, \Omega_1 = 0$).

FIG. 1 : Two disks cavity : the lower disk is the rotor and the upper disk is the stator ($\Omega_0 \neq 0, \Omega_1 = 0$).

a time-stepping pseudo-spectral code [3, 5, 8]. We note the meshes used : $m=N \times M$ with respectively N and M the number of modes used for the radial et axial directions.

A description of the evolution from rest to the final steady state is given in figure 2. A thin fluid layer is dragged by the rotor and spirals out to the vertical end-wall due to the action of centrifugal and Coriolis forces. Thus we can catch a glimpse of a flow of Stewartson type with one boundary layer on the rotor (see fig. 2 for $\Omega_0 t^* = 1/6$ revolution). Thus, a rotating fluid particle moves up the shroud and is swept inward toward the core, causing creation of the stator boundary layer (see fig. 2 for $\Omega_0 t^* = 1/6, 2/3, 10$ revolutions). The steady asymptotic state is of Batchelor type, with a boundary layer on each disk (see fig. 2 for $\Omega_0 t^* = 10$ revolutions). The stator boundary layer thickness is determined by the thickness of the recirculating layer at the vertical end-wall :

- For low Reynolds number, the flow is of non-separated boundary layer type (see fig. 3) ;
- For higher Reynolds number, the centrifugation velocity increases. The thickness of the recirculating layer at the vertical end-wall and that of the boundary layer on the stator decrease to an asymptotic value. The Batchelor solution is characterized by separated boundary layers with a solidly rotating core (see fig. 3).

The boundary layer thickness δ that we have calculated for the separated boundary layer regime justifies the choice of a Reynolds number based on the axial clearance $\delta \approx 1/\sqrt{Re_H}$ (see fig. 4). Moreover this Reynolds number gives a good description of the steady state as a function of the aspect ratio, i.e. the values of the velocity components and streamfunction and the location of the maximum of these are independent of the aspect ratio [3]. The thickness of the boundary layers - the smallest spatial scale - decreasing like $1/Re_H$ seems to explain the increasing stiffness of the solution and the necessary spatial resolution for the bracketting of the critical Reynolds number of the first bifurcation as the curvature effects increases [3, 4].

Introduction.

Les écoulements interdisques sont caractéristiques des écoulements de fluide en rotation. Au début des années 50, l'unicité supposée des états stationnaires a donné lieu à l'une des plus célèbres controverses de la mécanique des fluides qui opposa Batchelor et Stewartson à propos de la structuration attendue des écoulements auto-semblables entre deux disques de rayon infini pour lesquels les équations de Navier–Stokes se réduisent à un système d'équations différentielles ordinaires [1, 7]. Dans le présent papier, on se propose d'étudier la structuration des états stationnaires pour une cavité interdisques réaliste d'extension géométrique finie (voir fig. 1) en donnant une description des couches limites sur les disques. Cette étude est le premier pas nécessaire à la compréhension de la nature inattendue de la première bifurcation pour ce type d'écoulement [3, 4]. On considère une configuration rotor-stator fermée par un bandeau périphérique attaché au stator. Ce type de condition au limite présente une singularité sur la composante tangentielle de la vitesse v à la jonction de l'enveloppe ($v = 0$) et du rotor ($v = r$). Nous avons opéré une régularisation sinusoidale sur une distance fixe 0.05 sur le rotor, en vérifiant que cette régularisation n'entraînait pas de changement notable pour la solution en dehors du voisinage immédiat de la régularisation [3]. L'écoulement est caractérisé par cinq grandeurs physiques : $(R_2, H, \Omega_0, \Omega_1, \nu)$, qui se réduisent à trois paramètres de similitude : le nombre de Reynolds $Re_H = \frac{\Omega_0 H^2}{\nu}$, le rapport de forme $a = \frac{R_2}{H}$ et le rapport des taux de rotation $\gamma = \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$ qui est fixé à zéro dans notre étude. On notera les variables adimensionnelles avec une lettre simple (i.e. x) et les variables dimensionnelles correspondantes avec la même lettre étoilée (i.e. x^*).

L'écoulement dans la cavité est supposé gouverné par les équations de Navier-Stokes axisymétriques écrites en coordonnées cylindriques dans le repère inertiel. La recherche des solutions stationnaires peut être envisagée soit comme solution asymptotique en temps des équations instationnaires, soit par la résolution directe par une méthode de Newton des équations stationnaires ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). En raison de la durée des régimes transitoires (de l'ordre d'une trentaine de tours) nous avons adopté la démarche proposée par Mamun et Tuckerman [6]. Cet algorithme permet d'atteindre les solutions stationnaires par l'adaptation d'un code temporel [3, 5, 8] par une méthode de Newton avec préconditionnement du Jacobien. L'algorithme numérique utilisé pour le code temporel est basé sur une méthode pseudo-spectrale de collocation Chebyshev pour l'intégration des opérateurs aux dérivées partielles spatiales. L'intégration temporelle est obtenue par un schéma aux différences finies semi-implicite d'ordre deux [2], stable et de bonne précision (Adams-Bashforth et Euler retardé d'ordre deux). L'incompressibilité est traitée par la technique d'Uzawa. On notera le nombre de modes du maillage utilisé : $m=N \times M$, avec respectivement N et M les nombres de modes dans les directions radiale et axiale.

Résultats.

La description physique d'une séquence temporelle du régime transitoire vers un état stationnaire en partant du repos permet d'appréhender plus aisément sa structuration (voir fig. 2). Dans un premier temps, une mince couche de fluide est entraînée en rotation par le rotor ($\Omega_0 t^* = 1/6$ tour). Une particule fluide de cette couche limite est alors expulsée

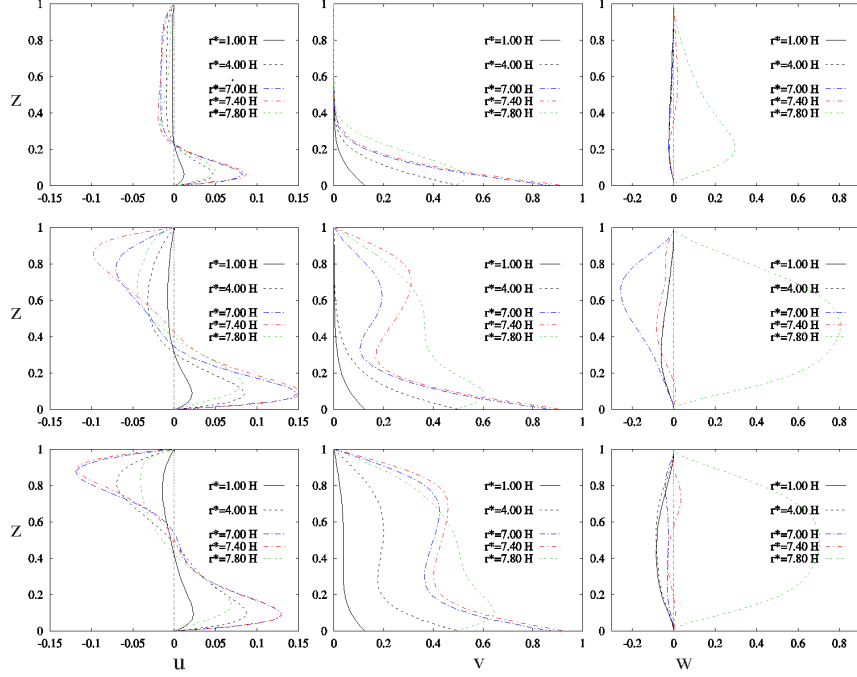


FIG. 2 – Régime transitoire vers la solution stationnaire ($a = 8$, $Re_H = 100$, $m=82 \times 32$) : instantanés des profils verticaux de vitesse radiale, tangentielle et axiale (u, v, w) aux temps $\Omega_0 t^* = 1/6, 2/3, 10$ tours (de haut en bas), et aux positions radiales dimensionnelles $r^* \in [1H, 7.80H]$. Le stator est en $z=1$ et le rotor en $z=0$.

FIG. 2 : Evolution to steady starting from rest : profiles of radial tangential and axial velocity profiles (u, v, w) are plotted at times : $\Omega_0 t^* = 1/6, 2/3, 10$ revolutions (from top to bottom), and at various dimensional radial positions in the range : $r^* \in [1H, 7.80H]$ ($a=8$, $Re_H=100$, $m=82 \times 32$) The stator is the upper disk ($z=1$) and the rotor is the lower disk ($z=0$).

en spiralant vers le bandeau périphérique, sous l'action conjuguée de la force centrifuge et de la force de Coriolis. Donc, de façon très fugace, un écoulement de type Stewartson - une seule couche limite sur le rotor - s'installe dans la cavité ($\Omega_0 t^* = 1/6, 2/3, 10$ tours) Puis la particule fluide, centrifugée dans la couche limite du rotor, remonte en spiralant le long de l'enveloppe et est chassée vers le cœur de la cavité, forçant ainsi l'installation d'une couche limite sur le stator qui pénètre rapidement jusqu'à l'axe de rotation. Cette zone de recirculation de l'écoulement du rotor vers le stator est caractérisée par l'inversion de la composante axiale de la vitesse ($r^* \in [7.40H, 7.80H]$). La solution asymptotique en temps est donc de type Batchelor avec une couche limite sur chaque disque, et l'épaisseur de la couche limite du stator est assujettie à l'épaisseur de la zone de recirculation sur l'enveloppe. Pour des valeurs du nombre de Reynolds faible un écoulement de type couches limites non-séparées s'installe dans la cavité (voir fig. 3). Pour des valeurs du nombre de Reynolds plus élevées, la vitesse de centrifugation des particules fluides augmente et l'épaisseur de la zone de recirculation et de la couche limite du stator diminue. La solution

de type Batchelor est alors à couches limites séparées (voir fig. 3) avec un cœur en rotation.

Il n'est pas dans notre propos de cerner précisément la limite du nombre de Reynolds du régime de couches limites séparées. En revanche, la détermination de l'épaisseur δ des couches limites sur les disques en régime séparé justifie *a posteriori* le choix du nombre de Reynolds basé sur la hauteur : $\delta \approx 1/\sqrt{Re_H}$ (voir fig. 4). D'autre part, le nombre de Reynolds basé sur la hauteur permet d'atteindre une bonne description de l'écoulement stationnaire en fonction du rapport de forme. Les positions et les valeurs des composantes de la vitesse et de la fonction de courant sont indépendantes du rapport de forme [3]. L'épaisseur des couches limites - la plus petite échelle spatiale - décroissant en $1/Re_H$ semble expliquer que la raideur de la solution et la résolution spatiale nécessaire à l'encadrement du nombre de Reynolds critique de la première bifurcation croissent dramatiquement au fur et à mesure que les effets de courbure deviennent importants [3, 4].

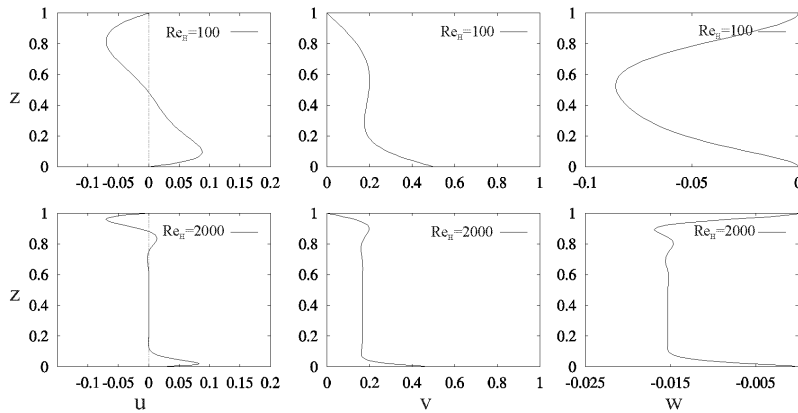


FIG. 3 – Deux régimes d'écoulements : on trace de gauche à droite les profils verticaux de vitesse radiale, tangentielle et axiale à mi-cavité ($a=8$, $m=162 \times 62$). Pour $Re_H=100$, l'écoulement est de type couches limites non-séparées et pour $Re_H=2000$, l'écoulement est en régime de couches limites séparées avec un cœur en rotation.

FIG. 3 : Two types of flows : from left to right, the radial, tangential and axial velocity profiles are plotted at mid-cavity ($a=8$, $m=162 \times 62$). At $Re_H=100$, boundary layers are non-separated (upper figure). At $Re_H=2000$, boundary layers are separated by a rotating core (lower figure).

Références

- [1] **Batchelor G.K., 1951**, Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow, *Quart. Jour. Mech. and Applied Math.* **4**, 29–41.
- [2] **Canuto C., Hussaini M.Y., Quateroni A., Zang T.A., 1988**, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer Verlag, New York.
- [3] **Cousin-Rittemard N., 1996**, Contribution à l'étude des instabilités des écoulements axisymétriques en cavité interdisques de type rotor-stator, *Thèse de doctorat, Université de Paris VI*.
- [4] **Cousin-Rittemard N., daube O., Le Quéré P., 1998**, Sur la nature de la première bifurcation des écoulements interdisques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Series II*, ,(acceptée 19 janvier 1998)
- [5] **Le Quéré P., 1987**, Etude de la transition à l'instationnaire des écoulements de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée par méthodes spectrales Chebyshev, *Thèse, Université de Poitiers*.

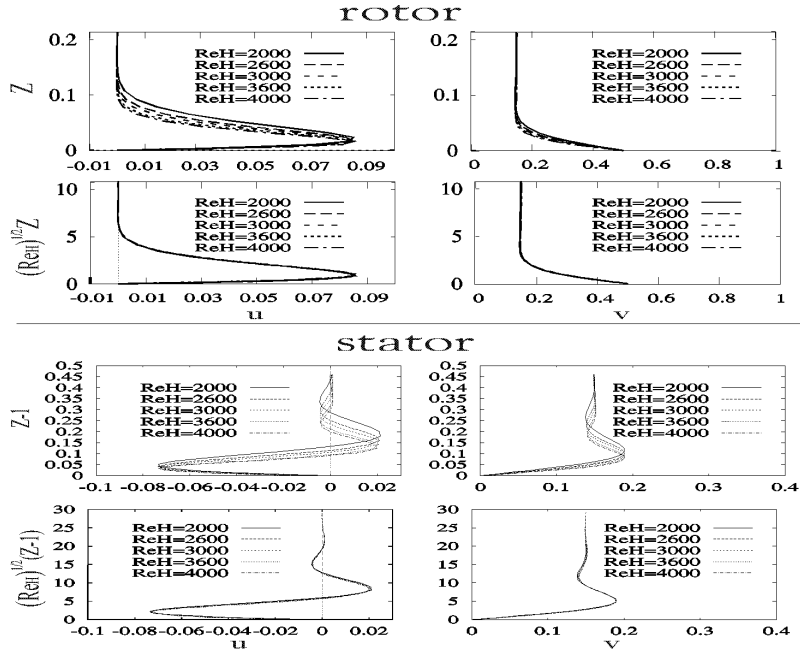


FIG. 4 – Epaisseur de couche limite sur le rotor et le stator : on trace la superposition des profils de vitesse radiale et tangentielle à mi-cavité pour $Re_H = 2000, 2600, 3000, 3600, 4000$ et pour un rapport de forme $a = 2$.

FIG. 4 : Boundary layer thickness on rotor and stator : superposition of radial (left) and tangential velocity (right) profiles are plotted at mid-cavity for $Re_H = 2000, 2600, 3000, 3600, 4000$ and $a = 2$.

- [6] Mamun C.K., Tuckerman L.S., 1995, Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow, *Phys. Fluids* **7**, 80-91.
- [7] Stewartson K., 1953, On the flow between two rotating coaxial disks, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49**, 333-341.
- [8] Xin S., 1993, Simulations numériques de convection naturelle turbulente, *Thèse, Université de Paris VI*.