



**HAL**  
open science

**Structuration de la solution stationnaire des écoulements interdisques en configuration rotor-stator /  
Structure of steady flows between coaxial disks in rotor-stator configuration**

Nathalie M.M. Cousin-Rittemard, Olivier Daube, Patrick Le Quéré

► **To cite this version:**

Nathalie M.M. Cousin-Rittemard, Olivier Daube, Patrick Le Quéré. Structuration de la solution stationnaire des écoulements interdisques en configuration rotor-stator / Structure of steady flows between coaxial disks in rotor-stator configuration. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 1999, 327 (2-3), pp.221-226. 10.1016/S1287-4620(99)80059-3 . hal-00832766

**HAL Id: hal-00832766**

**<https://hal.science/hal-00832766>**

Submitted on 11 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

C.R.Acad. Sci. Paris, t. 327, série II b, p221-226, 1999

## Structuration de la solution stationnaire des écoulements interdusques en configuration rotor–stator<sup>1</sup>

Nathalie COUSIN–RITTEMARD, Olivier DAUBE, Patrick LE QUÉRÉ

Laboratoire d’Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l’Ingénieur  
BP 133, 91403 Orsay CEDEX, France.

E–mail : nathalie.rittemard@free.fr

---

### Résumé.

On étudie les écoulements stationnaires par simulation numérique. Les états stationnaires sont calculés avec une méthode de Newton par adaptation d’un code temporel pseudo–spectral. On met en évidence la zone de validité de la solution de similitude près de l’axe, la zone de recirculation près de l’enveloppe et entre les deux, une région de pseudo–similitude où les profils de vitesse sont homothétiques.

**Mots clés :** interdusques / solution stationnaire / solution de similitude

### Structure of steady flows between coaxial disks in rotor–stator configuration

### Abstract.

Steady axisymmetric flows in disk systems are investigated numerically. Steady states are calculated by adapting a time–stepping pseudo–spectral code to carry out Newton’s method. A self–similar solution is shown to exist surrounding the axis, with a recirculating zone near the end–wall. Between these two zones is a pseudo–similar region where velocity profiles are homothetic.

**Keywords :** two disk systems / steady flows / self–similar flows

---

### Abridged English Version

Disk system flows are a very well known example of rotating flow. The first studies concerned self–similar solutions of the flow between two infinite disks [1, 7]. This note describes a numerical investigation of the steady states between enclosed coaxial disks in the rotor–stator configuration (see fig. 1). The end–wall is assumed to be attached to the stator. This flow is characterized by the aspect ratio  $a = \frac{R_2}{H}$ , the Reynolds number  $Re_H = \frac{\Omega_0 H^2}{\nu}$  and the rotation ratio  $\gamma = \frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 0$ . We use asterisks (e.g.  $x^*$ ) to denote dimensional quantities ; quantities without asterisks (e.g.  $x$ ) are nondimensional. The flow is described by the Navier–Stokes equations and assumed to be axisymmetric. The steady states are calculated by Newton’s method with a preconditioned Jacobian [6] by adapting

---

1. Note présentée par Henri Cabannes

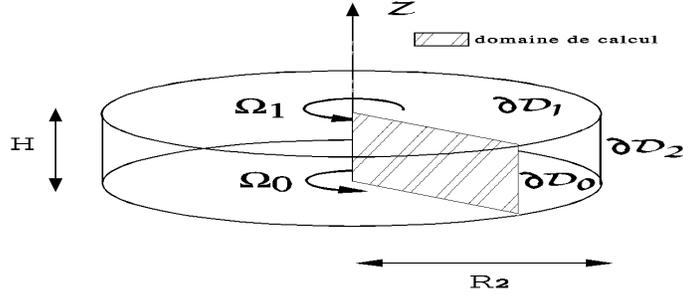


FIGURE 1 – Cavité interdisques : le rotor est en bas et le stator est en haut ( $\Omega_0 \neq 0, \Omega_1 = 0$ ).  
 FIG. 1 : Two disks cavity : the lower disk is the rotor and the upper disk is the stator ( $\Omega_0 \neq 0, \Omega_1 = 0$ ).

a time-stepping pseudo-spectral code [3, 5, 8]. We note the meshes used :  $m=N \times M$  with respectively  $N$  and  $M$  the number of modes used for the radial et axial directions.

The streamfunction of the steady flow as a function of aspect ratio for a given Reynolds number is shown in fig. 2. This flow is characterized by two zones :

- the *absolute* recirculating zone near the vertical end-wall, with a fixed width ( $\approx 0.40H$ ), independent of aspect ratio ;
- the *relative* zone, whose width is proportional to the aspect ratio. The solution is unchanged except by an expansion proportional to the aspect ratio.

Nevertheless and contrary to what had previously been thought, the solution is not self-similar ( $u = r f'(z), v = r g(z)$ , and  $w = -2f(z)$ ) over most of the relative zone. The limits over which the solution deviates from self-similarity by less than 1% have been calculated numerically for aspect ratios in the range [3, 10], e.g. in fig. 3 for  $a = 8$ . The solution is shown to be self-similar for  $r^* \leq 1H$ . For  $r^* \geq 1H$ , the velocity profiles collapse (to a tolerance of 2%) according to a law which is a function of the aspect ratio :  $r^* = ax^* + H$  for  $r^* \in [H, (a - 1)H]$  (see fig. 4).

Thus, the self-similar zone is a small portion of the relative zone (see fig 5). This is important in comparing self-similar and shrouded disk system solutions. Moreover the existence of a pseudo-similar solution which is a function of the aspect ratio is shown. Steep radial and axial gradients observed in the recirculating zone (width  $\approx 0.40H$ ) and the thickness related to the Reynolds number ( $\delta \approx 1/\sqrt{Re_H}$ ) imply that greater spatial resolution would be needed for a unsteady numerical simulation [3, 4].

---

## Introduction.

Les écoulements interdisques constituent un exemple caractéristique d'écoulement de fluide tournant au voisinage de parois. Historiquement, les premières études ont porté sur des situations d'écoulements auto-semblables entre deux disques de rayon infini pour lesquels les équations de Navier-Stokes se réduisent à un système d'équations différentielles

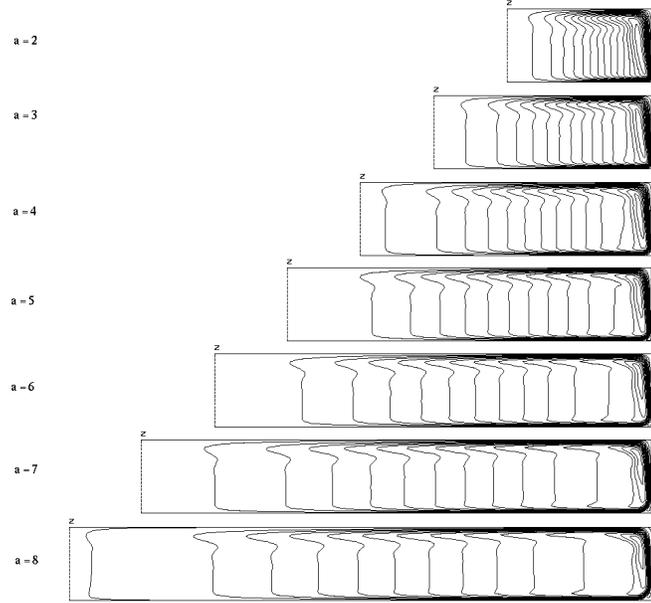


FIGURE 2 – Isovaleurs de la fonction de courant pour les différents rapports de forme indiqués à gauche des figures et pour un nombre de Reynolds fixé ( $a \in [2, 8]$ ,  $Re_H = 2000$ ). Ces isovaleurs varient de 0 aux bords à  $-6.67 \times 10^{-3}$  par incrément constant. L’axe de rotation est la limite gauche des coupes. ( $m=122 \times 62$  pour  $a \in [2, 6]$ ,  $m=152 \times 62$  pour  $a=7$  et  $m=162 \times 62$  pour  $a=8$ )

FIG. 2 : Isovalues of stream function for various aspect ratios indicated on the left of figures ( $a \in [2, 8]$ ). The Reynolds number is  $Re_H = 2000$ . These isovales vary from 0 at boundary to  $-6.6710^{-3}$  with constant spacing. The axis is the left boundary of the figures. ( $m=122 \times 62$  for  $a \in [2, 6]$ ,  $m=152 \times 62$  for  $a=7$  and  $m=162 \times 62$  for  $a=8$ )

ordinaires [1, 7]. Dans cette note, on se propose d’étudier la structuration des états stationnaires pour une cavité interdisques réaliste d’extension géométrique finie (voir fig. 1). Cette étude est le premier pas nécessaire à la compréhension de la nature inattendue de la première bifurcation pour ce type d’écoulement [3, 4]. On considère une configuration rotor-stator fermée par un bandeau périphérique attaché au stator. Ce type de condition au limite présente une singularité sur la composante tangentielle de la vitesse  $v$  à la jonction de l’enveloppe ( $v = 0$ ) et du rotor ( $v = r$ ). Nous avons opéré une régularisation sinusoïdale sur une distance fixe 0.05 sur le rotor, en vérifiant que cette régularisation n’entraînait pas de changement notable pour la solution en dehors du voisinage immédiat de la régularisation [3]. L’écoulement est caractérisé par cinq grandeurs physiques :  $(R_2, H, \Omega_0, \Omega_1, \nu)$ , qui se réduisent à trois paramètres de similitude : le nombre de Reynolds  $Re_H = \frac{\Omega_0 H^2}{\nu}$ , le rapport de forme  $a = \frac{R_2}{H}$  et le rapport des taux de rotation  $\gamma = \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$  qui est fixé à zéro dans notre étude. On notera les variables adimensionnelles avec une lettre simple (i.e.  $x$ ) et les variables dimensionnelles correspondantes avec la même lettre étoilée (i.e.  $x^*$ ).

L’écoulement dans la cavité est supposé gouverné par les équations de Navier-Stokes

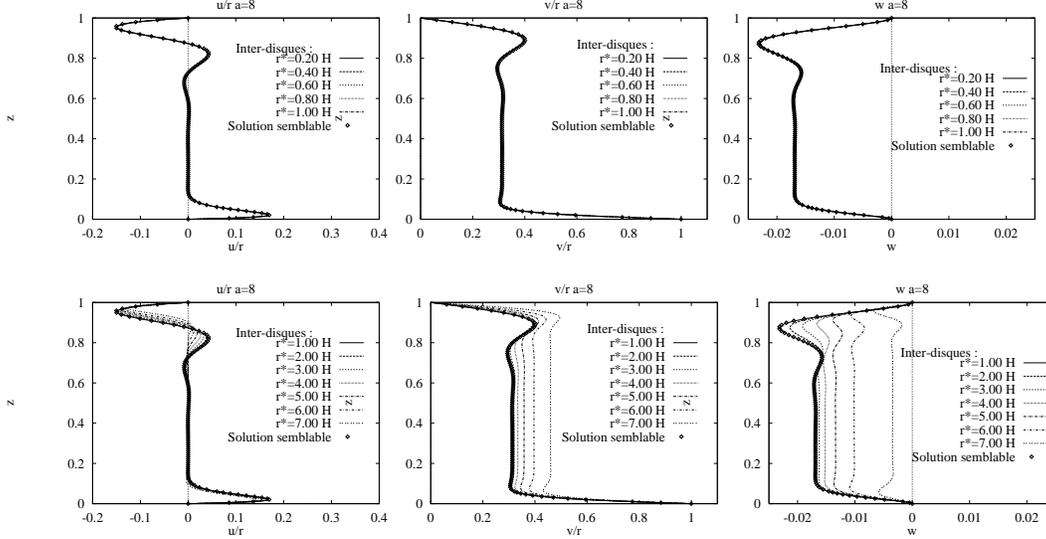


FIGURE 3 – Zone de similitude : on trace la superposition des profils  $u/r, u/r, w$  (de gauche à droite) pour  $r^* \in [H, 8H]$  ( $a=8$ ,  $Re_H=2000$ ,  $m=162 \times 62$ ). La figure du haut correspond à la zone de validité de la solution de similitude pour  $r^* \leq 1H$ . Pour des positions radiales au-delà de  $1H$ , la solution de similitude ne représente plus la solution stationnaire interdisques (voir figure du bas).  
 FIG. 3 : Self-similar zone : from left to right, the superposition of  $u/r, u/r, w$  profiles are plotted for  $r^* \in [H, 8H]$  ( $a=8$ ,  $Re_H=2000$ ,  $m=162 \times 62$ ). The upper figure shows the self-similar zone for  $r^* \leq 1H$ . The self-similar solution is no longer valid for radial dimensional positions greater than  $1H$  (see lower figure).

axisymétriques écrites en coordonnées cylindriques dans le repère inertiel. La recherche des solutions stationnaires peut être envisagée soit comme solution asymptotique en temps des équations instationnaires, soit par la résolution directe par une méthode de Newton des équations stationnaires ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ). En raison de la durée des régimes transitoires (de l'ordre d'une trentaine de tours) nous avons adopté la démarche proposée par Mamun et Tuckerman [6]. Cet algorithme permet d'atteindre les solutions stationnaires par l'adaptation d'un code temporel [3, 5, 8] par une méthode de Newton avec préconditionnement du Jacobien. L'algorithme numérique utilisé pour le code temporel est basé sur une méthode pseudo-spectrale de collocation Chebyshev pour l'intégration des opérateurs aux dérivées partielles spatiales. L'intégration temporelle est obtenue par un schéma aux différences finies semi-implicite d'ordre deux, stable et de bonne précision : Adams-Bashforth et Euler retardé d'ordre deux [2]. L'incompressibilité est traitée par la technique d'Uzawa. On notera la finesse du maillage utilisé :  $m=N \times M$ , avec respectivement  $N$  et  $M$  les nombres de modes dans les directions radiale et axiale.

## Résultats.

Une vue globale de l'écoulement est donnée par le tracé des isovaleurs de la fonction

de courant à nombre de Reynolds fixé et pour différents rapports de forme (voir fig. 2).

La structuration de l'état stationnaire est caractérisée par deux zones :

- une zone *absolue* de recirculation du fluide près de l'enveloppe, de largeur fixée ( $\approx 0.40H$ ) et indépendante du rapport de forme ;
- une zone *relative* dont la largeur proportionnelle au rapport de forme. Dans cette zone, la solution est inchangée sinon par une "dilatation" proportionnelle au rapport de forme (voir fig. 2).

Cependant et contrairement à ce qui est usuellement admis, la solution de similitude telle que  $u = rf'(z), v = rg(z)$  et  $w = -2f(z)$  n'est pas valable sur une grande partie de la zone relative. Un premier examen du taux de rotation  $v/r$  du cœur nous a montré que l'approximation à 0.313 n'était pas appropriée. La quantification précise de la zone de validité de la solution de similitude a été engagée sur la base de la superposition des profils  $u/r, v/r$  et  $w$  en différentes positions radiales dimensionnelles et pour des rapports de forme de 3 à 10 (voir par exemple fig. 3 pour  $a = 8$ ). On observe que la zone de validité de la solution de similitude est située près de l'axe de rotation pour des positions radiales inférieures à l'épaisseur interdisques  $r^* \leq 1H$ , pour un critère d'écart à la solution de similitude fixé à 1 %. Pour des positions radiales au-delà de  $H$ , l'expérimentation numérique nous suggère qu'il existe une zone de pseudo-similitude où les profils de vitesse selon une loi d'homothétie en fonction du rapport de forme :  $r^* = ax^* + H$  pour  $r^* \in [H, (a - 1)H]$  pour une tolérance sur la superposition des profils fixée à 2 % (voir fig. 4 et fig. 5).

En conclusion, la zone de similitude ne constitue qu'une petite portion de la zone relative (voir fig. 5). Ceci met profondément en cause la pertinence d'une comparaison entre les solutions de similitude et la solution de l'écoulement inter-disques d'extension finie. De plus cette étude a révélé l'existence d'une zone de pseudo-similitude pour laquelle les profils de vitesse  $u/r, v/r, w$  se superposent selon une loi homothétique en fonction du rapport de forme.

## Références

- [1] **Batchelor G.K.**, 1951, Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow, *Quart. Jour. Mech. and Applied Math.* **4**, 29-41.
- [2] **Canuto C., Hussaini M.Y., Quateroni A., Zang T.A.**, 1988, Spectral Methods in Fluid Dynamics, *Springer Verlag, New York*.
- [3] **Cousin-Rittemard N.**, 1996, Contribution à l'étude des instabilités des écoulements axisymétriques en cavité interdisques de type rotor-stator, *Thèse de doctorat, Université de Paris VI*.
- [4] **Cousin-Rittemard N., daube O., Le Quéré P.**, 1998, Sur la nature de la première bifurcation des écoulements interdisques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Series II*, ,(acceptée 19 janvier 1998)
- [5] **Le Quéré P.**, 1987, Etude de la transition à l'instationnaire des écoulements de convection naturelle en cavité différenciellement chauffée par méthodes spectrales Chebyshev, *Thèse, Université de Poitiers*.
- [6] **Mamun C.K., Tuckerman L.S.**, 1995, Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow, *Phys. Fluids* **7**, 80-91.
- [7] **Stewartson K.**, 1953, On the flow between two rotating coaxial disks, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49**, 333-341.
- [8] **Xin S.**, 1993, Simulations numériques de convection naturelle turbulente, *Thèse, Université de Paris VI*.

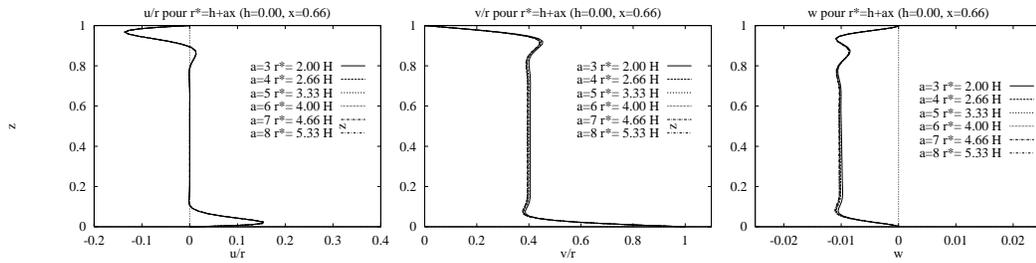


FIGURE 4 – Zone de pseudo-similitude : zone de superposition des profils de vitesse selon une loi homothétique en fonction du rapport de forme ( $r^* = ax + H$ ). La figure représente de gauche à droite la superposition des profils  $u/r, u/r, w$  pour  $x = 0.33$  pour les rapports de forme  $a = 3, 4, 5, 6, 7, 8$  pour un nombre de Reynolds fixé  $Re_H = 2000$ .

FIG. 4 : Pseudo self-similar zone : the figure shows that the velocity profiles collapse according to the same law function of aspect ratio : ( $r^* = ax + h$  with  $h = H$ ). Example is given for  $x = 0.33$ , aspect ratios  $a = 3, 4, 5, 6, 7, 8$  and a fixed Reynolds number  $Re_H = 2000$ .

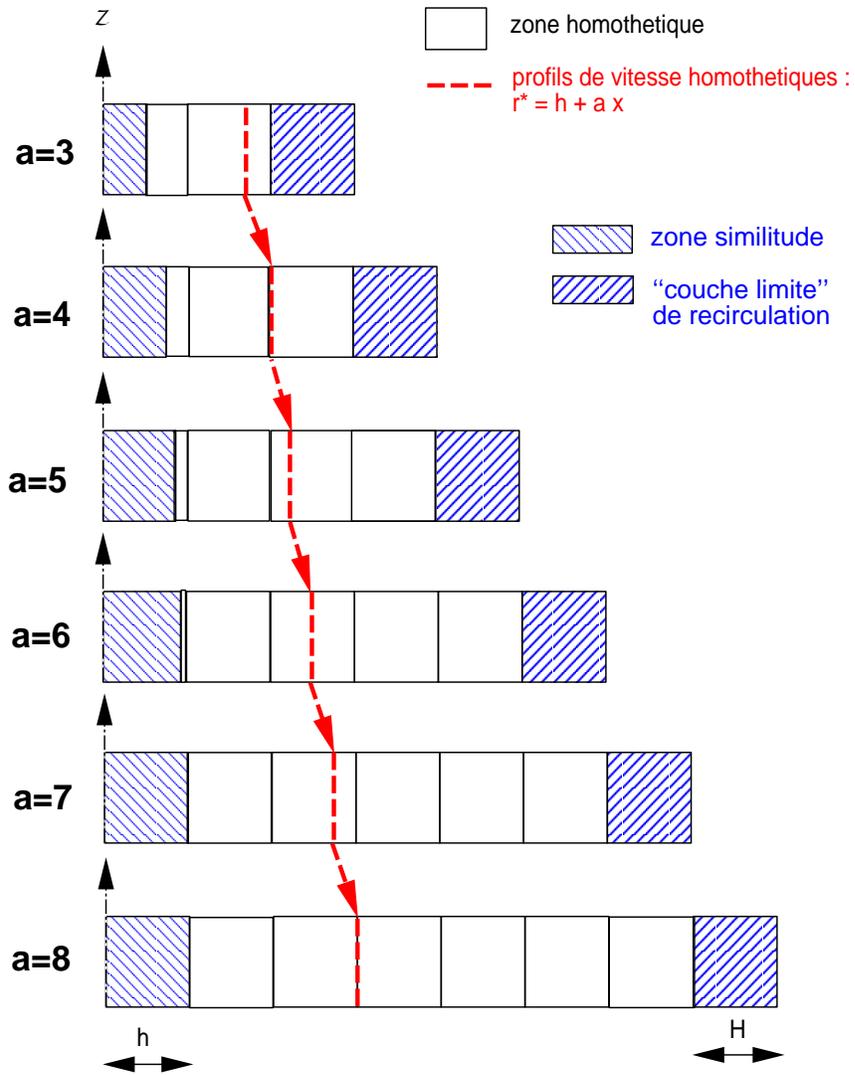


FIGURE 5 – Structuration de l'écoulement stationnaire interdisques.  
 FIG. 5 : Structure of the steady state.