



HAL
open science

Sur la nature de la première bifurcation des écoulements interdisques / On the nature of the first bifurcation in disk systems

Nathalie M.M. Cousin-Ritemard, Olivier Daube, Patrick Le Quéré

► To cite this version:

Nathalie M.M. Cousin-Ritemard, Olivier Daube, Patrick Le Quéré. Sur la nature de la première bifurcation des écoulements interdisques / On the nature of the first bifurcation in disk systems. C.R.Acad. Sci. Paris, 1998, 326 (6), pp.359-366. 10.1016/S1251-8069(98)80413-2 . hal-00832753

HAL Id: hal-00832753

<https://hal.science/hal-00832753>

Submitted on 11 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la nature de la première bifurcation des écoulements interdisques¹

Nathalie COUSIN-RITTEMARD, Olivier DAUBE, Patrick LE QUÉRÉ

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur
BP 133, 91403 Orsay CEDEX, France.
E-mail : nathalie.rittemard@wanadoo.fr

Résumé.

On étudie l'apparition de l'instationnarité par simulation numérique directe. On observe une transition directe de l'état stationnaire vers un état chaotique pour un écart relatif au seuil du Reynolds critique de l'ordre d'un pour cent. La nature convectivement instable de l'instabilité de la couche limite du stator semble expliquer ce comportement. Un manque de résolution spatiale peut produire le niveau de bruit suffisant pour déclencher l'instabilité préssentie convective du stator. L'étude d'une cavité torique met en évidence la responsabilité des effets de courbure sur la raideur de la solution. Néanmoins, la bifurcation de Hopf responsable de la transition vers des solutions périodiques a été isolée indépendamment de la grille.

Mots clés : bifurcation / interdisques / instabilité convective / effets de courbure

On the nature of the first bifurcation in disk systems

Abstract.

The transition to unsteadiness is studied by direct numerical simulation. A direct transition from steady to chaotic behavior is observed for a Reynolds number one per cent above threshold. The convective instability of the stator boundary layer seems to be related to the direct transition to chaos. Low spatial resolution can trigger the radial convective instability of the boundary layer. It is shown that the curvature induces sharp gradients which require high spatial resolution. Nevertheless, the Hopf bifurcation responsible for the transition to periodic solutions has been located independently of mesh refinement.

Keywords : bifurcation / two disk systems / convective instability / curvature

Abridged English Version

Flows between rotating disks systems have long drawn much attention because of both technical and theoretical interest. Early studies have been dedicated to self-similar flows on single and between two infinite coaxial rotating disks [16, 2, 1]. These flows constitute an outstanding example of an analytical solution of the Navier-Stokes equations, originally used for the study of inflexional instability in three-dimensional boundary layers [7]. The purpose of this note is to report a numerical investigation of the transition to unsteadiness of the axisymmetric flow in a realistic shrouded disk system of finite radial extension (see fig. 1). Axisymmetric modes have been experimentally observed in transient Bödewadt flows in 1983 [14]. More recently, they have been observed in shrouded disks systems [13, 9].

¹Note présentée par Henri Cabannes

We have investigated cavities of radial aspect ratio \mathbf{a} between 3 and 10. In such finite geometry cavities, the spectrum of the time evolution operator should be separated and successive bifurcations should thus be expected. Figure 4 shows the stability diagram obtained for a spatial resolution of $m = 150 \times 30$. This corresponds to an unexpected direct transition from steady to chaotic solution for a Reynolds number in some cases less than 1% above threshold. Increasing the spatial resolution to much larger values $m = 200 \times 60$ did not change qualitatively this result. We suggest that the concepts of local absolute instability and local convective instability of the stator boundary layer can explain such a result (see fig. 5). We suspect that local convective instability [11] is reached before global mode onset and that the transition to unsteadiness is maintained by a source of numerical noise which is due to the spatial stiffness of the solution.

The spatial stiffness is due to the curvature effects. This is shown by considering a toroidal cavity of fixed aspect ratio $\mathbf{a} = \frac{R_2 - R_1}{H} = 5$ (see fig. 1), and varying the radius ratio between a Cartesian cavity ($\delta = \frac{R_1}{R_2} = 1$) and disk systems ($\delta = 0$). The Navier–Stokes equations are solved with a time–stepping pseudo–spectral code [4, 10, 18]. The spatial resolution is set equal to $m = 100 \times 40$ (see fig. 6). For $0.5 \leq \delta < 1$, a classical transition from a steady solution to a periodic solution is observed. A direct transition to quasi–periodic flows is found for values in the range $0.3 \leq \delta \leq 0.4$, and to chaotic flows when $0 < \delta \leq 0.2$. The corresponding stability diagram is shown in figure 6, which shows that the critical Reynolds number Re_H increases with increasing curvature effects. We have shown that the thickness of the boundary layers, along the disks and the shroud, i.e. the smallest spatial scales, decreases like $1/Re_H$ [4]. This explains the increasing stiffness of the solution as $\delta \rightarrow 0$. We believe that the necessary spatial resolution increases dramatically as $\delta \rightarrow 0$ and it is probably out of reach with the present methodology and computational means in cavities of moderate radial aspect ratio extending to the rotation axis. We have overcome this difficulty by considering a shorter cavity of aspect ratio 2, in which the Hopf bifurcation responsible for periodic solutions has been located independently of mesh refinement (see fig. 7 et 8).

Introduction.

Les écoulements dans les cavités en rotation sont un exemple particulier d’écoulements engendrés par une rotation différentielle fluide/paroi. L’étude de ces écoulements a fait l’objet d’un nombre considérable de travaux depuis le début de ce siècle tant pour leur importance pratique (géophysique, turbo-machines) que pour la richesse de leur dynamique et les questions fondamentales qu’ils ont soulevées. Les premières études ont été consacrées à des situations académiques d’écoulements stationnaires auto-semblables sur un disque puis entre deux disques de rayon infini [16, 2, 1]. Ces écoulements constituent un exemple remarquable de solutions analytiques ou semi-analytiques des équations de Navier-Stokes. A ce titre, ils ont été utilisés pour l’étude théorique de l’instabilité inflexionnelle caractéristique des couches limites tridimensionnelles [7]. Il est bien connu que dans ce cas des écoulements sur ou entre deux disques en rotation, cette instabilité apparait sous la forme de spirales stationnaires par rapport à la paroi.

Notre propos est d’étudier par simulation numérique directe les instabilités dans des cavités interdisques réalistes d’extension géométrique finie, en configuration rotor-stator, fermées par une enveloppe attachée au stator (voir fig. 1). L’écoulement dépend de cinq grandeurs physiques caractéristiques : $(R_2, H, \Omega_0, \Omega_1, \nu)$ qui se réduisent à trois paramètres de similitude : le nombre de Reynolds $Re_H = \frac{\Omega_0 H^2}{\nu}$, le rapport de forme $\mathbf{a} = \frac{R_2}{H}$, le rapport des taux de rotation $\gamma = \frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 0$.

Afin de procéder par étape, on suppose que l’écoulement est axisymétrique. Ceci signifie que l’on étudie les instabilités de type cercles concentriques qui apparaissent aux faibles vitesses de rotation

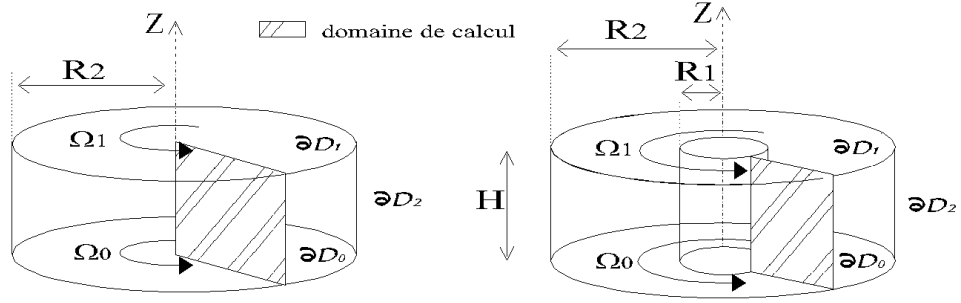


FIG. 1 – Cavité interdisques et cavité torique : le rotor est en bas et le stator est en haut ($\Omega_0 \neq 0$, $\Omega_1 = 0$).
 FIG. 1 : Disk and toroidal cavity : the lower disk is the rotor and the upper disk is the stator ($\Omega_0 \neq 0$, $\Omega_1 = 0$).

et qui ont été peu étudiées expérimentalement à ce jour. Elles avaient été mises en évidence en 1983 dans le régime transitoire d'un écoulement de Bödewadt [14] et plus récemment, elles ont été isolées en régime permanent pour l'écoulement interdisques en configuration rotor-stator [13, 9].

Dans le présent papier on décrit la nature a priori inattendue de la première transition stationnaire/instationnaire pour des rapports de forme de 3 à 10. L'influence des effets de courbure sur la nature et le seuil de cette transition est étudiée en considérant une cavité interdisques torique (voir fig. 1) de rapport de forme fixé et dont on fait varier la position relative par rapport à l'axe de rotation. Dans ce cas, le problème est caractérisé par six grandeurs physiques (R_1 , R_2 , H , Ω_0 , Ω_1 , ν), qui se réduisent à quatre paramètres de similitude : le nombre de Reynolds $Re_H = \frac{\Omega_0 H^2}{\nu}$, le rapport de forme $a = \frac{R_2 - R_1}{H}$, le rapport des taux de rotation $\gamma = \frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 0$ et le rapport du rayon intérieur et du rayon extérieur $\delta = \frac{R_1}{R_2}$. Ce dernier paramètre mesure l'influence des effets de courbure. Notons que pour la cavité torique la vitesse tangentielle est supposée varier linéairement entre le rotor et le stator sur l'enveloppe extérieure et sur l'enveloppe intérieure. Ce type de condition aux limites n'a pas de réalité physique mais a été choisi car il ne présente pas de singularité mathématique qui pourrait être à l'origine de difficultés d'approximation numérique dans les simulations.

Les écoulements pour les deux types de cavités sont supposés gouvernés par les équations de Navier-Stokes en formulation vitesse–pression écrites en coordonnées cylindriques dans le repère inertiel. La coexistence de zones laminares et transitionnelles au sein même de l'écoulement est une des difficultés de cette étude (voir fig. 2 et 3). Nous avons donc opté pour une simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes instationnaires qui permet de ne pas faire trop d'hypothèses a priori sur la nature de l'écoulement. L'algorithme numérique utilisé est basé sur une méthode pseudo-spectrale de collocation Chebyshev pour l'intégration des opérateurs aux dérivées partielles spatiales. L'intégration temporelle est obtenue par un schéma aux différences finies semi-implicite d'ordre deux [3], stable et de bonne précision (Euler retardé d'ordre deux pour les termes visqueux et Adams-Bashforth pour les termes convectifs). L'incompressibilité est traitée par la technique d'Uzawa. Notons que cette méthodologie a déjà été éprouvée par ailleurs pour étudier la stabilité des écoulements de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée [10, 18].

Résultats.

La configuration considérée étant de géométrie bornée et l'écoulement étant un proche parent de l'écoulement en cavité différentiellement chauffée [10, 18] on s'attendait à ce que le spectre de l'opérateur d'évolution temporelle soit discret et que donc la route vers le chaos se fasse au travers d'une série de bifurcations bien identifiées. On devait donc pouvoir isoler un encadrement de la

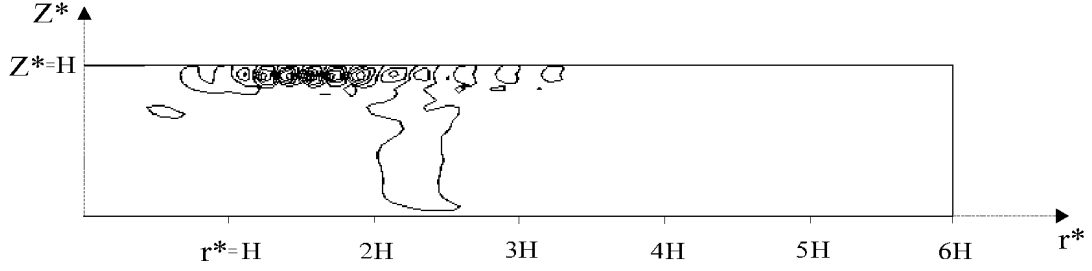


FIG. 2 – Instantané des isovalues des fluctuations de la vitesse tangentielle dans l'intervalle $[-6.10^{-3}, 6.10^{-3}]$ au temps dimensionnel $\Omega_0 t^* = 55$ tours ($a = 6$, $Re_H = 2000$ et $m=122 \times 32$). La perte de stabilité de la solution stationnaire se caractérise par l'apparition de structures dans la couche limite du stator (en haut) qui naissent environ en $r^* = 5H$. Elles sont convectées vers l'axe de rotation et amplifiées jusqu'à atteindre leur maximum au tiers de la cavité puis sont amorties au voisinage de l'axe.

FIG. 2 : Equally spaced contours of tangential velocity fluctuations in the range $[-6.10^{-3}, 6.10^{-3}]$ at time $t^* = 55/\Omega_0$ are plotted ($a = 6$, $Re_H = 2000$ and $m=122 \times 32$). The onset of instability is characterized by the appearance of structures in the boundary layer of the stator near the shroud at $r^* \approx 5H$. These structures are amplified while being advected towards the axis of rotation, attaining a maximum amplitude at $r^* \approx R_2/3$, and are then damped near the axis.

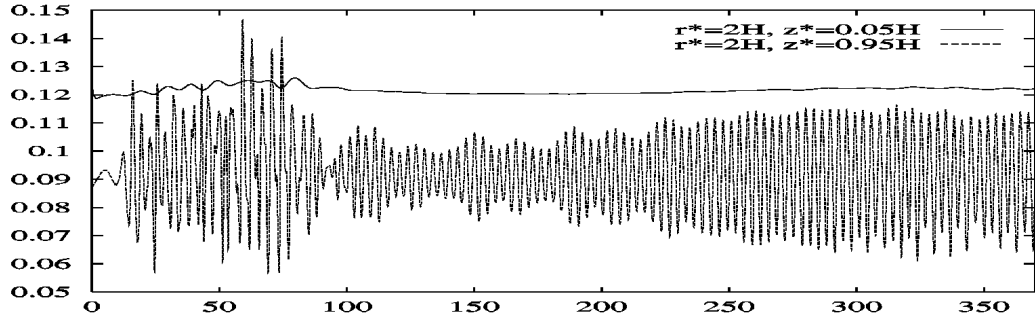


FIG. 3 – Evolution temporelle de la vitesse tangentielle sur le rotor ($z^* = 0.05H$, trait continu) et sur le stator ($z^* = 0.95H$, trait pointillé) dans le cas de la figure 2 en $r^* = 2H$. FIG. 3 : Tangential velocity as a function of time in the boundary layers of the rotor ($z^* = 0.05H$, solid curve) and of the stator ($z^* = 0.95H$, dashed curve), both for $r^* = 2H$ (corresponding to figure 2).

valeur critique du nombre de Reynolds Re_c de la première transition caractérisée par l'apparition de fluctuations mono-périodiques de faible amplitude au seuil. Rappelons que dans ce cas l'amplitude des fluctuations varie comme $\epsilon = \sqrt{Re - Re_c}$ et que le temps caractéristique des transitoires varie en $1 / \epsilon$. Nous avons encadré le seuil de la première transition stationnaire - instationnaire pour des cavités interdisques de rapport de forme de 3 à 10 (voir fig. 4). Les maillages utilisés comportaient typiquement 120 à 150 modes dans la direction radiale et 30 modes dans la direction axiale. Puis les maillages ont été raffinés jusqu'à 200 modes dans la direction radiale et 60 modes dans la direction axiale. Dans cette gamme de rapports de forme, nous n'avons pas pu isoler de solution mono-périodique au voisinage du seuil malgré des raffinements de maillage successifs et une réduction de

l'intervalle d'encadrement du Reynolds critique de l'ordre de un pour cent. La transition se faisait invariablement de façon directe de la solution stationnaire vers une solution quasi-périodique (voir fig. 4).

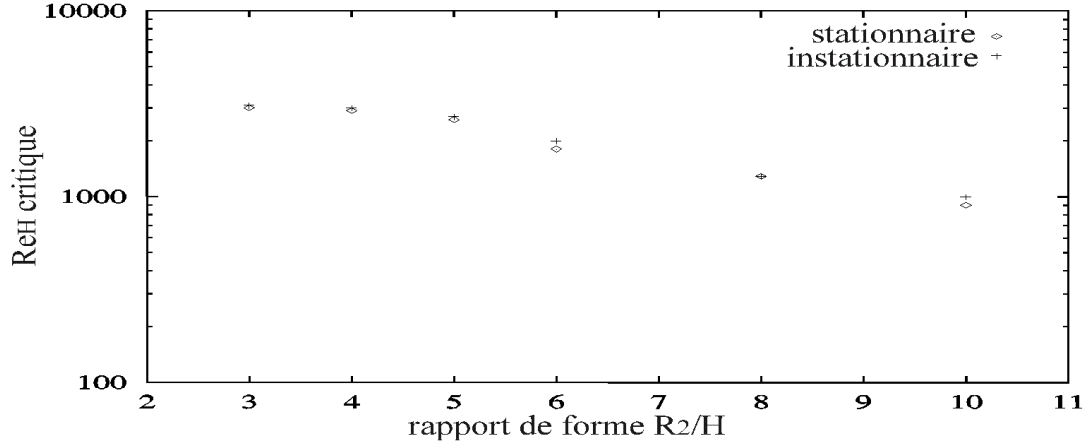


FIG. 4 – Diagramme de stabilité de la cavité interdisques : encadrement du Reynolds Re_H critique de la première transition en fonction de a pour $a = 3, 4, 5, 6, 8, 10$. FIG. 4 : Stability diagram for disk configuration. Bracketing of Re_c for the first transition for $a = 3, 4, 5, 6, 8, 10$.

Bien qu'a priori inattendus, nous pensons que ses résultats peuvent s'expliquer à la lumière des concepts d'instabilité locale absolue et locale convective introduits par les récents développement de la théorie de l'instabilité hydrodynamique [8]. Il est important de noter que bien que ces concepts aient été introduits pour les écoulements ouverts, ils peuvent être étendus à l'étude des écoulements en géométrie confinée dans la mesure où la longueur d'onde des structures observées est petite devant la dimension latérale de la boîte considérée (voir fig. 2) [5, 6, 8]. Ainsi, les paquets d'ondes générés par des défauts de surface ont déjà permis la mise en évidence expérimentale et numérique de la nature convectivement instable de la couche limite de Kármán sur un disque en rotation dans un fluide au repos [17, 12]. Nous pensons que la couche limite du stator devient localement convectivement instable (voir fig. 5) bien avant que l'écoulement dans la cavité - vu en tant que système dynamique - n'atteigne le seuil de la bifurcation de Hopf [11]. Toute source de bruit numérique (à déterminer) serait susceptible de déclencher et d'entretenir cette instabilité en deçà du seuil d'instabilité absolue. A cet égard, les différentes régularisations opérées sur la singularité de la vitesse tangentielle à la jonction de l'enveloppe attachée au stator et du rotor ont permis de montrer qu'elle n'était pas une source du bruit numérique suffisante pour déclencher la transition convective [4].

En parallèle à l'étude des solutions stationnaires, nous avons étudié l'influence des effets de courbure sur la nature de la première transition [4], en comparant les résultats de la cavité torique avec les résultats classiques de la cavité cartésienne différentiellement chauffée pour laquelle a été isolé un nombre de Reynolds critique de transition de la solution stationnaire vers une solution mono-périodique [10, 18]. Nous avons donc considéré une cavité torique de rapport de forme fixé égal à 5 pour un maillage fixé ($m=100 \times 40$). On a fait varier la position relative de cette cavité par rapport à l'axe de rotation (voir fig. 1) en explorant ainsi toutes les configurations intermédiaires entre une cavité cartésienne ($\delta = 1$) et la cavité interdisques ($\delta = 0$). Le diagramme de stabilité ainsi établi montre que lorsque la cavité est proche d'une configuration cartésienne ($0.5 \leq \delta < 1$), le scénario de transition à l'instationnaire est classique : solution stationnaire, puis mono-périodique,

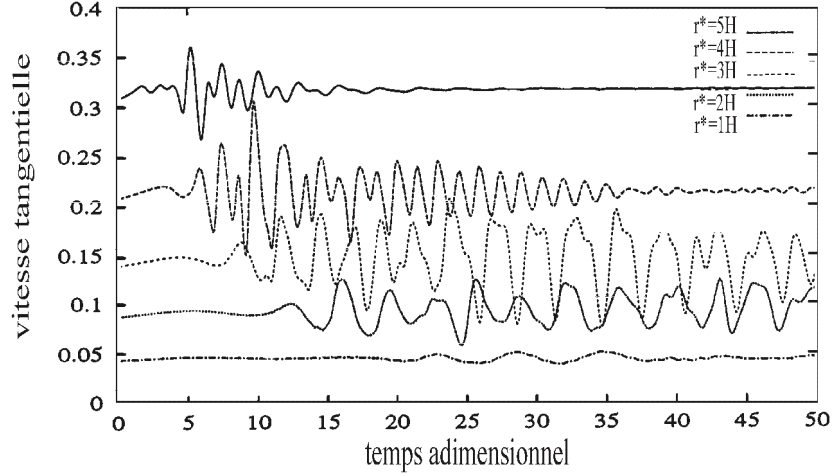


FIG. 5 – Evolution temporelle des fluctuations de la vitesse tangentielle le long de la couche limite du stator en $r^* = 5H, 4H, 3H, 2H, 1H$ ($\alpha = 6$). A l'instant $t = 0$, on impose un créneau de vitesse ($Re_H = 1800 \rightarrow 2000$). FIG. 5 : Evolution of tangential velocity in stator boundary layer at $r^* = 5H, 4H, 3H, 2H, 1H$ ($\alpha = 6$). At $t = 0$, a velocity perturbation is imposed $Re_H = 1800 \rightarrow 2000$.

etc (voir fig. 6) . Alors que lorsque l'on rapproche la cavité de l'axe de rotation ($0.3 \leq \delta \leq 0.4$) la transition se fait directement de la solution stationnaire à une solution quasi-périodique, voire chaotique quand on tend vers une configuration interdisques ($0 < \delta \leq 0.2$). Ces résultats viennent corroborer ce qui avait déjà été observé pour la cavité interdisques. Nous pensons que l'influence des effets de courbure s'interprète en terme de raideur croissante de la solution en fonction de l'importance des effets de courbure. En effet, la valeur du nombre de Reynolds critique augmentant au fur et à mesure que les effets de courbure deviennent importants, l'épaisseur des couches limites, variant en $1/\sqrt{Re_H}$, diminue [4]. Ainsi, le nombre de Reynolds basé sur la hauteur Re_H contrôle les plus petites échelles spatiales de l'écoulement. Donc, sauf à mettre en oeuvre des simulations numériques sur des maillages importants pour décrire des couches limites de plus en plus fines, il est fort probable que l'on ne puisse observer que la transition pressentie convective de la couche limite du stator. Ainsi nous avons pu mettre en évidence la bifurcation de Hopf de la solution stationnaire à une solution véritablement mono-périodique pour le cas favorable d'un rapport de forme égal à deux, en vérifiant l'indépendance de la solution instationnaire par rapport au maillage (voir fig. 7 et 8). En ce qui concerne les rapports de forme plus importants, on ne peut exclure ni la possibilité d'une transition brutale voire directe au chaos ni la présence du mode global. En revanche, nous sommes en mesure de conclure que les difficultés rencontrées dans la prédiction du seuil et de la nature de la première transition sont induites par la présence de couches limites fines et de la présence de gradients radiaux et axiaux très forts dans la zone de recirculation.

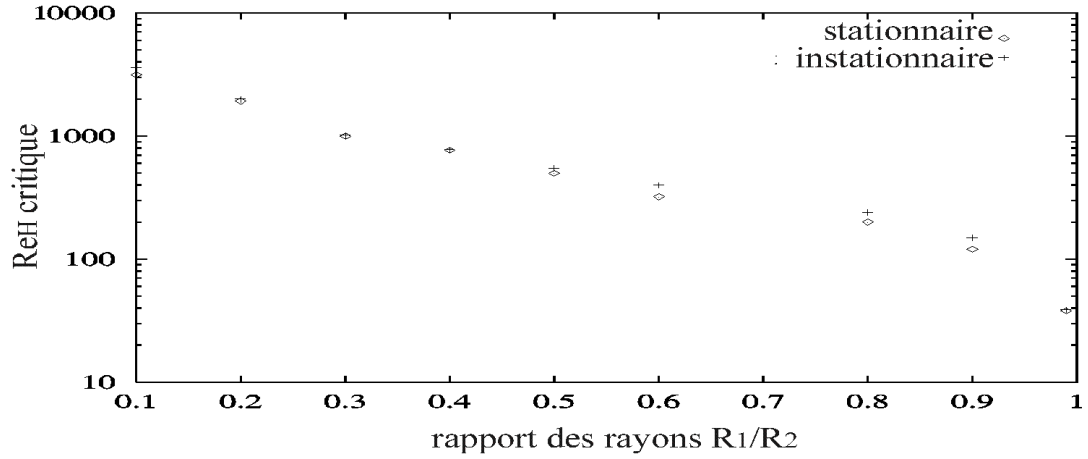


FIG. 6: Diagramme de stabilité de la cavité torique : encadrement du Reynolds Re_H critique de la première transition dans un cavité torique de rapport de forme $a = 5$ en fonction de δ . FIG. 6 : Stability diagram for toroidal cavity for $a = 5$. Bracketing of Re_c of first transition in toroidal cavity of aspect ratio $a = 5$ as a function of δ .

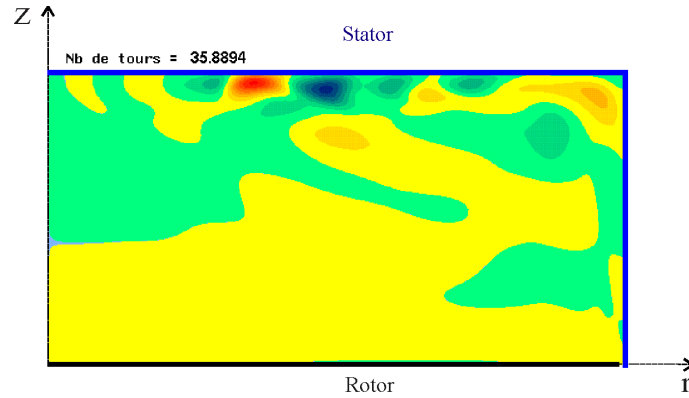


FIG. 7: Bifurcation de Hopf : Instantané du champs des fluctuations de vitesse tangentielle au temps dimensionnel $\Omega_0 t^* = 35.89$ tours. Le rapport de forme est $a = 2$, le nombre de Reynolds est $Re_H = 4000$ et le maillage 152×82 . La période fondamentale dimensionnelle est $\Omega_0 T^* = 1.1$ tours. FIG. 7 : Tangential velocity fluctuations at an instant during a limit cycle of period $T^* = 1.1/\Omega_0$ following the Hopf bifurcation. The aspect ratio is $a = 2$, the Reynolds number is $Re_H = 4000$, and the grid is 152×82 .

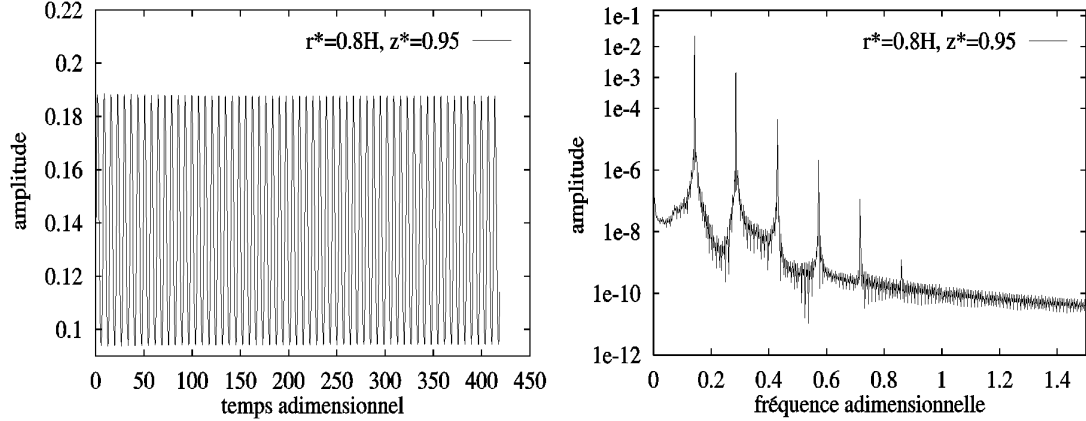


FIG. 8: Bifurcation de Hopf : Evolution temporelle de la vitesse tangentielle dans la couche limite du stator et spectre de Fourier associé au point $r^* = 0.8H$ et $z^* = 0.95H$ pour le cas étudié à la figure 7. La période fondamentale dimensionnelle est $\Omega_0 T^* = 1.1$ tours. FIG. 8 : Time dependence of tangential velocity during limit cycle following the Hopf bifurcation (at left) and associated Fourier spectrum (at right). Time series is taken in the boundary layer of the stator at $r^* = 0.8H$, $z^* = 0.95H$. Parameters as in figure 7. The Fundamental period is $\Omega_0 T^* = 1.1$.

Références

- [1] BATCHELOR G.K., 1951, Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow, *Quart. Jour. Mech. and Applied Math.* **4**, 29–41.
- [2] BODEWADT U.T., 1940, Die Drehströmung über festem grunde, *Z. angew. Math. Mech.* **20**, 241–253.
- [3] CANUTO C., HUSSAINI M.Y., QUATERONI A., ZANG T.A., 1988, Spectral Methods in Fluid Dynamics, *Springer Verlag, New York*.
- [4] COUSIN-RITTEMARD N., 1996, Contribution à l'étude des instabilités des écoulements axisymétriques en cavité interdisques de type rotor-stator, *Thèse de doctorat, Université de Paris VI*.
- [5] CROSS M.C., 1986, Travelling and standing waves in binary fluid convection in finite geometries, *Phy. Rev. Letters* **57**, 2935-2938.
- [6] CROSS M.C., 1988, Structure of non-linear travelling waves states in finite geometries, *Phy. Rev., A* **38**, 3592-3600.
- [7] GREGORY N., STUART J.T., WALKER W.S., 1955, On stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk, *Phil. Trans. A* **248**, 155.
- [8] HUERRE P., MONKEWITZ P.A., 1990, Local and global instabilities in spatially developing flows, *Ann. Rev. of Fluid Mechanics* **22**, 473-537.
- [9] LE GAL P.,SCHOUVEILER L., 1996, Mise en évidence expérimentale d'ondes circulaires en écoulement interdisques en configuration rotor-stator, *communication personnelle*.
- [10] LE QUÉRÉ P., 1987, Etude de la transition à l'instationnaire des écoulements de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée par méthodes spectrales Chebyshev, *Thèse, Université de Poitiers*.
- [11] LINGWOOD R.J., 1997, Absolute instability of Ekman layer and related rotating flows, *J. Fluid Mech.*, **331**,405-428,1997.
- [12] MACK L.M., 1985, The wave pattern produced by a source point on a rotating disk, *AAIA pap.* **85-0490**.
- [13] RABAUD M., GAUTHIER G., 1996, Mise en évidence expérimentale d'ondes circulaires en écoulement interdisques en configuration rotor-stator, *communication personnelle, 1996*.

- [14] SAVAS O., 1983, Circular waves on a stationary disk in rotating flow, *Phys. Fluids* **26**, 3345-3448.
- [15] STUART J.T., 1960 On the non-linear mechanisms of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, *J. Fluid Mech.* **9**, 353-370.
- [16] VON KARMAN T.H., 1921, Uber laminare und turbulente reibung, *Z. angew. Math. Mech.* **1**, 233-252.
- [17] WILKINSON S.P., MALIK M.R., 1985, Stability experiments in the flow over a rotating disk, *AIAA J.* **23**, 588-595.
- [18] XIN S., 1993, Simulations numériques de convection naturelle turbulente, *Thèse, Université de Paris VI*.

LIMSI-CNRS, BP 133, 91403 Orsay cedex.