



HAL
open science

Stratégie de modélisation de matériaux aléatoirement renforcés

Azdine Nait- Ali, Gérard Michaille, Stéphane Pagano

► **To cite this version:**

Azdine Nait- Ali, Gérard Michaille, Stéphane Pagano. Stratégie de modélisation de matériaux aléatoirement renforcés. CSMA2013, May 2013, Giens, France. 8 p., Clé USB. hal-00832391

HAL Id: hal-00832391

<https://hal.science/hal-00832391>

Submitted on 10 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stratégie de modélisation de matériaux aléatoirement renforcés.

Azdine NAÏT-ALI¹, Gérard MICHAILLE², Stéphane PAGANO¹

¹ LMGC, Université de Montpellier 2, {anaitali, stephane.pagano}@univ-montp2.fr

² MIPA et I3M, Université de Montpellier 2, micha@math.univ-montp2.fr

Résumé — Notre but est de proposer un modèle d'un géomatériau composite aléatoirement renforcé de type TexSolTM [1, 2] (un mélange sable-fil). La stratégie de modélisation consiste à découper un cube de TexSolTM en fines plaques, le problème initial est alors décomposé en n modèles plaque donnant une formulation 2D homogène et déterministe après passage à la limite par Γ -convergence (voir [3] pour la méthode). Nous reconstruisons alors une structure 3D homogène et déterministe par une intégration variationnelle. Nos différents résultats sont validés par une étude numérique.

Mots clés — Modélisation variationnelle, homogénéisation de matériaux composites, analyse numérique, analyse asymptotique, problème non-local.

1 Introduction

Afin de modéliser un matériau composite aléatoirement renforcé par des fibres, nous effectuons une étude asymptotique variationnelle. Pour des raisons évidentes d'optimisation de calcul de structure, nous souhaitons obtenir un modèle homogène et déterministe rendant compte du comportement mécanique de ce matériau. Pour cela, nous proposons une stratégie de modélisation illustrée par la Figure 1.

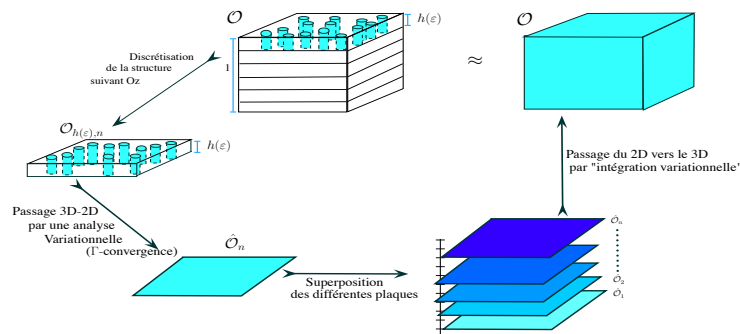


Fig. 1 – Stratégie de modélisation variationnelle.

En résumé, notre stratégie consiste à faire un découpage suivant x_3 de notre structure O en fines plaques d'épaisseur $h(\epsilon)$ dépendant d'un petit paramètre $\epsilon \ll 1$. Pour $h(\epsilon)$ assez petit, nous considérons les fibres verticales dans chaque plaque, c'est dans ce sens que nous privilégions donc une direction dans l'orientation du réseau de fil. La distribution du fil dans chaque plaque à la côte x_3 est régie par une probabilité variant avec x_3 . De notre problème initial nous obtenons n modèles de type plaque dont au préalable on souhaite pour chacun donner une formulation 2D déterministe. Puis on reconstruit un modèle 3D déterministe par intégration variationnelle.

2 Passage d'un modèle 3D à un modèle 2D.

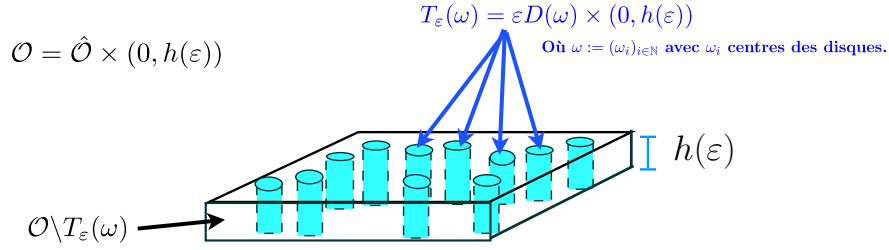


Fig. 2 – Plaque.

Dans cette première étape, on propose un modèle déterministe du matériau étudié. Nous supposons que l'épaisseur de la plaque est suffisamment petite afin de pouvoir considérer les fibres verticales. L'épaisseur de la structure ainsi que la rigidité des fibres dépendent d'un petit paramètre ε . On suppose donc que les fibres verticales sont parfaitement collées à la matrice hyper-élastique qui représente le sable. On suppose les fibres fixées sur \hat{O} . Le matériau est soumis à un chargement volumique, alors que les fibres sont soumises à une traction sur leur section supérieure. Le déplacement est donc un minimiseur du problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon, h(\varepsilon)})(\omega)$

$$\inf_{u \in W_{\varepsilon}^{1,p}(O_{h(\varepsilon)}, \mathbb{R}^3)} \left\{ \int_{O_{h(\varepsilon)} \setminus T_{\varepsilon}} f(\nabla u) dx + \frac{1}{\varepsilon^a} \int_{O_{h(\varepsilon)} \cap T_{\varepsilon}} g(\nabla u) dx - \int_{O_{h(\varepsilon)}} \mathcal{L}_{\varepsilon} \cdot u dx - \int_{(\hat{O} \times h(\varepsilon)) \cap T_{\varepsilon}} \ell_{\varepsilon} \cdot u d\hat{x} \right\}$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons un modèle 2D homogène déterministe équivalent. Nous montrons donc que l'énergie E_{ε} converge vers l'énergie suivante,

$$E_0(u) = \begin{cases} \int_{\hat{O}} f_0(u) d\hat{x} - \int_{\hat{O}} u \cdot \bar{L} d\hat{x} + G_0(\bar{v}) - \int_{\hat{O}} l \cdot \bar{v} d\hat{x} & \text{si } b = \gamma, \\ \int_{\hat{O}} f_0(u) d\hat{x} - \int_{\hat{O}} u \cdot \bar{L} d\hat{x} & \text{si } b < \gamma \text{ ou } l = 0. \end{cases}$$

où b est la puissance de ε relative à la traction des fibres, et par conséquent γ est la puissance de ε relative à la traction maximale que notre modèle peut admettre. Nous noterons par la suite le problème $(\mathcal{P}) := \min_{u \in L^p(O, \mathbb{R}^3)} E_0(u)$.

3 Reconstruction d'un modèle 3D par intégration variationnelle.

En appliquant le résultat précédent à chacune des plaques, on obtient ainsi une énergie discrète (suivant x_3), somme de n énergies 2-dimensionnelles homogènes et déterministes. Nous reconstruisons une structure 3D par une "intégration variationnelle". L'énergie limite, homogène et déterministe ainsi obtenue est proposée comme modèle. Bien évidemment, la connexion entre les plaques est garantie par la condition limite illustrée par la figure suivante.

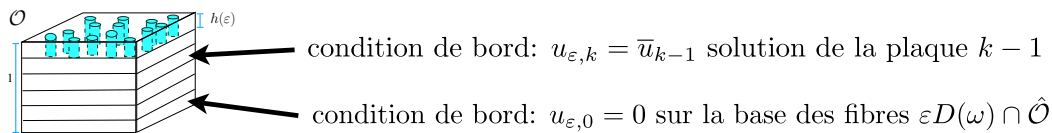


Fig. 3 – Découpage en fine plaques de notre structure totale.

4 Validation numérique.

Ces 2 étapes de notre modélisation sont alors validées par une étude numérique faite dans le cas scalaire avec le logiciel CAST3M.

4.1 Validation numérique du passage 3D-2D

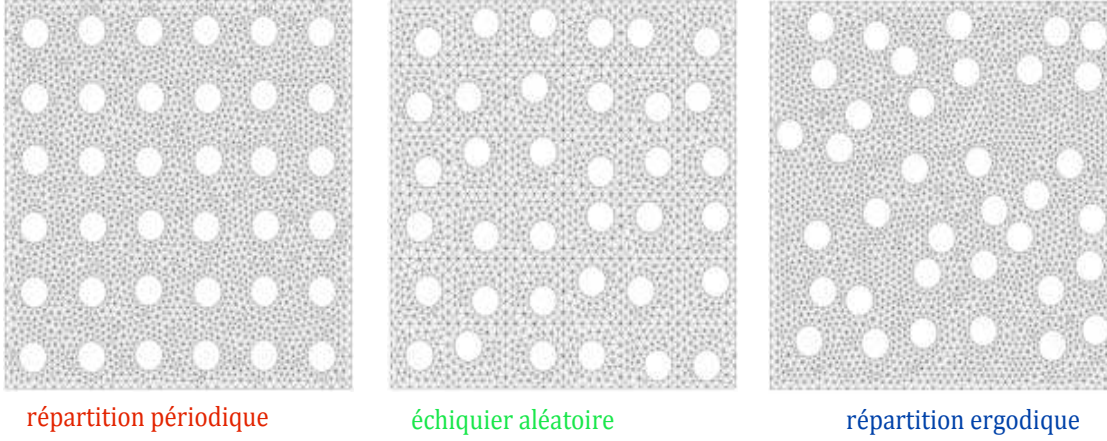


Fig. 4 – Maillage obtenu dans les trois cas étudiés.

Nous souhaitons faire une étude numérique des résultats obtenus dans la Section 2 dans le cas scalaire avec $f = g = \frac{1}{2}|\cdot|^2$, $p = 2$ et où les fibres sont de forte rigidité ($a = 4$) et dans le cas où $b = \gamma = p - 1 + \frac{a}{p} = 3$. L'énergie E_ε s'écrit alors pour tout $u \in W^{1,2}(O_h(\varepsilon), \mathbb{R}^3)$

$$E_\varepsilon := \int_{O_h(\varepsilon) \setminus T_\varepsilon} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^4} \int_{O_h(\varepsilon) \cap T_\varepsilon} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx - \int_{O_h(\varepsilon)} \mathcal{L}_\varepsilon \cdot u dx - \int_{(\widehat{O} \times h(\varepsilon)) \cap T_\varepsilon} \ell_\varepsilon \cdot u d\hat{x}$$

L'équilibre du système mécanique associé à la structure complète homogénéisée est décrit par l'énergie totale déterministe suivante définie dans l'espace $L^p(O, \mathbb{R}^3) \times V_0$:

$$E(u, v) := H_0(u, v) - \int_O L \cdot u dx - \int_{\widehat{O}} l \cdot v d\hat{x}.$$

Notons (\bar{u}, \bar{v}) la solution du problème ¹

$$\min \{ E(u, v) : (u, v) \in L^p(O, \mathbb{R}^3) \times V_0 \} = E(\bar{u}, \bar{v})$$

Un calcul standard de l'équation d'Euler de ce problème dans l'espace $L^p(O, \mathbb{R}^3) \times V_0$ conduit au système couplé suivant vérifié par (\bar{u}, \bar{v})

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial f_0(\bar{u}) = L \quad p.p \text{ dans } O, \\ -\frac{\partial}{\partial x_3} (\partial g^\perp) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3} \right) = 0 \quad p.p \text{ dans } O, \\ \bar{v} = 0 \quad p.p \text{ dans } \widehat{O} \times \{0\}, \\ \partial(g^\perp) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3} \cdot e_3 = \theta^{p-1} \bar{l} \quad p.p \text{ sur } \widehat{O} \times \{e_3\}. \end{array} \right.$$

1. Dans notre cas, on remarquera qu'on a unicité de la solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$.

$$\text{où } \tilde{l} = \begin{cases} l & \text{si } b = \gamma \\ 0 & \text{si } b < \gamma. \end{cases}$$

Notons $\bar{u}_\varepsilon(\omega, \cdot)$ la solution du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, nous montrons $(\bar{u}_\varepsilon, 1_{T_\varepsilon \cap \mathcal{O}} \varepsilon^{-3} \bar{u}_\varepsilon) \rightharpoonup (\bar{u}, \bar{v})$.

4.2 Calcul de \bar{u}

Nous avons obtenu le résultat qui suit, nous permettant d'obtenir une méthode simple de calcul du déplacement limite \bar{u} .

Proposition 4.1. *On note $U_n(\omega, \cdot)$ l'unique solution du problème de Dirichlet (aléatoire)*

$$\mathcal{P}_1 \begin{cases} -\Delta U = 1 \text{ sur } n\hat{Y} \setminus D(\omega), \\ U \in W_0^{1,2}(n\hat{Y} \setminus D(\omega)). \end{cases} \quad (4.1)$$

On pose $\Lambda_n(\omega) := \int_{n\hat{Y}} U_n(\omega, \hat{x}) d\hat{x}$. Alors, pour \mathbf{P} -presque tout $\omega \in \Omega$, $\Lambda_n(\omega)$ converge vers une constante déterministe $\Lambda > 0$ et \bar{u} est donné par

$$\bar{u} = \Lambda \int_0^1 L(\hat{x}, t) dt. \quad (4.2)$$

4.3 Approximation numérique de Λ

On cherche à calculer dans un cadre scalaire une approximation de Λ afin de déterminer la valeur de \bar{u} à l'aide de (4.2). On utilise le logiciel cast3M pour la résolution du problème de Dirichlet (4.1).

4.3.1 Maillage aléatoire.

Pour résoudre le problème aléatoire (4.1), on considère le domaine $n\hat{Y} \setminus D(\omega)$, constitué de n^2 fibres. Les sections de fibres dans $n\hat{Y}$ sont distribuées selon une loi uniforme, et la fraction volumique des fibres est de $\frac{\pi}{16}$ (le rayon d'une section de fibres est de $\frac{1}{4}$). Pour créer notre maillage contenant n fibres, on génère aléatoirement suivant une loi uniforme une liste de $N (\gg n^2)$ points de $n\hat{Y}$. Puis on extrait les n^2 premières coordonnées vérifiant

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in [0..N] \quad |\omega_i - \omega_j| < 2 \cdot \text{rayon} + d, \text{ avec } \omega_i \text{ centre des disques} \\ \forall z \in (n-1)\hat{Y}, \exists i \in [0..N] \text{ tel que } |(\hat{Y} + z)| \neq 0, \end{aligned}$$

où d est choisi assez petit selon la densité de maillage. On obtient alors le maillage de la Figure 5.

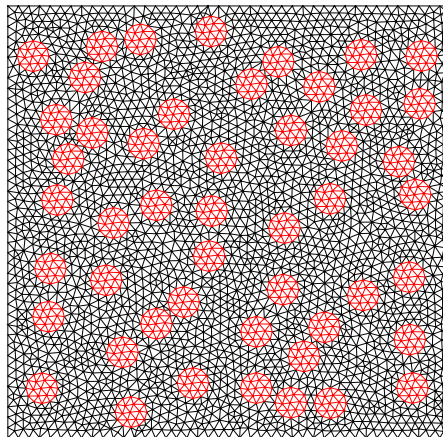


Fig. 5 – Maillage aléatoire (n=7, soit 49 fibres).

4.3.2 Calcul numérique de Λ

Nous cherchons à obtenir ici une estimation numérique de Λ comme étant la limite presque sûre de la suite $\Lambda_n(\omega) := \int_{\hat{Y}} U_n(\omega, \hat{x}) d\hat{x}$ où U_n est solution du problème 4.1 pour n fixé. On se place dans le cas où à chaque itération n notre structure compte n^2 fibres. Nous allons effectuer tous nos calculs dans trois cas. Le premier cas est celui d'une répartition **périodique** des fibres : on divise $n\hat{Y}$ en n^2 cellules et on place les fibres au centre de chaque cellule. Le deuxième cas est celui de l'**échiquier aléatoire** : on divise également $n\hat{Y}$ en n^2 cellules mais on place les fibres aléatoirement dans chaque cellule selon une loi de probabilité uniforme. Et le dernier cas est celui d'une répartition **aléatoire ergodique** des fibres dans $n\hat{Y}$ comme décrite dans le paragraphe 4.3.1. La Figure 6 illustre nos résultats pour les trois cas étudiés.

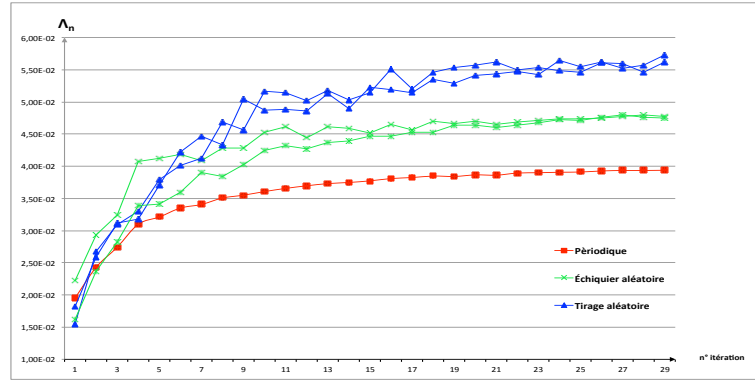


Fig. 6 – Évolution de $n \mapsto \Lambda_n$ dans le cas d'une répartition **périodique**, d'un **échiquier aléatoire** et d'un **tirage aléatoire** (avec 2 tirages différents).

On constate que pour chaque cas, on obtient une convergence de la suite $\Lambda_n(\omega)$ vers une constante Λ . De plus pour les cas aléatoires, on a unicité de cette limite quelque soit le tirage effectué, ceci est dû à l'ergodicité de la répartition des fibres.

4.4 Estimation de l'erreur entre les solutions de $\mathcal{P}_{\varepsilon, h(\varepsilon)}(\omega)$ et de \mathcal{P} dans le cas scalaire

Nous calculons l'évolution de l'erreur entre $\hat{x} \mapsto \bar{u}_\varepsilon(\omega, \hat{x}, 0)$ et \bar{u} où \bar{u}_ε et \bar{u} sont les solutions respectives de $(\mathcal{P}_{\varepsilon, h(\varepsilon)}(\omega))$ et (\mathcal{P}) lorsque ε décroît vers 0.

Le domaine des configurations de référence est ici $\hat{O} \times (0, \varepsilon^2)$ où $\hat{O} := [0, 2]^2$. Dans le cas périodique et celui de l'échiquier aléatoire, la fraction volumique asymptotique de fibres sur \hat{O} est $\theta := \int_{\hat{O}} |\hat{Y} \cap D(\omega)| d\mathbf{P}(\omega) = \pi \cdot \text{rayon}^2 = 0,196\dots$. En revanche, pour le cas aléatoire, nous avons besoin de calculer numériquement θ qui nous est indispensable pour comparer nos résultats dans les trois cas étudiés. Pour cela, nous avons calculé θ en faisant la moyenne des aires $|\hat{Y} \cap D(\omega)|$ pour un très grand nombre de tirages (10 000 tirages) et pour \hat{Y} fixé (voir Figure 7).

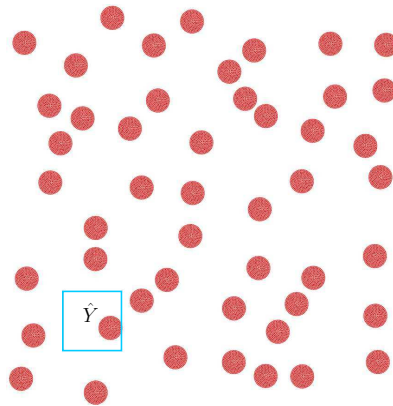


Fig. 7 – Zone de mesure de la fraction volumique pour $n = 5$ (soit 25 fibres).

La Figure 8 représente la variation de θ dans le cas aléatoire en fonction du nombre de fibres (cf la courbe rouge), ainsi que la valeur de la fraction volumique du cas périodique (cf courbe verte). On constate alors à partir de 36 fibres, que la fraction volumique de fibres de notre structure est très proche de celle du cas périodique et de l'échiquier aléatoire (la différence est inférieure à 2%). Par conséquent nous pouvons comparer nos résultats limites pour ces trois cas pour un même rayon de fibres.

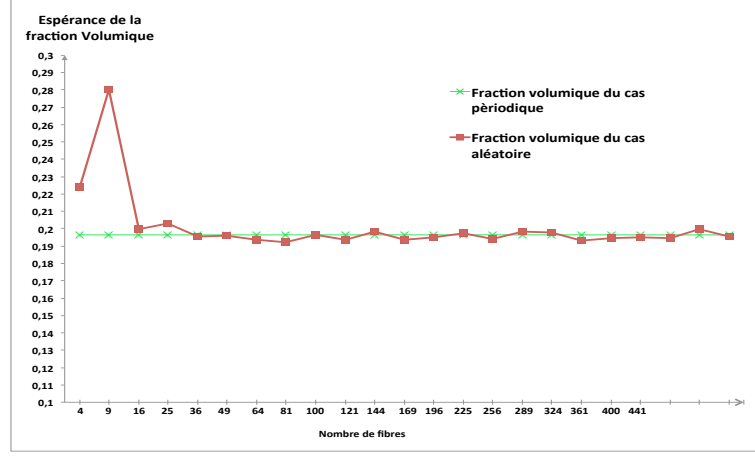


Fig. 8 – Évolution de la fraction volumique asymptotique en fonction du nombre de fibres.

On considère le problème élastique $\mathcal{P}_{\varepsilon, h(\varepsilon)}(\omega)$, où la structure est soumise à un chargement volumique dans la matrice et à une traction au niveau de la section supérieure des fibres. Les problèmes $\mathcal{P}_{\varepsilon, h(\varepsilon)}(\omega)$ et \mathcal{P} sont alors caractérisés par les systèmes d'équations suivant pour U_ε dans $W^{1,p}(O_{h(\varepsilon)}, \mathbb{R}^3)$, (\bar{U}, \bar{V}) dans $L^p(O, \mathbb{R}^3) \times V_0$ et pour ε fixé,

PROBLÈME INITIAL

$$\begin{cases} -\Delta U_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon & \text{dans } O_{h(\varepsilon)}, \\ U_\varepsilon \in W^{1,2}(O_{h(\varepsilon)} \setminus T_\varepsilon(\omega)), \\ U_\varepsilon = 0 & \text{sur } O_{h(\varepsilon)} \cap D_\varepsilon(\omega) \\ \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_3} = l_\varepsilon & \text{sur } O_{h(\varepsilon)} \cap (D_\varepsilon(\omega) + h(\varepsilon)) \end{cases}$$

PROBLÈME LIMITE

$$\begin{cases} \bar{U} = \Lambda L & p.p \text{ dans } O, \\ -\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x_3^2} = 0 & p.p \text{ dans } O, \\ \bar{V} = 0 & p.p \text{ dans } \hat{O} \times \{0\}, \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial x_3} \cdot e_3 = \theta \tilde{l} & p.p \text{ sur } \hat{O} \times \{e_3\}. \end{cases}$$

D'un point de vu mécanique, il est possible de supposer que \mathcal{L}_ε et l_ε ne dépendent pas de \hat{x} , plus précisément, $\mathcal{L}_\varepsilon = \varepsilon^{-2}$, et $l_\varepsilon = \varepsilon^{-3}$ dans notre cas.

Pour toute fonction w de $L^2(O)$ on note \tilde{w} son approximation numérique dans \mathbb{R}^N , où N est le nombre de noeuds générés par le logiciel Cast3MTM. On utilise la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ dans \mathbb{R}^N pour l'estimation de nos erreurs.

Nous calculons maintenant les erreurs relatives

$$\frac{\|\tilde{u}_\varepsilon(\hat{x}, 0) - \tilde{u}(\hat{x})\|_2}{\|\tilde{u}(\hat{x})\|_2}.$$

Pour notre calcul, à chaque itération $i = 2, 3, \dots$, on considère $\varepsilon = \frac{1}{i}$ et nombre de fibres = i^2 , par conséquent, la fraction volumique relative aux fibres est constante à chaque itération malgré que leurs nombres augmentent. On illustre ces convergences d'erreur par les Figures 9. Rappelons que $h(\varepsilon) = \varepsilon^2 = \frac{1}{n^2}$ et que les calculs sont fait pour un unique tirage.

On constate que l'estimation de l'erreur dans la matrice ne converge pas à la même vitesse et vers la même limite selon le cas étudié. En effet, pour le cas périodique on obtient une convergence rapide et

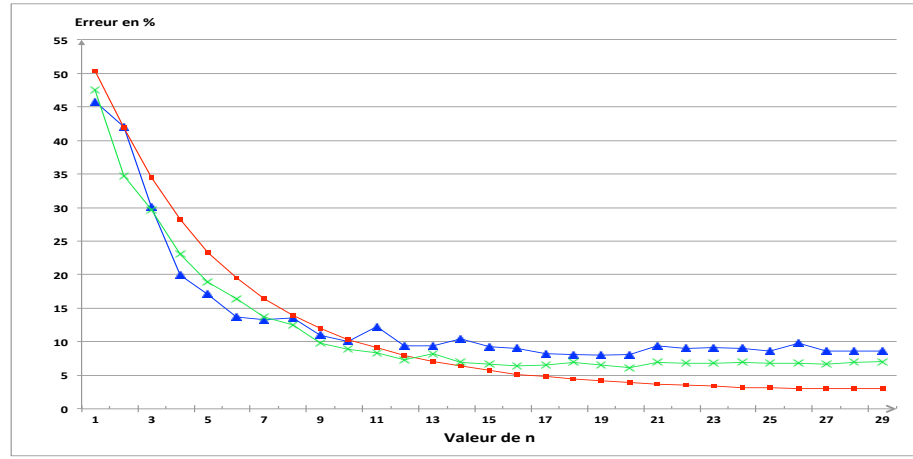


Fig. 9 – Évolutions de l'erreur dans la matrice dans le cas d'une réparation **périodique**, d'un **échiquier aléatoire** et d'un **tirage aléatoire**.

régulière ($< 5\%$ à partir de 16×16 fibres). Dans le cas de l'échiquier aléatoire, la convergence est plus rapide mais l'erreur est moins bonne tout en restant raisonnable ($\approx 6\%$ à partir de 14×14 fibres) et pour le cas général aléatoire nous sommes autour des 8% . Ces résultats nous paraissent cohérent d'un point de vue physique car pour le cas de l'échiquier aléatoire et à plus forte raison dans le cas périodique, le VER est bien défini alors que pour le cas aléatoire il est défini à la limite par définition avec la condition d'ergodicité. Ces résultats sont acceptables alors que notre modèle nous fournit seulement des convergences faibles.

5 Approche numérique du chapitre 3 : comparaisons du problème $\min_{u \in L^p(O, \mathbb{R}^3)} E_\varepsilon(u)$ avec le modèle reconstruit.

Dans cette section, nous voulons valider notre résultat limite obtenu par reconstruction 3D en comparant notre modèle limite avec le problème $\min_{u \in L^p(O, \mathbb{R}^3)} E_\varepsilon(u)$. Nous allons donc dans un premier temps, pour ε fixé, résoudre le problème $\min_{u \in L^p(O, \mathbb{R}^3)} E_\varepsilon(u)$ où pour tout $u \in W^{1,p}(O, \mathbb{R})$

$$E_\varepsilon(u) := \int_{O \setminus T_\varepsilon} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{O \cap T_\varepsilon} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx - \int_O \mathcal{L}_\varepsilon \cdot u dx - \int_{\hat{O}} \ell_\varepsilon(\hat{x}) \cdot u(\hat{x}, 1) d\hat{x}.$$

Nous rappelons que le matériau étudié est soumis à un chargement volumique $\mathcal{L}_\varepsilon \approx \frac{1}{\varepsilon^2} L(\hat{x}, \frac{x_3}{\varepsilon^2})$ vérifiant $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{L}_\varepsilon\|_{L^q(O, \mathbb{R}^3)} < +\infty$ et que les fibres sont soumises à une traction ℓ_ε sur la base supérieure $\hat{O} \times \{1\}$, vérifiant $\ell_\varepsilon(\hat{x}) \approx \frac{1}{\varepsilon} \ell(\hat{x})$ où $\ell \in L^q(\hat{O}, \mathbb{R}^3)$, et les fibres sont représentées par l'ensemble $T_\varepsilon(\omega) := (\varepsilon D(\omega)) \times (0, 1)$ où ω est une suite de points aléatoires représentant les centres des disques $D(\omega)$.

5.1 Cas d'une distribution de fibres différente sur chaque plaque.

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du même problème de minimisation $\min_{u \in L^p(O, \mathbb{R}^3)} E_\varepsilon(u)$ mais avec une distribution de fibres variant suivant x_3 . Malgré que la distribution de fibres varie, nous considérons la fonction $x_3 \mapsto \mathbf{P}_{x_3}$ constante. Puisque le tirage est différent sur la base inférieure de chaque plaque $\hat{O} \times [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$, nous considérons que les fibres peuvent être inclinées sur chaque plaque. Et pour des raisons de difficulté de maillage, nous traiterons uniquement le cas où la distribution est celle d'un échiquier aléatoire.

Conformément à notre stratégie de modélisation (cf Figure 1), l'algorithme que nous utilisons considère à chaque itération $i = 2, 3, \dots$, un nombre de plaque = nombre de fibres = $i^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}$.

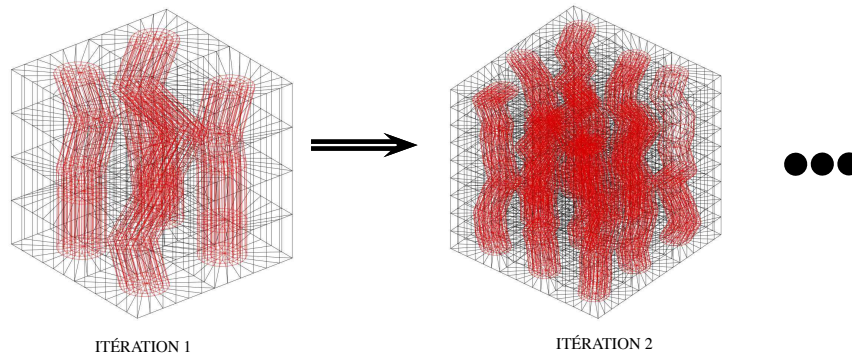


Fig. 10 – Maillage généré lors des 2 premières itérations.

Comme précédemment, nous estimons l'erreur entre la fonction u_ε solution du problème $\min_{u \in W_{\Gamma_0}^{1,2}(O)} E_\varepsilon(u)$ et la fonction $\bar{u} \in L^p(O, \mathbb{R})$ minimisant l'énergie limite suivante

$$E_0(u) := \int_O f_0(x_3, u(x)) dx - \int_O L(x) \cdot u(x) dx,$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Avec nos hypothèses, la solution de ce problème est alors $\bar{u}(x) = \Lambda(x) \cdot \bar{L}(x)$ où malgré une distribution de fibres variant suivant x_3 , puisque \mathbf{P}_{x_3} est constant, nous avons $\Lambda(x) = \Lambda$ est constant également.

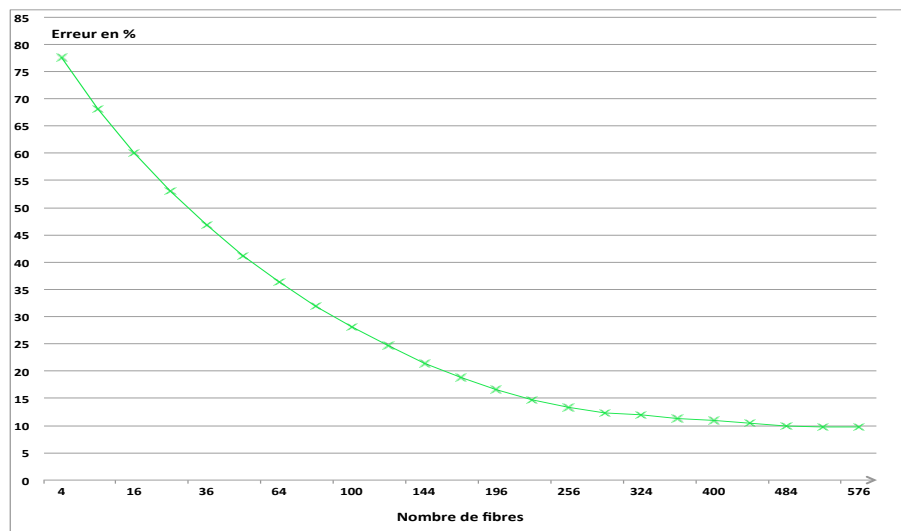


Fig. 11 – Évolution de l'erreur dans la matrice (en fonction du nombre de fibres et de plaques (et donc d' ε)) pour le cas d'un **échiquier aléatoire**.

Références

- [1] M. Frémond. *Non-Smooth Thermo-mechanics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [2] R. Laniel, P. Alart, S. Pagano. *Consistent thermodynamic modelling of wire-reinforced geomaterials*. European Journal of Mechanics - A/Solids, vol 26, 5 (2007) 854 - 871.
- [3] G. Michaille, A. Nait Ali, S. Pagano. *Macroscopic behavior of a randomly fibered medium*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol(42), 3 (2011) 230-252.