



HAL
open science

Formes modulaires sur la Z_p -extension cyclotomique de Q

Laurent Clozel

► **To cite this version:**

| Laurent Clozel. Formes modulaires sur la Z_p -extension cyclotomique de Q . 2013. hal-00831626

HAL Id: hal-00831626

<https://hal.science/hal-00831626>

Preprint submitted on 7 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Formes modulaires sur la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de \mathbb{Q}

Laurent Clozel *

In memoriam Jon Rogawski

1

Fontaine m'a demandé s'il existait une théorie des formes modulaires modulo p sur $GL(2, \mathbb{Q}(p^\infty))$ où l'on désigne par $\mathbb{Q}(p^\infty)$ « la » \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de \mathbb{Q} . Le but de cette Note est de montrer qu'une telle théorie existe en effet, avec quelques restrictions, pour $p \neq 2$.¹

La restriction essentielle porte sur le niveau en p . On fera ici une hypothèse de mauvaise réduction sur les formes classiques, qui nous permet de travailler sur (le groupe projectif d')une algèbre de quaternions ramifiée en p et l'infini. On verra aisément qu'une telle restriction n'est pas indispensable ; elle nous permet cependant ici d'obtenir une famille S_α ($\alpha \geq 0$) de « variétés de Shimura de dimension zéro » essentiellement intrinsèque, en supposant au contraire que les formes modulaires considérées sont partout non ramifiées en-dehors de p .

Le test d'une théorie non triviale des formes modulaires est l'existence d'opérateurs de Hecke dont les valeurs propres devraient être liées aux valeurs propres d'opérateurs de Frobenius dans une représentation galoisienne associée. On montre l'existence d'une famille d'opérateurs de Hecke T_ℓ – sur cet espace infini de « formes » sur $GL(2, \mathbb{Q}(p^\infty))$ – associées à tous les nombres premiers ℓ inertes dans $\mathbb{Q}(p^\infty)$. Sur cet espace infini, ces opérateurs sont donnés formellement par une somme infinie. Pour chaque extension finie $\mathbb{Q}(p^\alpha)$,

*Membre de l'Institut Universitaire de France.

1. On est en fait amené à supposer $p \geq 5$ (§2) mais on pourrait éviter cette hypothèse en accroissant le niveau en p .

leur expression devient finie et égale à l'expression classique. Ces opérateurs, conformément à l'intuition de Fontaine, n'ont un sens que si l'anneau des coefficients R des formes modulaires est de caractéristique p (ou, peut-être, s'il est complet pour la topologie p -adique).

Les opérateurs obtenus jouissent de la propriété usuelle d'autodualité (§4). La commutativité de l'algèbre des T_ℓ est plus délicate, car leur définition naturelle envoie un espace de fonctions à support fini vers un espace de fonctions arbitraires. On montre que les T_ℓ s'étendent naturellement à l'espace (linéairement compact) des fonctions invariantes par un sous-groupe ouvert de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(p^\infty)/\mathbb{Q})$, qu'il préservent. Dans ce cadre, ils forment une famille commutative (§ 4).

Enfin, on montre dans le § 5 que ces constructions donnent une nouvelle démonstration, naturelle, du changement de base de Saito–Shintani–Langlands. Celle-ci est limitée à la caractéristique p (et aux T_ℓ relatifs aux ℓ inertes) mais ne repose pas sur une identité de traces.

Dans leurs espaces linéairement compacts naturels, on peut évidemment se poser la question de la diagonalisation des T_ℓ ; en particulier on peut se demander si les valeurs propres classiques donnent lieu à des espaces propres dans ces espaces infinis. Nous n'obtenons qu'une réponse incomplète (Prop. 5.2).

Notons deux perspectives naturelles. Tout d'abord, on peut sans doute faire des constructions similaires sur des anneaux p -adiques plutôt que de caractéristique p : ceci amènerait à définir un espace de Banach (de type L^∞) de formes p -adiques dont notre espace est la réduction modulo p . On peut aussi tenter de construire une théorie locale, qui n'apparaît pas ici puisque nous avons fixé la ramification (en particulier en p).

2

On note $\mathbb{Q}(p^\infty)$ la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de \mathbb{Q} . On écrira parfois $F_\infty = \mathbb{Q}(p^\infty) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathbb{Q}(p^\alpha)$, $F_\alpha = \mathbb{Q}(p^\alpha)$ étant la sous-extension de groupe $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Les corps F_α sont totalement réels.

On écrit de même

$$\mathbb{Q}_p(p^\infty) = \bigcup_{\alpha} \mathbb{Q}_p(p^\alpha), \quad F_{p,\alpha} = \mathbb{Q}_p(p^\alpha).$$

L'idéal (p) est totalement ramifié dans F_∞ ; les notations \mathfrak{p}_α , \mathfrak{p}_∞ sont évidentes. On note $\mathcal{O}_{p,\alpha}$ l'anneau des entiers de $F_{p,\alpha}$.

Considérons un nombre premier $\ell \neq p$, donc non ramifié dans F_∞ .

Si $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ a pour image $\bar{x} \in \mathbb{F}_p^\times$, on peut écrire $x = x_1\tau(\bar{x})$, $\tau(\bar{x}) \in \mathbb{Z}_p^\times$ étant le représentant de Teichmüller de x , et x_1 appartenant à $1 + p\mathbb{Z}_p$. Soit $\chi : 1 + p\mathbb{Z}_p/1 + p^2\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F}_p$, $1 + py \mapsto \bar{y}$ l'isomorphisme naturel. On pose alors $\psi(x) = \chi(x_1) \in \mathbb{F}_p$. Si $\psi(\ell) \neq 0$, l'image de Frob_ℓ dans $\text{Gal}(\mathbb{Q}(p^\infty)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_p$ en est un générateur topologique et il en résulte que ℓ est inerte dans chaque extension $\mathbb{Q}(p^\alpha)$. Il existe donc une unique place, aussi notée ℓ , de $\mathbb{Q}(p^\alpha)$ ou $\mathbb{Q}(p^\infty)$ au-dessus de la place rationnelle.

Soit B l'algèbre de quaternions sur \mathbb{Q} ramifiée exactement en p et en la place archimédienne. Puisque p est impair, $B \otimes F_\alpha$ est ramifiée exactement en \mathfrak{p}_α et en les places réelles de F_α . On note G le groupe linéaire projectif associé à B : ainsi $G(\mathbb{Q}) = B^\times/\mathbb{Q}^\times$. On obtient de même un groupe G_α sur F_α , qui est obtenu par extension des scalaires à partir de G .

Considérons d'abord le groupe adélique $G(\mathbb{A})$ où \mathbb{A} désigne les adèles rationnels. Nous considérerons des formes automorphes sur $G(\mathbb{A})$, donc des fonctions sur le quotient compact $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$.

Nous nous limitons dans cette note au cas le plus simple, en imposant des conditions de ramification minimale.

Fixons un ordre maximal \mathcal{O}_B de B . Pour $\ell \neq p$, $(\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times$ est un sous-groupe compact maximal de $(B \otimes \mathbb{Q}_\ell)^\times \cong GL(2, \mathbb{Q}_\ell)$. Soit K_ℓ son image dans $G(\mathbb{Q}_\ell)$.

En p , soit \mathfrak{P} l'idéal maximal de $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$. Soit K_p l'image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ du sous-groupe $1 + \mathfrak{P}$ de $(B \otimes \mathbb{Q}_p)^\times$. On pose $K = \prod_q K_q \subset G(\mathbb{A}_f)$.

Dans ce qui suit on appelle α le **degré** d'un objet relatif à F_α . En degré α , on définit de même en toute place $\lambda \nmid p$ de F_α un sous-groupe K_λ à partir de l'ordre local $\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_\lambda$.

Le discriminant (réduit) de l'ordre maximal $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p \subset B_p$ est égal à p . En degré α , il en résulte par un calcul simple (cf. Vignéras [3, p. 35]) que le discriminant de $\mathcal{O}_B \otimes \mathcal{O}_{p,\alpha} \subset B \otimes F_{p,\alpha}$ est l'idéal $(p) = \mathfrak{p}_\alpha^{p^\alpha}$. En particulier cet ordre n'est pas l'ordre maximal, le discriminant de celui-ci étant \mathfrak{p}_α . Pour tout α , on munit au contraire $B_{p,\alpha}$ de son ordre maximal $\mathcal{O}_{B_{p,\alpha}}$. Ceux-ci vérifient les inclusions évidentes pour α variable. Pour tout α , la donnée de $\mathcal{O}_{B_{p,\alpha}}$ et des ordres précédents en $\lambda \nmid p$ définit un ordre maximal global $\mathcal{O}_{B,\alpha} \subset B \otimes F_\alpha$. Enfin, on définit $K_{p,\alpha} \subset G(F_{p,\alpha})$ comme précédemment à partir de l'idéal premier $\mathfrak{P}_\alpha \subset \mathcal{O}_{B_{p,\alpha}}$.

Soit

$$S_\alpha = G(F_\alpha) \backslash G(\mathbb{A}_{F_\alpha}) / G(F_{\alpha, \infty}) K_\alpha.$$

C'est un ensemble fini, et on pose

$$\mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha(\bar{\mathbb{F}}_p) = \{f : S_\alpha \longrightarrow \bar{\mathbb{F}}_p\}.$$

Noter que $S_\alpha = G(F_\alpha) \backslash G(\mathbb{A}_\alpha^f) / K_\alpha$ où on a noté \mathbb{A}_α^f les adèles finis de F_α .

On peut évidemment définir $\mathcal{S}_\alpha(R)$ pour toute algèbre commutative R . En particulier, $\mathcal{S}_\alpha(\mathbb{C})$ correspond, par la correspondance de Jacquet–Langlands, à un espace de formes modulaires sur $PGL(2, \mathbb{A}_\alpha)$ (donc de caractère central trivial), de poids parallèle 2, et qui sont, ou des caractères d'Artin d'ordre 2 de \mathbb{A}_α^\times , partout non ramifiés aux places ne divisant pas p , ou bien contenues dans des représentations cuspidales de $PGL(2, \mathbb{A}_\alpha)$, non ramifiées hors p , et appartenant à la série discrète (avec une ramification bornée) en p .

LEMME 2.1. *Supposons $p > 3$. Alors $G(F_\alpha)$ opère librement sur $G(\mathbb{A}_\alpha^f) / K_\alpha$.*

Il suffit de vérifier que $K_{p, \alpha}$ ne contient aucun élément non trivial d'ordre fini. Puisque $1 + \mathfrak{P}_\alpha$ est un p -groupe, l'ordre d'un tel élément γ serait égal à p^β , $\beta \geq 1$. Soit $S \subset B^\times$ le groupe des éléments de norme 1, de sorte qu'on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow S \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

d'où pour les points sur $F = F_{p, \alpha}$:

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow S(F) \longrightarrow G(F) \longrightarrow F^\times / (F^\times)^2.$$

L'élément γ provient donc de $S(F)$; l'ordre de son image inverse dans $S(F)$ est p^β ou $2p^\beta$; dans le dernier cas le produit par (-1) donne un élément d'ordre p^β .

On obtient donc un élément semi-simple non-central $\gamma_1 \in B^\times(F)$, qui engendre une extension quadratique de $F_{p, \alpha}$, donc une extension de degré $2p^\alpha$ de \mathbb{Q}_p .

Mais γ_1 s'identifie à une racine primitive de 1 d'ordre p^β , et son degré sur \mathbb{Q}_p est donc $(p-1)p^{\beta-1}$. Si $p > 3$, ceci est impossible.

Les démonstrations qui suivent vont reposer sur des arguments galoisiens, concernant en particulier les groupes de Galois relatifs $\text{Gal}(F_\beta / F_\alpha) \cong \mathbb{Z} / p^{\beta-\alpha} \mathbb{Z}$ ($\alpha \leq \beta$). On notera que les sous-groupes compacts considérés sont

stables par l'action galoisienne : c'est clair pour les K_λ (les places λ non inertes étant bien sûr permutées) et aussi pour les $K_{p,\alpha}$: l'ordre maximal $\mathcal{O}_{B_{p,\alpha}}$ étant unique, est invariant.

La suite des K_α étant croissante, on a des applications évidentes $S_\alpha \rightarrow S_\beta$ ($\alpha \leq \beta$), qui sont donc équivariantes.

LEMME 2.2 ($p \geq 5$). *Les applications naturelles*

$$\iota_\alpha^\beta : S_\alpha \longrightarrow S_\beta$$

sont injectives ($\alpha \leq \beta$).

Pour $\alpha \leq \beta$, on note j_α^β l'application $\mathcal{S}_\alpha \rightarrow \mathcal{S}_\beta$ obtenue par l'extension par zéro, et r_β^α la restriction $\mathcal{S}_\beta \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$.

On définit alors, pour tout R

$$\mathcal{S}_\infty = \mathcal{S}_\infty(R) = \varinjlim \mathcal{S}_\alpha(R)$$

et $\mathcal{S}^\infty = \varprojlim \mathcal{S}_\alpha(R)$, les limites étant prises respectivement pour les j_α^β et r_β^α .

Le premier espace est l'espace des fonctions à support fini sur $\mathcal{S}_\infty = \varinjlim \mathcal{S}_\alpha$, alors que \mathcal{S}^∞ est l'espace des fonctions $\mathcal{S}_\infty \rightarrow R$.

Démontrons le Lemme. Soit $x, x' \in S_\alpha$ d'image commune $y \in S_\beta$ et $g, h \in G(\mathbb{A}_\alpha^f)$ des représentants de x, x' . On a donc par hypothèse

$$(2.1) \quad g = \gamma h k \quad (\gamma \in G(F_\beta), k \in K_\beta).$$

Soit $\sigma \in \text{Gal}(F_\beta/F_\alpha)$, alors

$$g = \sigma(g) = \sigma(\gamma)h\sigma(k)$$

donc

$$\sigma(\gamma)^{-1}\gamma h k = h\sigma(k), \quad k, \sigma(k) \in K_\beta.$$

D'après le Lemme 2.1, on a donc $\sigma(\gamma) = \gamma$ pour tout σ , donc $\gamma \in G(F_\alpha)$; il résulte de (2.1) que $\sigma(k) \equiv k$ et donc $k \in K_\alpha$, soit $x = x'$.

La dernière assertion résulte du lemme suivant :

LEMME 2.3. *Soit $\Gamma = \text{Gal}(F_\beta/F_\alpha)$. Alors*

$$H^0(\Gamma, K_\beta) = K_\alpha.$$

Le groupe K_α est décomposé, et l'assertion du Lemme se voit place par place. Aux places $\nmid p$ elle est évidente.

Rappelons que $K_{p,\alpha}$ est l'image dans $G(F_{p,\alpha})$ de $1 + \mathfrak{P}_\alpha$. On vérifie aisément que $(1 + \mathfrak{P}_\alpha) \cap F_{p,\alpha}^\times = 1 + \mathfrak{p}_\alpha$, le corps étant plongé centralement dans $B_{p,\alpha}$. Par ailleurs $(1 + \mathfrak{P}_\beta) \cap B_{p,\alpha} = 1 + \mathfrak{P}_\alpha$. Il suffit évidemment de vérifier que $\mathfrak{P}_\beta \cap B_{p,\alpha} = \mathfrak{P}_\alpha$. Notons N_α, N_β les normes réduites. Alors \mathfrak{P}_α (par exemple) est défini par $|N_\alpha(x)| < 1$, et pour $x \in B_{p,\alpha}$, $N_\beta(x) = N_\alpha(x)^{[F_\beta:F_\alpha]}$.

La suite exacte en cohomologie déduite de

$$1 \longrightarrow (1 + \mathfrak{p}_\beta) \longrightarrow (1 + \mathfrak{P}_\beta) \longrightarrow K_\beta \longrightarrow 1$$

donne donc

$$1 \longrightarrow (1 + \mathfrak{p}_\alpha) \longrightarrow (1 + \mathfrak{P}_\alpha) \longrightarrow K_\beta^\Gamma \longrightarrow H^1(\Gamma, 1 + \mathfrak{p}_\beta) \longrightarrow H^1(\Gamma, 1 + \mathfrak{P}_\beta)$$

et il suffit de vérifier que la dernière flèche est injective. Mais la norme réduite donne de nouveau :

$$1 \longrightarrow (1 + \mathfrak{p}_\beta) \longrightarrow (1 + \mathfrak{P}_\beta) \xrightarrow{N_\beta} (1 + \mathfrak{p}_\beta) \longrightarrow 1,$$

la composée des deux applications étant l'application carré. Puisque $p \neq 2$, il en résulte que $H^1(\Gamma, 1 + \mathfrak{p}_\beta) \longrightarrow H^1(\Gamma, 1 + \mathfrak{P}_\beta)$ est injective.

La fin de ce paragraphe, qui n'est pas nécessaire pour la suite, est consacrée au calcul de la dimension des espaces \mathcal{S} .

Rappelons que

$$(2.2) \quad S_\alpha = G(F_\alpha) \backslash G(\mathbb{A}_\alpha) / G(F_{\alpha,\infty}) K_\alpha.$$

Munissons $G(\mathbb{A}_\alpha)$ de la mesure de Tamagawa [3]. D'après Weil, la mesure de $G(F_\alpha) \backslash G(\mathbb{A}_\alpha)$ est égale à 2. Puisque $G(F_\alpha)$ opère librement, on a donc

$$N_\alpha := \#S_\alpha = \frac{2}{\text{vol}(G(F_{\alpha,\infty})K_\alpha)}$$

le volume étant calculé à l'aide de la mesure de Tamagawa τ .

Nous suivons pour ce calcul l'exposé de Vignéras [3]. Ecrivons pour simplifier $\mathbb{A} = \mathbb{A}_\alpha$. On a

$$G(\mathbb{A}) = B^\times(\mathbb{A}) / \mathbb{A}^\times$$

et la mesure τ est le quotient de $dX_{\mathbb{A}}^{\times}$ et $dx_{\mathbb{A}}^{\times}$, chacune multipliée par les facteurs $\text{Res}_{s=1}\zeta_{F_{\alpha}}$ qui donc s'annulent [3, p. 65]. On a :

$$\begin{aligned} dx_{\mathbb{A}}^{\times} &= \prod_v dx_v^{\times} \\ d^{\times}x_v &= \frac{dx_v}{|x_v|} \quad (v \text{ réelle}) \\ d^{\times}x_v &= (1 - q_v^{-1})^{-1} D_v^{-1/2} \frac{dx_v}{|x_v|} \quad (v \text{ } p\text{-adique}). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} d^{\times}X_v &= \frac{dX_v}{|Nrd(X_v)|^2} \quad (v \text{ réelle}) \\ d^{\times}X_v &= D_v^{-1/2} (1 - q_v^{-1})^{-1} \frac{dX_v}{|NrdX_v|^2} \quad (v \text{ } p\text{-adique}) \end{aligned}$$

où D_v désigne maintenant le discriminant de B_v . Les mesures additives dx_v sont les mesures usuelles ; les mesures dX_v sont spécifiées dans [3, p. 49–50].

(2.3) **Places non ramifiées** $(v \nmid p)$.

Dans ce cas [3, p. 49] $K_v = PGL(2, \mathcal{O}_v)$ et

$$\text{vol}(K_v) = 1 - q_v^{-2}$$

(2.4) **Place** $v = \mathfrak{p}_{\alpha} \mid p$.

Dans ce cas (ibid),

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{O}_B^{\times}, d^{\bullet}X_v) &= \frac{1 - q_v^{-2}}{1 - q_v^{-1}} \\ \text{vol}(\mathcal{O}_{F_v}^{\times}, d^{\bullet}x_v) &= 1 \end{aligned}$$

où les mesures d^{\bullet} ne contiennent pas le discriminant, donc pour le compact maximal :

$$\text{vol}\left(K_v^0, \frac{d^{\times}X_v}{d^{\times}x_v}\right) = \left(\frac{1 - q_v^{-2}}{1 - q_v^{-1}}\right) D(B_v)^{-1/2} / D(F_v)^{-1/2}.$$

On a $D(B_v) = D(F_v)^4 N(d_B)^2$ [3, p. 65] où $N(d_B) = N\mathfrak{p}_\alpha = p$ [3, p. 35].
Donc

$$\text{vol}(K_v^0) = D(F_v)^{-3/2} \frac{(1-p^{-2})}{p-1}$$

puisque $q_v = p$.

Mais notre groupe K_v (en $v = \mathfrak{p}_\alpha$) est quotient de $1 + \mathfrak{P}$, non \mathcal{O}_B^\times . Leurs intersections respectives avec le centre $F_{p,\alpha}^\times$ de B^\times sont $1 + \mathfrak{p}_\alpha \subset \mathcal{O}_{p,\alpha}^\times$. On vérifie aisément que $K_v^0/K_v \cong k_2^\times/k^\times$ où $k = k_\alpha$, k_2 est son extension quadratique, donc d'ordre $p+1$. Au total, la partie finie du volume est

$$v(K_f) = D_v^{-3/2} \zeta_{F_\alpha}(2)^{-1} \frac{1}{p^2-1}$$

où D_v est évidemment le discriminant de F_α .

(2.5) Places archimédiennes

On doit calculer $\text{vol}(B^\times/\mathbb{R}^\times, \frac{d^\times X_v}{d^\times x_v})$ où B est l'algèbre de Hamilton et, avec les coordonnées usuelles, $dX_v = 4 dX_1 \cdots dX_4$. En identifiant B à \mathbb{R}^4 , on voit qu'on doit calculer

$$\begin{aligned} & \text{vol}\left(S^3/\pm 1, \frac{4dX}{r^4}/\frac{dr}{r}\right) \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}(S^3, 4d\omega) = 2\text{vol}(S^3) \end{aligned}$$

avec la mesure de surface $d\omega$, donc $4\pi^2$.

Il reste à calculer le discriminant, qui se déduit aisément de la Führerdiskriminantenproduktformel²

$$D_v = D_{F_\alpha} = \prod_{\chi} \mathfrak{f}_\chi$$

où χ parcourt les caractères d'ordre multiple de p de $(\mathbb{Z}/p^{\alpha+1}\mathbb{Z})^\times$. Il vient

$$D_{F_\alpha} = p^d$$

2. C'est un exercice amusant de calculer D_v à l'aide de la théorie p -adique.

où

$$\begin{aligned} d = d_\alpha &= (\alpha + 1)(p^\alpha - p^{\alpha-1}) + \alpha(p^{\alpha-1} - p^{\alpha-2}) + \cdots + 2(p-1) \\ &= (p^\alpha - 1)\frac{p-2}{p-1} + \alpha p^\alpha. \end{aligned}$$

On a donc démontré :

PROPOSITION 2.4.

$$N_\alpha = \#S_\alpha = 2 \cdot (4\pi^2)^{-p^\alpha} p^{\frac{3}{2}d_\alpha} (p^2 - 1)\zeta_{F_\alpha}(2).$$

D'après l'équation fonctionnelle, on a en fait

$$(2.6) \quad N_\alpha = -2 \cdot 2^{-p^\alpha} (p^2 - 1)\zeta_{F_\alpha}(-1)$$

ce qui montre la compatibilité avec les résultats connus sur la rationalité de $\zeta_{F_\alpha}(-1)$. (En fait, on sait d'après Serre [2], Harder et Hirzebruch que $24 \cdot 2^{-p^\alpha} \zeta_F(-1) \in \mathbb{Z}$, ce qui implique l'intégralité de N_α .)

Soit $\Gamma_\alpha = \text{Gal}(F_\infty/F_\alpha)$. Puisque $\Gamma_{\alpha-1}/\Gamma_\alpha \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ opère sans point fixe sur $S_\alpha - S_{\alpha-1}$, on en déduit d'ailleurs :

PROPOSITION 2.5. $\zeta_{F_\alpha}(-1) - \zeta_{F_{\alpha-1}}(-1)$ est divisible par p .

Noter par ailleurs que la condition $p > 3$ était nécessaire pour le Lemme 2.1, au moins si $\alpha = 0$. En effet si $F = \mathbb{Q}$, $\zeta_F(-1) = -\frac{1}{12}$; d'après (2.6), N_α n'est entier que pour $p > 3$.

Pour comprendre la croissance de N_α , revenons à la Proposition 2.4. On a $\zeta_{F_\alpha}(2) \geq 1$, donc

$$\begin{aligned} \log_p(N_\alpha) &\geq \frac{3}{2}\alpha p^\alpha(1 + o(1)) - p^\alpha \log_p(4\pi^2) + O(1) \\ &\sim \frac{3}{2}\alpha p^\alpha. \end{aligned}$$

En particulier, N_α croît très vite avec α .

Dans le paragraphe 4, nous serons amenés à considérer les fonctions sur S_β ($\beta \geq \alpha$) invariantes par Γ_α , α étant fixé. Le groupe Γ_α opère sur $S_\beta - S_{\beta-1}$ par son quotient $\Gamma_{\beta-1}/\Gamma_\beta \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'action de ce quotient étant libre. La dimension de l'espace des fonctions invariantes sur $S_\beta - S_{\beta-1}$ est donc $\frac{1}{p}(N_\beta - N_{\beta-1})$. Des estimées analogues – à l'aide d'une majoration de $\zeta_{F_\alpha}(2)$, par exemple par $(\zeta_{\mathbb{Q}}(2))^{p^\alpha}$ – montre que cet espace croît très vite. Il en résulte que l'espace $\mathcal{S}_\beta^\alpha := \mathcal{S}_\beta^{\Gamma_\alpha}$ considéré au paragraphe 4 n'est pas constitué (disons sur \mathbb{C}) par des formes automorphes provenant par changement de base à partir de formes sur F_α .

3

Dans ce paragraphe nous définissons **en caractéristique** p des opérateurs de Hecke T_ℓ (ℓ inerte) opérant sur \mathcal{S}_∞ .

Soit donc $\ell \neq p$ un nombre premier inerte : $\psi(\ell) \neq 0$. Le corps $\mathbb{Q}_\ell(p^\infty)$ a pour corps résiduel une \mathbb{Z}_p -extension $\mathbb{F} = \varinjlim \mathbb{F}_{\ell p^\alpha}$ de \mathbb{F}_ℓ . On écrit \mathbb{F}_α pour $\mathbb{F}_{\ell p^\alpha}$.

En degré fini α , l'opérateur $T_\ell : \mathcal{S}_\alpha \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$ est donné (quels que soient les coefficients) par

$$(3.1) \quad \begin{aligned} T_\ell f(g) &= \sum_{\xi \in \mathbb{F}_\alpha} f\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right) + f\left(g \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ell \end{pmatrix}\right) \\ &:= U_\ell f(g) + V_\ell f(g). \end{aligned}$$

On choisit des représentants dans l'anneau d'entiers $\mathcal{O}(\mathbb{Q}_\ell(p^\alpha))$ des $\xi \in \mathbb{F}_\alpha$; la valeur de $T_\ell f(g)$ n'en dépend point. La fonction f doit être considérée comme une fonction de

$$g \in Y_\alpha := G(F_\alpha) \backslash G(\mathbb{A}_\alpha^f) / K_\alpha^\ell$$

où K_α^ℓ est le produit des composantes de K_α aux places ne divisant pas ℓ . L'espace Y_α est donc le quotient de $G(F_{\alpha,\ell})$ par un groupe de congruence.

On vérifie aisément, en imitant la démonstration du Lemme 2, que les applications

$$Y_\alpha \longrightarrow Y_\beta \quad (\beta \geq \alpha)$$

sont injectives. En effet, $G(F_\alpha)$ opère librement sur $G(\mathbb{A}_\alpha^f) / K_\alpha^\ell$ (considérer les composantes en ℓ); la démonstration précédente s'applique en utilisant le Lemme 2.3 aux places ne divisant pas p . Si $f \in \mathcal{S}_\infty$, on peut évidemment considérer f comme une fonction sur

$$Y_\infty = \varinjlim Y_\alpha.$$

On définit formellement T_ℓ par

$$T_\ell = U_\ell + V_\ell$$

l'expression de V_ℓ étant inchangée et U_ℓ étant donné par

$$(3.2) \quad U_\ell f(g) = \sum_{\xi} f\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right).$$

La somme porte maintenant sur les $\xi \in \mathbb{F}$; $g \in Y_\infty$ donc $g \in Y_\beta$ pour un certain β .

Avant de poursuivre, notons T_ℓ^α l'opérateur (3.1), i.e. T_ℓ en degré fini. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{S}_\beta \\ T_\ell^\alpha \downarrow & & \downarrow T_\ell^\beta \\ \mathcal{S}_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{S}_\beta \end{array}$$

($\beta \geq \alpha$) n'est certainement pas commutatif, par exemple si l'anneau de coefficients est égal à \mathbb{C} . La commutativité impliquerait en effet qu'une valeur propre a_α de T_ℓ^α (opérateur de Hecke en la place (ℓ) = λ_α de F_α) serait une valeur propre de T_ℓ^β en la place λ_β . Mais les valeurs propres sont, au moins pour les formes issues de formes paraboliques sur $GL(2)$, de la forme

$$(3.3) \quad a_\alpha = \ell^{p^{\alpha/2}}(u + v)$$

où $|u| = |v| = 1$, et on ne peut donc avoir $a_\alpha = a_\beta$ pour des raisons de poids. Noter que le changement de base de Langlands [1] associe à (3.3) une valeur propre

$$(3.4) \quad a_\beta = \ell^{p^{\beta/2}}(u^{p^{\beta-\alpha}} + v^{p^{\beta-\alpha}})$$

puisque $p^{\beta-\alpha}$ est le degré de l'extension locale, inerte. On peut vérifier directement, sur l'expression (3.1), que, pour $f \in \mathcal{S}_\alpha$, $T_\beta f$ n'est pas en général à support dans \mathcal{S}_α . Pour les mêmes raisons, la somme (3.2) n'est pas évidemment convergente, i.e. finie.

Mais supposons l'anneau des coefficients R de caractéristique p . On considère l'ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{F})$ des complémentaires des \mathbb{F}_α ($\alpha \geq 0$). Ce n'est pas un filtre, mais il définit une notion de convergence analogue. En particulier, si R est muni de la topologie discrète, on dira qu'une somme $\sum_{\xi \in \mathbb{F}} f(\xi)$ est

convergente pour \mathcal{F} si la somme

$$\sum_{\mathbb{F}_0} f(\xi) + \sum_{\mathbb{F}_1 - \mathbb{F}_0} f(\xi) + \cdots + \sum_{\mathbb{F}_\alpha - \mathbb{F}_{\alpha-1}} f(\xi) + \cdots$$

est convergente, i.e. si tous les termes sont nuls pour $\alpha \gg 0$.

PROPOSITION 3.1. *Pour $f \in \mathcal{S}_\infty(R)$ la somme*

$$U_\ell f(g) = \sum_{\xi} f\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right)$$

est convergente pour \mathcal{F} si R est de caractéristique p . De plus $T_\ell f = U_\ell f + V_\ell f$ est un élément de $\mathcal{S}^\infty(R)$.

Démonstration : Supposons f à support dans S_α (donc dans Y_α pour le calcul de U_ℓ). Soit $x \in S_\beta$, image de $g \in Y_\beta$. Considérons un terme

$$(3.5) \quad f\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right)$$

de (3.2); soit $\mathbb{F}_\gamma = \langle \mathbb{F}_\alpha, \mathbb{F}_\beta \rangle$ et supposons que $\xi \notin \mathbb{F}_\gamma$. Soit $\sigma \in \Gamma = \text{Gal}(\mathbb{F}_\ell(\xi)/\mathbb{F}_\gamma)$. Si le terme (3.5) est non nul, $g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right) \in Y_\alpha$ est invariant par σ . On a alors

$$f\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right) = f\left(\sigma\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right)\right) = f\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \sigma\xi \\ & 1 \end{array}\right)\right)$$

car σ fixe g . Puisque ξ n'est pas fixe par Γ , le cardinal de l'orbite de ξ est divisible par p . On a donc pour tout $\delta > \gamma$

$$\sum_{\xi \in \mathbb{F}_\delta - \mathbb{F}_\gamma} f\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right) = 0$$

ce qui démontre la convergence de la somme.

Pour la fin de la démonstration, on peut supposer $\beta \geq \alpha$. Alors (si $x \in S_\beta$) le calcul précédent montre que $T_\ell f(g) = T_\ell^\beta f(g)$; la théorie classique montre alors que $T_\ell f$ est invariante par $K_{\ell, \beta}$ donc définit par restriction un élément de \mathcal{S}_β .

La démonstration précédente montre en fait que (pour R de caractéristique p) $T_\ell^\beta f(x) = T_\ell^\alpha f(x)$ si f est à support dans S_α , $x \in S_\alpha$ et $\beta \geq \alpha$. En termes de la restriction $r_\beta^\alpha : \mathcal{S}_\beta \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$, ceci s'écrit

$$(3.6) \quad r_\alpha^\beta T_\ell^\beta j_\alpha^\beta = T_\ell^\alpha.$$

Si on considère une base de \mathcal{S}_∞ obtenue à l'aide de bases des fonctions sur $S_{\alpha+1} - S_\alpha$, T_ℓ est donc représenté par une matrice doublement infinie dont les blocs diagonaux (pour $\alpha \geq 0$) sont les T_ℓ^α .

Supposons pour simplifier que $R = \bar{\mathbb{F}}_p$.

Ecrivons une valeur propre de T_ℓ^α — par exemple venant par réduction modulo p d'une valeur propre (3.3) — sous la forme

$$(3.7) \quad a_\alpha = u + v$$

où nous avons changé de notation et u, v sont les valeurs propres de $\text{Frob}_{\lambda_\alpha}$ dans la représentation galoisienne (de poids géométrique 1) associée, modulo p évidemment. La valeur propre associée pour T_ℓ^β est alors par changement de base, cf. (3.4) :

$$a_\beta = u^{p^{\beta-\alpha}} + v^{p^{\beta-\alpha}} .$$

Mais l'ensemble des valeurs propres (3.7) apparaissant en degré α est, par rationalité (\mathcal{S}_α est défini sur \mathbb{F}_p) invariant par $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ opérant sur les **coefficients**. On voit donc que $a_\beta = \Phi_p^{\beta-\alpha}(a_\alpha)$ (Frobenius Φ_p **arithmétique**) apparaît dans \mathcal{S}_α .

Il en résulte, de même, que toute valeur propre a_α de T_ℓ^α apparaît dans \mathcal{S}_β . Nous y reviendrons.

4

Nous considérons maintenant les deux propriétés fondamentales des opérateurs de Hecke dans la théorie classique : ils sont auto-adjoints et forment une famille commutative. On suppose toujours ℓ inerte.

On a construit $T_\ell : \mathcal{S}_\infty \rightarrow \mathcal{S}^\infty$. On dispose d'une dualité naturelle

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\infty \times \mathcal{S}^\infty &\longrightarrow R \\ \langle f, F \rangle &= \sum_{x \in \mathcal{S}_\infty} f(x)F(x) . \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, supposons désormais que R est un corps, et en fait que $R = \overline{\mathbb{F}}_p$. Alors \mathcal{S}_∞ est limite inductive d'espaces de dimension finie et \mathcal{S}^∞ , son dual, est linéairement compact (compact si R est une extension finie de \mathbb{F}_p).

La relation d'adjonction est immédiate :

PROPOSITION 4.1. *Pour $f, g \in \mathcal{S}_\infty$*

$$\langle T_\ell f, g \rangle = \langle f, T_\ell g \rangle .$$

On peut en effet considérer $j_\alpha : \mathcal{S}_\alpha \rightarrow \mathcal{S}_\infty$ et $r_\alpha : \mathcal{S}^\infty \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$. La relation (3.6) donne alors

$$(4.1) \quad r_\alpha T_\ell j_\alpha = T_\ell^\alpha .$$

On peut supposer que $f, g \in \mathcal{S}_\alpha$ et donc

$$\begin{aligned} \langle T_\ell f, g \rangle &= \langle r_\alpha T_\ell j_\alpha f, g \rangle \\ &= \langle T_\ell^\alpha f, g \rangle_\alpha = \langle f, T_\ell^\alpha g \rangle_\alpha \end{aligned}$$

(produit scalaire sur \mathcal{S}_α), d'où le résultat par symétrie.

Puisque T_ℓ ne préserve pas \mathcal{S}_∞ , la relation de commutation

$$(4.2) \quad T_\ell T_m = T_m T_\ell$$

(ℓ, m premiers inertes) n'a pas de sens pour l'instant. Nous devons étendre le domaine de T_ℓ . Noter que

$$\mathcal{S}^\infty = \varprojlim \mathcal{S}_\alpha$$

(limite projective pour la restriction); pour $f \in \mathcal{S}_\infty$, la relation (3.6) montre que $T_\ell f \in \mathcal{S}^\infty$ est la limite projective des $T_\ell^\alpha f$ pour $\alpha \geq \gamma$ et $f \in \mathcal{S}_\gamma$. Mais l'application $T_\ell : \mathcal{S}^\infty \rightarrow \varprojlim \mathcal{S}_\alpha$ ne s'étend pas continûment à \mathcal{S}_∞ .

Notons maintenant Γ le groupe $\text{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$, $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$ et soit $\Gamma_\alpha \cong p^\alpha \mathbb{Z}_p$, $\Gamma_\alpha = \text{Gal}(F_\infty/F_\alpha)$.

PROPOSITION 4.2. *T_ℓ commute à l'action de Γ .*

Soit en effet $f \in \mathcal{S}_\alpha$ et $g \in Y_\infty$; on peut supposer $g \in Y_\beta$ avec $\beta \geq \alpha$. Alors

$$U_\ell f(g) = \sum_{\xi} f\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right) \quad (\xi \in \mathbb{F}_\beta)$$

d'après la preuve de la Proposition 3.1. Si $\sigma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} U_\ell f(\sigma g) &= \sum_{\xi} f\left(\sigma g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right) \\ &= \sum_{\xi} f\left(\sigma\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \sigma^{-1}\xi \\ & 1 \end{array}\right)\right)\right) \\ &= \sum_{\xi} f \circ \sigma\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{S}^\alpha \subset \mathcal{S}^\infty$ le groupe des invariants pour Γ_α :

$$\mathcal{S}^\alpha = H^0(\Gamma_\alpha, \mathcal{S}^\infty)$$

de sorte que $\mathcal{S}^\alpha = \varprojlim \mathcal{S}_\beta^\alpha$ où $\mathcal{S}_\beta^\alpha = H0(\Gamma_\alpha, \mathcal{S}_\beta)$. Noter que \mathcal{S}^α est le produit des $\mathcal{S}_\gamma^\alpha / \mathcal{S}_{\gamma-1}^\alpha$ ($\gamma \geq 0$), chacun de ces groupes s'identifiant à l'espace des fonction (à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p$) sur l'ensemble fini des orbites de Γ_α dans $S_\gamma - S_{\gamma-1}$.

On peut définir de même $\mathcal{S}_\infty^\alpha = \mathcal{S}_\infty \cap \mathcal{S}^\alpha$. D'après la Proposition 4.2,

$$T_\ell : \mathcal{S}_\infty^\alpha \longrightarrow \mathcal{S}^\alpha .$$

PROPOSITION 4.3. *T_ℓ s'étend continûment en un opérateur $T_\ell : \mathcal{S}^\alpha \longrightarrow \mathcal{S}^\alpha$.*

La topologie sur \mathcal{S}^∞ est la topologie naturelle d'espace linéairement compact.

Soit en effet $F \in \mathcal{S}^\alpha$, et $g \in Y_\beta$. On veut définir

$$(4.3) \quad U_\ell F(g) = \sum_{\xi} F\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right).$$

On peut supposer $\beta \geq \alpha$. Si $\sigma \in \Gamma_\beta$,

$$\begin{aligned} F\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \sigma\xi \\ & 1 \end{array}\right)\right) &= F\left(\sigma\left(\sigma^{-1}g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right)\right) \\ &= F\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right) \end{aligned}$$

puisque F et g sont fixes par Γ_β . On peut donc restreindre la sommation aux $\xi \in \mathbb{F}_\beta$, et l'opérateur ainsi défini ne dépend pas du choix de β . L'opérateur $T_\ell = U_\ell + V_\ell$ ainsi défini étend évidemment $T_\ell : \mathcal{S}_\infty^\alpha \longrightarrow \mathcal{S}^\infty$. Son image est dans \mathcal{S}^α comme on le voit en imitant la démonstration du Lemme 4.2. (Ceci résulte aussi de la continuité). Mais la topologie sur \mathcal{S}^∞ est aussi la topologie de la convergence simple. Si $F \in \mathcal{S}^\alpha$, $F \rightarrow 0$,

$$U_\ell F(g) = \sum_{\xi} F\left(g\left(\begin{array}{c} \ell & \xi \\ & 1 \end{array}\right)\right)$$

est donné, pour g fixé, par une somme finie d'après la démonstration précédente, et tend donc vers 0.

On a alors :

THÉORÈME 4.4. *Pour tout $\alpha \geq 0$, les T_ℓ (ℓ inerte) forment une famille commutative d'opérateurs continus $\mathcal{S}^\alpha \rightarrow \mathcal{S}^\alpha$.*

Ceci résulte de la démonstration précédente. Soit ℓ, m inertes et notons $\mathbb{F}_{\ell, \alpha}, \mathbb{F}_{m, \alpha}$ les p^α -extensions de \mathbb{F}_ℓ et \mathbb{F}_m . Pour $g \in Y_\beta$, l'expression (4.3) s'applique à U_ℓ et U_m , les sommes portant sur $\mathbb{F}_{\ell, \beta}$ et $\mathbb{F}_{m, \beta}$. Puisque les matrices $\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} m & \eta \\ & 1 \end{pmatrix}$ (dans $G(F_{\ell, \alpha})$ et $G(F_{m, \alpha})$) commutent le résultat est évident.

La propriété d'auto-adjonction reste vraie dans ce cadre, si l'on définit convenablement le produit scalaire dans \mathcal{S}^α . Soit $F, G \in \mathcal{S}^\alpha = \varprojlim \mathcal{S}_\beta^\alpha$. Considérons $\beta \geq \alpha$ et les restrictions de F, G à S_β . On considère leur produit scalaire $\langle F, G \rangle_\beta = \sum_{x \in S_\beta} F(x)G(x)$.

LEMME 4.5. *Si H est une fonction invariante par Γ_α , $\int_{S_\beta} H = \sum_{x \in S_\beta} H(x)$ ne dépend pas de $\beta \geq \alpha$. En particulier $\langle F, G \rangle_\beta = \langle F, G \rangle_\alpha$ pour $\beta \geq \alpha$.*

En effet les orbites de Γ_α sur $S_\beta - S_\alpha$ ont pour ordre des puissances non nulles de p .

On définit donc, pour $F, G \in \mathcal{S}^\alpha$:

$$\langle F, G \rangle = \langle F, G \rangle_\alpha = \langle F, G \rangle_\beta \quad (\beta \geq \alpha).$$

La démonstration de la Proposition 4.3 montre par ailleurs :

LEMME 4.6. *Si $F \in \mathcal{S}^\alpha$ et $x \in S_\beta$, ($\beta \geq \alpha$)*

$$T_\ell F(x) = T_\ell^\beta(r_\beta F)(x).$$

où $r_\beta F = F|_{S_\beta}$.

On a donc

PROPOSITION 4.7. *Pour $F, G \in \mathcal{S}^\alpha$,*

$$\langle T_\ell F, G \rangle = \langle F, T_\ell G \rangle.$$

En effet

$$\begin{aligned} \langle T_\ell F, G \rangle &= \langle T_\ell F, G \rangle_\alpha \\ &= \langle T_\ell^\alpha F, G \rangle_\alpha \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après la propriété classique. Noter que l'accouplement $\langle F, G \rangle$ est évidemment très dégénéré sur \mathcal{S}^α .

5

Nous considérons maintenant la relation des constructions précédentes avec le changement de base. Fixons α , et soit $f \in \mathcal{S}_\alpha$ forme propre des opérateurs de Hecke :

$$T_\ell^\alpha f = a_\ell f \quad (\ell \text{ inerte}).$$

On a

$$r_\alpha^\beta T_\ell^\beta j_\alpha^\beta f = a_\ell f, \quad (\beta \geq \alpha)$$

mais ceci n'implique pas, évidemment, que $j_\alpha^\beta f \in \mathcal{S}_\beta$ est forme propre. Soit $h \in \mathcal{S}_\beta$: alors

$$\langle T_\ell^\beta h, f \rangle_\beta = \langle h, T_\ell^\beta f \rangle_\beta$$

où on identifie f à $j_\alpha^\beta f$.

Supposons h invariante par Γ_α ; f l'est évidemment. Alors $T_\ell^\beta f = T_\ell f|_{S_\beta}$ est Γ_α -invariante (Proposition 4.2). On a donc

$$\langle T_\ell^\beta h, f \rangle = \langle h, r_\alpha^\beta T_\ell^\beta f \rangle_\alpha$$

(d'après le Lemme 4.5). Ainsi

$$\begin{aligned} \langle T_\ell^\beta h, f \rangle &= \langle h, T_\ell^\alpha f \rangle_\alpha \\ &= a_\ell \langle h, f \rangle_\alpha = a_\ell \langle h, f \rangle_\beta \end{aligned}$$

Alors $h \mapsto \lambda(h) = \langle h, f \rangle$ est une forme linéaire sur \mathcal{S}_β^α telle que $(T_\ell^\beta)^* \lambda = a_\ell \lambda$ pour tout ℓ inerte ; elle est non-nulle car on peut choisir h dont la restriction à S_α n'est pas orthogonale à f .

On en déduit par dualité :

THÉORÈME 5.1 (Changement de base en degré fini). *Pour tout $\beta \geq \alpha$ il existe $f_\beta \in \mathcal{S}_\beta^\alpha$ telle que*

$$T_\ell^\beta f_\beta = a_\ell f_\beta \quad (\ell \text{ inerte}).$$

Comme on l'a vu à la fin du §3, ceci résulte du changement de base de Langlands [1] (et Saito, Shintani) ; on notera cependant que la démonstration présente (en caractéristique p , et pour les ℓ inertes) donne un argument **direct** pour l'existence de f_β .

Nous terminons sur le **problème** suivant. Partant de la forme propre $f \in \mathcal{S}_\alpha$, nous avons construit, pour tout β , une forme $f_\beta \in \mathcal{S}_\beta^\alpha$, forme propre des T_ℓ^β pour la famille de valeurs propres (a_ℓ) . L'espace \mathcal{S}^α étant linéairement compact, une sous-suite des formes $(f_\beta)_\beta$ converge vers une forme propre $f \in \mathcal{S}^\alpha$ qui est forme propre des T_ℓ . Mais nous ne savons pas montrer qu'il existe une limite non nulle. Le problème est évidemment d'obtenir une suite (f_β) telle que (pour quelque β_0 fixe) $f_\beta|_{S_{\beta_0}} \neq 0$ pour tout β . Or l'argument de dualité utilisé dans la démonstration du Théorème 5.1 ne garantit pas que la forme $f_\beta \in \mathcal{S}_\beta^\alpha$ obtenue a une restriction non nulle à S_α . On aimerait évidemment — peut-être sous des conditions convenables relatives à la famille (a_ℓ) — obtenir une forme propre $F \in \mathcal{S}^\alpha$ pour les opérateurs « infinis » T_ℓ .

On peut cependant obtenir ainsi, partant de $f \in \mathcal{S}_\alpha$, une forme propre généralisée $F \in \mathcal{S}^\alpha$, au sens suivant. Revenons à l'argument précédent. On a considéré f comme une forme linéaire sur \mathcal{S}_β^α , associée à la valeur propre a_ℓ . Considérons l'espace propre généralisé

$$\bigcup_n \ker(((T_\ell^\beta)^* - a_\ell)^n)$$

de $(T_\ell^\beta)^*$ dans $(\mathcal{S}_\beta^\alpha)^*$. Il est en dualité parfaite avec l'espace propre généralisé de T_ℓ^β dans \mathcal{S}_β^α . Il existe donc une forme propre généralisée $h_\beta \in \mathcal{S}_\beta^\alpha$ telle que $\langle h, f \rangle \neq 0$; en particulier $h|_{S_\alpha} \neq 0$.

Puisque l'espace $\mathcal{S}^\alpha = \varprojlim \mathcal{S}_\beta$ est linéairement compact, une sous-suite des h_β donne une forme $F \in \mathcal{S}^\alpha$ de même restriction à S_α . (Par ailleurs l'argument précédent permet d'obtenir une forme propre généralisée simultanée pour les T_ℓ). On a donc :

PROPOSITION 5.2. *Il existe $F \in \mathcal{S}^\alpha$, non nulle, telle que, pour tout $\beta \geq \alpha$, $F_\beta = F|_{S_\beta}$ soit forme propre généralisée des T_ℓ^β , pour les valeurs propres (a_ℓ) .*

D'après le Lemme 4.6, $T_\ell - a_\ell$ est donc « localement nilpotent », mais le degré de nilpotence dépend a priori de β .

Références

- [1] R.P. LANGLANDS, *Base change for $GL(2)$* , Annals of Math. Studies, Princeton U. Press, 1980.
- [2] J.- P. Serre, *Cohomologie des groupes discrets*, in Annals of Math. Studies 70, Princeton U. Press, 1971.
- [3] M.-F. VIGNÉRAS, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Springer LN 800, 1980.