HAL
open science

Stéréologie d'objets 3-D à partir de leurs projections 2-D. Application aux processus de cristallisation.

Benoit Presles, Johan Debayle, Jean-Charles Pinoli

To cite this version:

Benoit Presles, Johan Debayle, Jean-Charles Pinoli. Stéréologie d'objets 3-D à partir de leurs projections 2-D. Application aux processus de cristallisation.. Orasis, Congrès des jeunes chercheurs en vision par ordinateur, Jun 2013, Cluny, France. hal-00829317

HAL Id: hal-00829317

https://hal.science/hal-00829317v1

Submitted on 3 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stéréologie d'objets 3-D à partir de leurs projections 2-D. Application aux processus de cristallisation.

B. Presles[1] J. Debayle[1] J.C. Pinoli[1]

[1] École Nationale Supérieure des Mines, LGF UMR CNRS 5307
Institut Mines-Télécom

158 cours Fauriel, 42023 Saint-Étienne
{presles, debayle, pinoli}@emse.fr

Résumé

L'objectif de cet article est de présenter une nouvelle méthode de stéréologie projective permettant d'estimer la taille et la forme d'un objet convexe 3-D à partir des ses projections 2-D. Dans ce but, des mesures géométriques et morphométriques des ombres projetées de l'objet 3-D sont tout d'abord réalisées. Ensuite, les valeurs des paramètres de taille et de forme de l'objet 3-D sont estimées par la méthode du maximum de vraisemblance. Après divers tests de validation et de comparaison sur des objets convexes 3-D synthétiques, la méthode proposée est appliquée sur un cas réel pour estimer la distribution volumique 3-D de particules durant un processus de cristallisation.

Mots Clef

Analyse de forme, Maximum de vraisemblance, Fonction de densité de probabilité, Stéréologie projective, Diagrammes de forme.

1 Introduction

Déterminer les dimensions réelles d'un objet 3-D à partir de ses projections 2-D est une tâche difficile. D'une part, les méthodes stéréoscopiques [2, 4] nécessitent différentes étapes que sont la calibration (i.e. la détermination de la configuration géométrique entre les capteurs), la détection et l'appariement de primitives et enfin la reconstruction 3-D. Dans le cas où les projections 2-D correspondent à des vues par un seul capteur d'un objet 3-D en mouvement (aléatoire), ces méthodes ne sont pas adaptées. D'autre part, les méthodes de stéréologie projective classique permettent d'obtenir des mesures géométriques 3-D à partir d'un ensemble de mesures réalisées sur les projections 2-D. Ces méthodes [16, 13, 18, 19, 15] nécessitent des hypothèses sur la forme de l'objet 3-D étudié, i.e. le type d'objet (par exemple cube, ellipsoïde, ...) et son anisotropie (par exemple l'élongation). Une information *a priori* sur les facteurs de forme de l'objet 3-D est donc nécessaire pour une estimation précise de la taille de l'objet.

Par conséquent, ce travail a pour but d'introduire une nouvelle méthode de stéréologie projective estimant à la fois la taille et la forme de l'objet convexe 3-D à partir de ses projections 2-D.

Cet article introduit tout d'abord (section 2) la méthode proposée basée sur l'estimation du maximum de vraisemblance des distributions géométriques et morphométriques d'objets 3-D. La section suivante présente des résultats sur des objets 3-D synthétiques (c'est-à-dire simulés sur ordinateur), et compare l'approche proposée à une méthode de stéréologie projective classique. Finalement, la méthode est appliquée à un processus de cristallisation fournissant une granulométrie 3-D des particules.

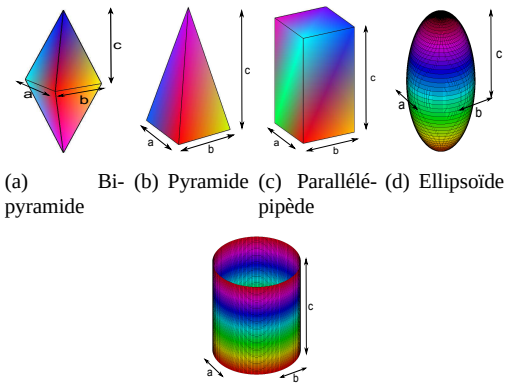
2 La méthode stéréologique proposée

Dans cet article, la méthode proposée est introduite et étudiée pour des objets convexes 3-D élémentaires (modèles) tels que des ellipsoïdes, des cylindres, des parallélépipèdes, des pyramides et des bi-pyramides. Chaque objet de ce type, noté CO, est défini par trois paramètres de taille, notés a, b, c et par conséquent deux paramètres de forme $\alpha_1 = b/a, \alpha_2 = c/a$ reflétant l'anisotropie de l'objet 3-D (Figure 1). Les hypothèses sur l'objet sont les suivantes : CO est connu, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \geq 1$. L'objectif de la méthode proposée est d'estimer les valeurs des paramètres inconnus (a et α_2) de l'objet 3-D à partir de n projections orthographiques aléatoires.

Il est à noter que la méthode est généralisable à des objets convexes 3-D plus complexes, l'ensemble des descripteurs géométriques et morphométriques exposés par la suite s'appliquant à tout ensemble convexe [10, 11, 12].

2.1 Distribution des aires projetées

Soit (CO, a, α_2) un objet modèle 3-D de type CO (ellipsoïde, cylindre, parallélépipède, pyramide ou bi-pyramide) de paramètre de taille a et de paramètre de forme α_2. Soit A la variable aléatoire continue à valeurs réelles positives, appelée 'aire projetée', associée à une projection 2-D de l'objet 3-D (CO, a, α_2).



(a) Bi-pyramide (b) Pyramide (c) Parallélé-pipède (d) Ellipsoïde

(e) Cylindre

FIGURE 1 – Objets convexes 3-D élémentaires.

La distribution d'aire projetée, notée f^A_{CO,a,α_2}, est alors définie comme la fonction de densité de probabilité de A [6]. Pour des objets 3-D simples, tels que le prolate ou l'oblate, il est possible de déterminer analytiquement f^A_{CO,a,α_2} [17]. Cependant, des méthodes numériques doivent être utilisées pour des objets 3-D plus complexes. Dans ce but, pour un objet convexe 3-D (CO, a, α_2), N ($N = 1,000,000$) rotations aléatoires, suivant une loi uniforme, sont réalisées. Ensuite, pour chaque rotation, la projection orthographique de l'objet est réalisée et son aire est calculée. La distribution des aires projetées est donc calculée à partir des N valeurs d'aires projetées tel un histogramme normalisé. La figure 2 montre les distributions des aires projetées f^A_{CO,a,α_2} pour des parallélépipèdes de paramètres $a = 10$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

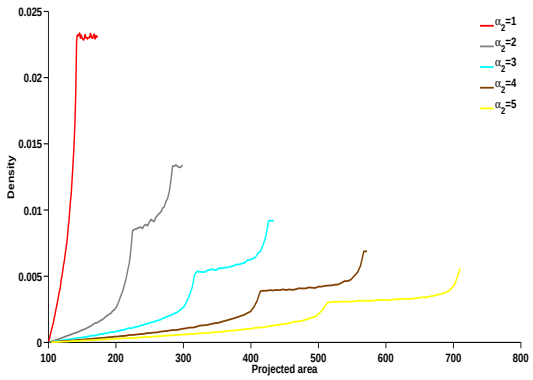


FIGURE 2 – Distributions des aires projetées pour des parallélépipèdes de paramètres $a = 10$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Les oscillations présentes sur les courbes sont probablement dûes au nombre limité de projections aléatoires ($N = 1,000,000$).

2.2 Distribution des formes projetées

Les diagrammes de formes sont des représentations dans le plan Euclidien introduites dans [14] pour étudier la forme des ensembles compacts 2-D [3, 10, 11, 12]. Un tel ensemble est représenté par un point dans le diagramme de forme dont les coordonnées sont des fonctionnelles morphométriques invariantes par similitude (par conséquent, elles ne dépendent donc pas de la taille globale de l'ensemble). Ces fonctionnelles morphométriques sont définies comme des ratios normalisés (à valeurs dans $[0, 1]$) entre deux fonctionnelles géométriques dont l'aire A, le périmètre P, les rayons r et R des disques inscrits et circonscrits respectivement, et les diamètres de Feret minimum et maximum ω and d. Ces ratios sont dimensionnellement sans unité. La normalisation (par un scalaire) dépend directement de l'inégalité géométrique associée [3, 12]. Par exemple, les ratios $4\pi\,\mathrm{A}\,/\,\mathrm{P}^2$, $\mathrm{r}\,/\,\mathrm{R}$, $\omega\,/\,\mathrm{d}$ and $4\,\mathrm{R}\,/\,\mathrm{P}$ sont des fonctionnelles morphométriques désignant respectivement la rondeur, la circularité, la constance de diamètre et la finesse de l'objet 2-D étudié.

Soient (M_1, M_2) deux fonctionnelles morphométriques particulières à valeurs dans $[0, 1]^2$. Un diagramme de formes $\mathcal{D}$ est représenté par le domaine planaire $[0, 1]^2$ (dont les axes de coordonnées représentent les fonctionnelles morphométriques M_1 et M_2) où chaque ensemble compact connexe S se projette en un point (x, y).

Mathématiquement, un diagramme de formes $\mathcal{D}$ est obtenu de la manière suivante :

$$\mathcal{D} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathbb{E}^2) & \rightarrow & [0,1]^2 \\ S & \mapsto & (x, y) \end{array} \right. \tag{1}$$

où $\mathcal{K}(\mathbb{E}^2)$ désigne la famille des ensembles compacts du plan Euclidien 2-D $\mathbb{E}^2$.

En utilisant les différentes fonctionnelles morphométriques, vingt-deux diagrammes de formes peuvent être définis. Une étude comparative détaillée a été réalisée dans le but d'analyser les propriétés de ces différents diagrammes de forme [10, 11, 12] : le diagramme de forme noté $\mathcal{D}_{\omega,\mathrm{A},\mathrm{d}}$ a été retenu. Il est défini par l'application suivante :

$$\mathcal{D}_{\omega,\mathrm{A},\mathrm{d}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathbb{E}^2) & \rightarrow & [0,1]^2 \\ S & \mapsto & \left(\frac{\omega}{\mathrm{d}}, \frac{4\,\mathrm{A}}{\pi\,\mathrm{d}^2}\right) \end{array} \right. \tag{2}$$

Les fonctionnelles morphométriques $\frac{\omega}{\mathrm{d}}$ et $\frac{4\,\mathrm{A}}{\pi\,\mathrm{d}^2}$ désignent respectivement la constance de diamètre et la rondeur. La figure 3 illustre ce diagramme de formes où différents ensembles compacts élémentaires sont représentés. Ce diagramme de formes $\mathcal{D}_{\omega,\mathrm{A},\mathrm{d}}$ est donc utilisé pour définir la distribution des formes projetées d'un objet 3-D.

Soit (CO, a, α_2) un objet 3-D modèle de type CO de paramètres a (taille) et α_2 (forme). Puisque les diagrammes de forme sont invariants par similitude, le descripteur proposé est également invariant par ce type de transformations et par conséquent il est indépendant du paramètre de taille a.

Soit $M = (M^1, M^2) = (\frac{\omega}{\mathrm{d}}, \frac{4\,\mathrm{A}}{\pi\,\mathrm{d}^2})$ le vecteur aléatoire continu appelé 'fonctionnelles morphométriques projetées' associé à une projection 2-D de l'objet (CO, a, α_2). La distribution de formes projetées, notée f^M_{CO,α_2} est définie comme la fonction de densité de probabilité conjointe de M^1 et M^2.

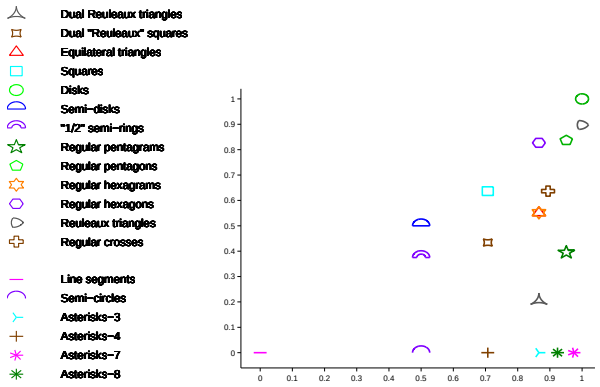


FIGURE 3 – Représentation de plusieurs ensembles compacts dans le diagramme de formes $\mathcal{D}_{\omega,\mathrm{A},\mathrm{d}}$. L'axe horizontal (resp. vertical) représente la valeur $\frac{\omega}{\mathrm{d}}$ (resp. $\frac{4\,\mathrm{A}}{\pi\,\mathrm{d}^2}$).

Déterminer analytiquement f^M_{CO,α_2} pour tous les objets modèles 3-D est très difficile. Cependant, il est possible de le calculer numériquement. Dans ce but, pour un objet modèle 3-D (CO, a, α_2), N $(N = 10,000,000)$ rotations 3-D aléatoires (suivant une loi uniforme) sont réalisées. Ensuite, pour chaque rotation, la projection orthographique de l'objet est effectuée et les valeurs des fonctionnelles morphométriques M^1 et M^2 sont calculées. La distribution de formes projetées f^M_{CO,α_2} (indépendante de a) est alors définie comme la fonction de densité de probabilité conjointe des N fonctionnelles morphométriques M^1 et M^2.
La figure 4 montre la distribution f^M_{CO,α_2} calculée pour la pyramide avec $\alpha_2 = 2$.

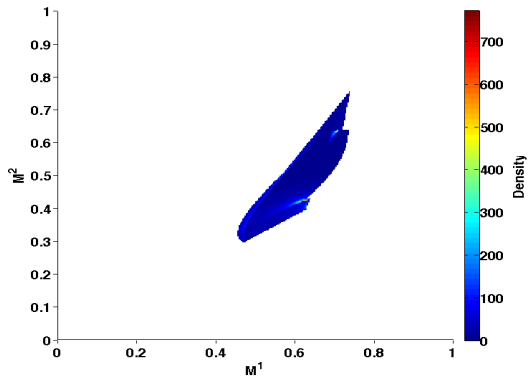


FIGURE 4 – Distribution de formes projetées de l'objet 3-D modèle 'pyramide' avec les paramètres de forme $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 2$.

2.3 Estimation du maximum de vraisemblance

Soit A la variable aléatoire continue 'aire projetée' et $M = (M^1, M^2) = (\omega\,/\,\mathrm{d}, 4\,\mathrm{A}\,/\pi\,\mathrm{d}^2)$ le vecteur aléatoire continu 'fonctionnelles morphométriques projetées' associés à la projection 2-D d'un objet convexe 3-D (CO, a, α_2) de taille et forme inconnues.

Soient $(A_1, M_1), ..., (A_n, M_n)$ n réalisations indépendantes $(n \in \mathbb{N}^*)$ de (A, M). La vraisemblance du paramètre de taille a et du paramètre de forme α_2 en rapport avec ces n réalisations est définie comme :

$$L_{CO}(a, \alpha_2) = L^2_{CO}(\alpha_2)\frac{L^1_{CO,\alpha_2}(a)}{\int\limits_{R^*_+} L^1_{CO,\alpha_2}(v)\mathrm{d}v} \qquad (3)$$

où $L^2_{CO}(\alpha_2) = \prod_{i=1}^n f^M_{CO,\alpha_2}(M_i)$ et $L^1_{CO,\alpha_2}(a) = \prod_{i=1}^n f^A_{CO,a,\alpha_2}(A_i)$.

$L^2_{CO}(\alpha_2)$ est la vraisemblance de α_2 (forme) en rapport avec les n réalisations $(M_1, ..., M_n)$ et $\frac{L^1_{CO,\alpha_2}(a)}{\int\limits_{R^*_+} L^1_{CO,\alpha_2}(v)\mathrm{d}v}$ est la vraisemblance conditionnelle de a (taille) sachant α_2 (forme) en rapport avec les n réalisations $(A_1, ..., A_n)$.

Ainsi, le maximum de vraisemblance du paramètre de taille a et du paramètre de forme α_2 peut être exprimé par :

$$(\hat{a}, \hat{\alpha_2}) = \underset{(a,\alpha_2)\in]0;+\infty[\times[1;+\infty[}{\arg\max} L_{CO}(a, \alpha_2) \qquad (4)$$

3 Evaluation de la méthode proposée

3.1 Simulation sur des objets synthétiques

Dans le but d'évaluer la performance de la méthode proposée, des tests sont réalisés sur des objets synthétiques non bruités (CO, a, α_2) de type CO, de paramètre de taille a et de paramètre de forme α_2. Pour un objet 3-D, n $(n \in \mathbb{N}^*)$ projections orthographiques aléatoires (suivant une loi uniforme) sont générées et la valeur du vecteur (a, α_2), notée $(\hat{a}, \hat{\alpha_2})$, est estimée à partir de ces n projections en utilisant l'équation 4.
Pour quantifier la performance de la méthode proposée, l'erreur relative moyenne entre les valeurs réelles de (a, α_2) et les valeurs estimées de (a, α_2) $(\{(\hat{a}, \hat{\alpha_2})^i\}_{i\in[\![1,m]\!]}$ où $(\hat{a}, \hat{\alpha_2})^i$ désigne la i^{me} valeur estimée de $(a, \alpha_2))$ est calculée en fonction du nombre de projections n :

$$RME_n = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{|a - \hat{a}^i|}{a} + \frac{|\alpha_2 - \hat{\alpha_2}^i|}{\alpha_2}\right) \qquad (5)$$

où $|.|$ désigne la valeur absolue et $m = 10000$.
L'erreur a été quantifiée en sommant les erreurs relatives entre a et $\hat{a}$, et α_2 et $\hat{\alpha_2}$, car les paramètres a et α_2 ne sont pas homogènes dimensionnellement.
Les figures 5, 6, 7, 8 et 9 montrent l'erreur relative moyenne RME_n en fonction de $n \in \{1, 2, ..., 20, 50, 100, 200, 500\}$ pour plusieurs objets 3-D modèles avec différentes valeurs pour le paramètre de forme $(\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\})$ mais même valeur du paramètre de taille $a = 10$.
Ces résultats montrent que quelque soit l'objet convexe 3-D, plus le nombre de projections n augmente, meilleure

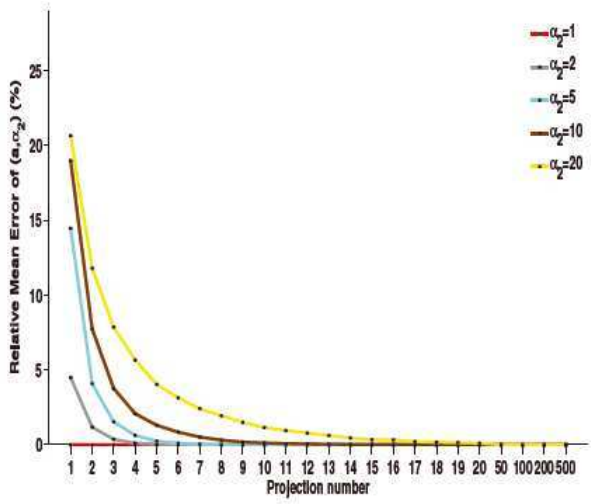


FIGURE 5 – Erreur relative moyenne pour des ellipsoïdes de paramètres $a = 10$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$.

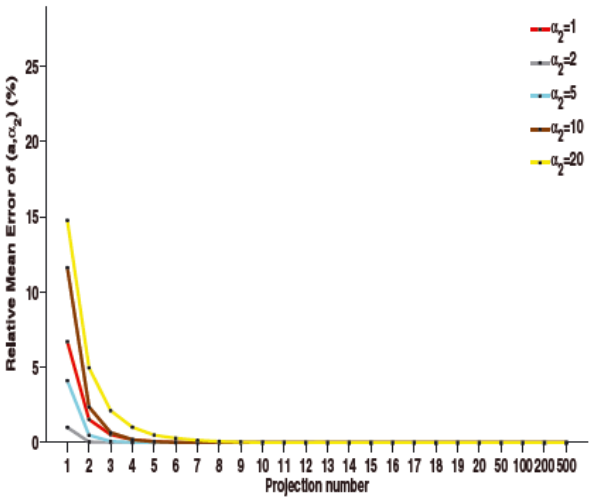


FIGURE 6 – Erreur relative moyenne pour des cylindres de paramètres $a = 10$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$.

est l'estimation de (a, α_2). De plus, plus α_2 augmente (i.e. plus la forme 3-D est anisotrope), plus il est difficile d'estimer les valeurs de (a, α_2).
La robustesse de l'approche vis-à-vis d'objets bruités (i.e. soumis à de légères déformations) a été abordée dans [5].

3.2 Comparaison avec la stéréologie classique

En stéréologie projective classique, le volume d'un objet convexe 3-D peut être estimé de la manière suivante [16] :

$$\hat{V} = \overline{L_3} \times \overline{A'} \tag{6}$$

où $\overline{L_3}$ désigne la longueur moyenne d'intercept à partir de n droites aléatoires et $\overline{A'}$ désigne l'aire moyenne projetée. Sans hypothèse sur la forme de l'objet convexe 3-D, il n'est

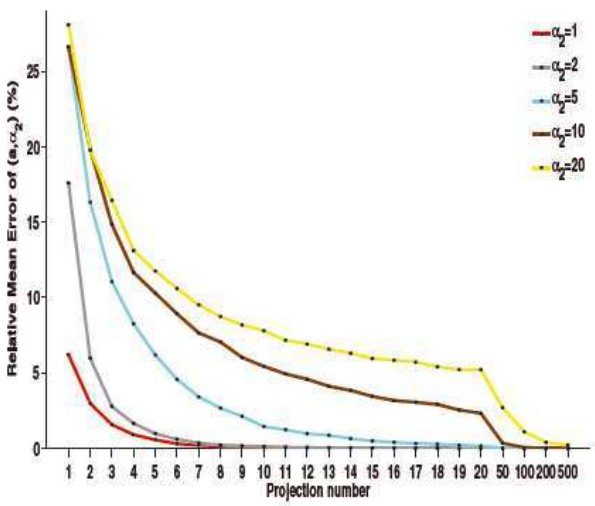


FIGURE 7 – Erreur relative moyenne pour des bi-pyramides de paramètres $a = 10$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$.

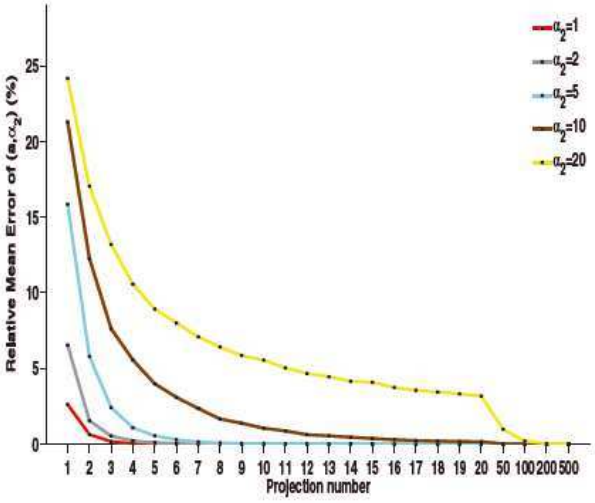


FIGURE 8 – Erreur relative moyenne pour des parallélépipèdes de paramètres $a = 10$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$.

pas possible en stéréologie projective d'estimer le volume à partir de mesures réalisées uniquement sur les projections 2-D. Cependant, si la valeur du paramètre de forme α_2 est connue, alors il est possible d'exprimer $\overline{L_3}$ en fonction de de la hauteur projetée moyenne $\overline{H'}$ (i.e. le diamètre de Feret moyen des projections). Par exemple, pour une sphère de rayon r, $\overline{L_3} = \frac{2}{3}\overline{H'}$, et par conséquent le volume estimé $\hat{V}$ de l'objet est :

$$\hat{V} = \frac{2}{3}\overline{H'} \times \overline{A'} \tag{7}$$

Sous ces hypothèses sur la forme des objets 3-D, cette méthode classique peut être comparée à celle proposée dans cet article (Figures 10 et 11).
La méthode proposée fournit de meilleurs résultats que la méthode classique. De plus, il n'est pas nécessaire de faire

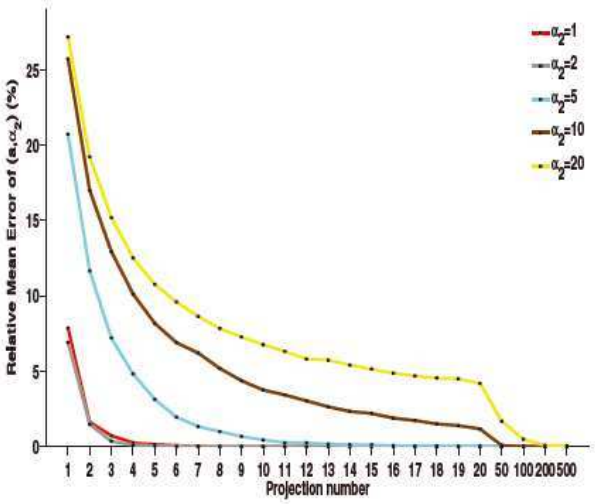


FIGURE 9 – Erreur relative moyenne pour des pyramides de paramètres $a = 10$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$.

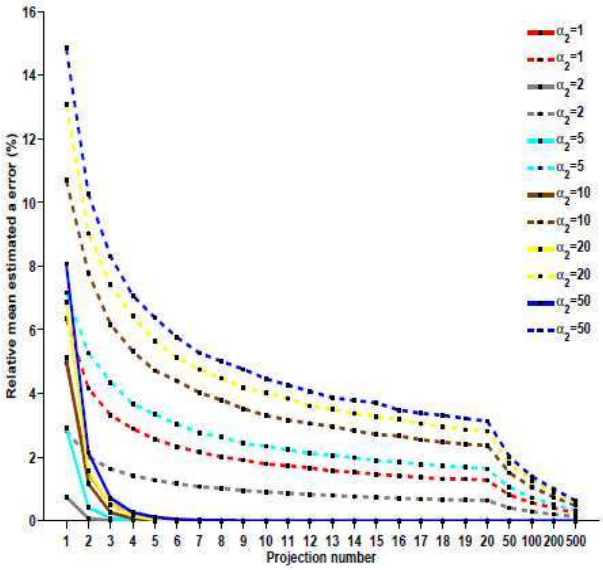


FIGURE 10 – Erreur relative moyenne pour des cylindres de paramètres $a = 10$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$. Lignes discontinues : méthode classique ; lignes continues : méthode proposée.

d'hypothèses sur la valeur du paramètre de forme α_2 (i.e. l'anisotropie) de l'objet convexe 3-D, ce qui est un avantage considérable par rapport à la méthode classique.

4 Application aux processus de cristallisation

La cristallisation est un procédé physico-chimique largement utilisé dans l'industrie comme procédé de séparation et purification, ayant pour objectif de produire des solides avec des propriétés spécifiques. Actuellement, les spécifications des produits, notamment issues de l'industrie

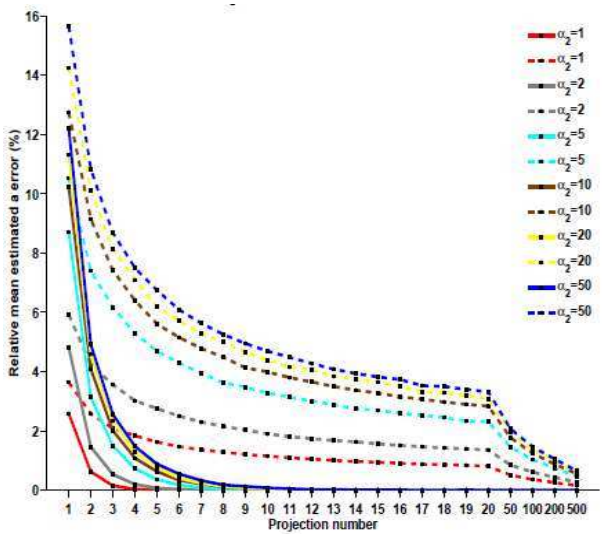


FIGURE 11 – Erreur relative moyenne pour des parallépipèdes de paramètres $a = 10$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$. Lignes discontinues : méthode classique ; lignes continues : méthode proposée.

pharmaceutique sont de plus en plus exigeantes de par les consommateurs et de par la compétition internationale. En particulier, les propriétés qui concernent la taille et la forme des cristaux sont connues pour avoir un impact considérable sur la qualité finale des médicaments (la biodisponibilité, la stabilité pendant le stockage, la facilité de manipulation durant le procédé,...). Ainsi, il s'avère nécessaire de contrôler en temps réel la taille et la forme des particules lors d'un processus de cristallisation. C'est pourquoi les techniques de caractérisation géométrique *in situ* sont privilégiées [9, 7, 8].

A partir d'images acquises par une caméra *in situ* durant le processus de cristallisation, il est possible d'identifier et de suivre chaque particule sur une séquence d'images (suivant des orientations différentes). En effet, à l'aide d'un algorithme de segmentation (identification des particules) et de suivi des particules, il est possible d'obtenir différentes projections 2-D d'un même cristal. La segmentation des particules a été réalisée [1] sur les images à niveaux de gris de la séquence par reconnaissance et regroupement des coins suivant des contraintes géométriques spécifiques. Cette méthode permet notamment de détecter des cristaux en superposition et se montre très performante en comparaison à une segmentation manuelle. L'objectif est alors de déterminer les distributions de taille et forme 3-D des cristaux à partir de ces projections 2-D. Sous l'hypothèse que les cristaux peuvent être assimilés à un ou plusieurs types d'objet modèle (oblate, cylindre...), la méthode proposée permet alors de déterminer le volume des particules à partir de leurs projections.

La figure 12 montre une image d'oxalate d'ammonium durant un processus de cristallisation.

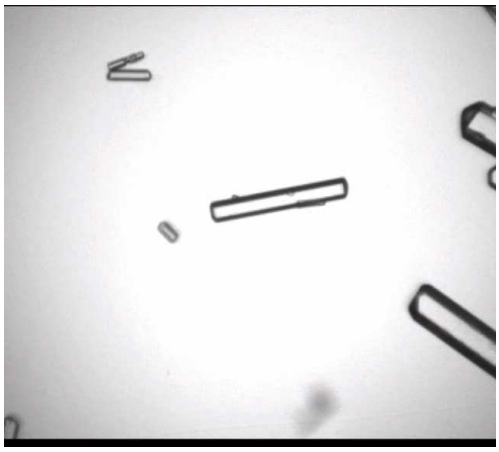


FIGURE 12 – Image de particules d'oxalate d'ammonium durant un processus de cristallisation (image de taille 640×480 pixels avec une résolution spatiale de $4\mu m^2$ par pixel).

Ces cristaux peuvent être modélisés par des parallélépipèdes 3-D. Par conséquent, la méthode stéréologique proposée permet de déterminer la granulométrie 3-D (considérant à la fois la taille et la forme des objets) à partir des cristaux 2-D projetés issus de la séquence vidéo. La figure 13 montre la granulométrie 3-D (volume en fonction du nombre de particules) des cristaux durant une période de 2 secondes (50 images acquises) après 15mn de cristallisation. La méthode proposée fournissant ce type de quantifi-

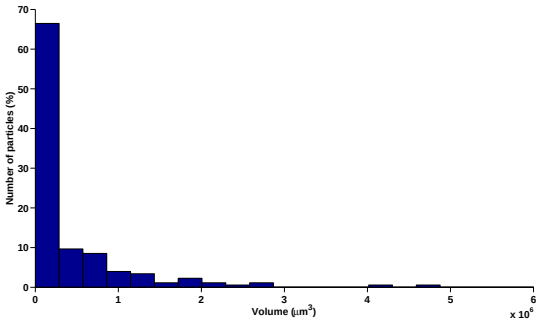


FIGURE 13 – Granulométrie 3-D de particules d'oxalate d'ammonium après 15mn de cristallisation.

cation est très prometteuse dans le sens où, contrairement aux méthodes stéréologiques classiques, les hypothèses sur la forme des cristaux sont assez faibles.

5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, une nouvelle méthode de stéréologie projective a été développée. Cette méthode permet d'estimer à la fois la taille et la forme d'un objet convexe 3-D à partir de ses projections 2-D. Il a été montré que la méthode proposée fournit de meilleurs résultats que la méthode de stéréologie classique. De plus, il n'est pas nécessaire avec cette nouvelle méthode de faire des hypothèses fortes sur la forme des objets 3-D étudiés. Finalement, la méthode stéréologique proposée a été utilisée sur un cas applicatif réel pour estimer la granulométrie 3-D de particules d'oxalate d'ammonium durant un processus de cristallisation.
Actuellement, les auteurs étudient la caractérisation d'objets 3-D plus complexes tout en supprimant l'hypothèse $\alpha_1 = 1$.

Références

[1] O. Ahmad, J. Debayle, and J. C. Pinoli. A geometric-based method for recognizing overlapping polygonal-shaped and semi-transparent particles in gray tone images. *Pattern Recognition Letters*, 32(15) :2068–2079, 2011.

[2] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge University Press, 2000.

[3] M. A. Hernández Cifre, G. Salinas, and S. Segura Gomis. Complete systems of inequalities. *Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 2(1-10) :1–12, 2001.

[4] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka, and S. S. Sastry. *An invitation to 3D vision. From images to geometrical models.* Springer, 2005.

[5] B. Presles. *Caractérisation géométrique et morphométrique 3-D par analyse d'images 2-D de distributions dynamiques de particules convexes anisotropes. Application aux processus de cristallisation.* PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, France, 2010.

[6] B. Presles, J. Debayle, A. Cameirao, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Volume estimation of 3D particles with known convex shapes from its projected areas. In *Image Processing Theory Tools and Applications (IPTA), 2010 2nd International Conference on*, pages 399–404, 2010.

[7] B. Presles, J. Debayle, G. Fevotte, and J. C. Pinoli. A novel image analysis method for in-situ monitoring the particle size distribution of batch crystallization processes. *Journal of Electronic Imaging*, 19(3) :1–7, 2010.

[8] B. Presles, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Size and shape estimation of 3-D convex objects from their 2-D projections. Application to crystallization processes. *Journal of Microscopy*, 248(2) :140–155, 2012.

[9] B. Presles, J. Debayle, A. Rivoire, G. Févotte, and J. C. Pinoli. Monitoring the particle size distribution using image analysis during batch crystallization processes. In *9th IEEE/SPIE International Conference on Quality Control by Artificial Vision (QCAV)*, Wels, Austria, May 2009.

[10] S. Rivollier, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Shape diagrams for 2D compact sets - Part I : analytic convex

sets. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2-3) :1–27, 2010.

[11] S. Rivollier, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Shape diagrams for 2D compact sets - Part II : analytic simply connected sets. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2-4) :1–21, 2010.

[12] S. Rivollier, J. Debayle, and J. C. Pinoli. Shape diagrams for 2D compact sets - Part III : convexity discrimination for analytic and discretized simply connected sets. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 7(2-5) :1–18, 2010.

[13] J. C. Russ and R. T. Dehoff. *Practical stereology (second edition)*. Springer, 2000.

[14] L. A. Santaló. Sobre los sistemas completos de desigualdades entre tres elementos de una figura convexa plana. *Mathematicae Notae*, 17 :82–104, 1961.

[15] P. Stroeven, J. Hu, and Z. Guo. Shape assessment of particles in concrete technology : 2D image analysis and 3D stereological extrapolation. *Cement & Concrete Composites*, 31(1) :84–91, 2009.

[16] E. E. Underwood. The stereology of projected images. *Journal of Microscopy*, 95(1) :25–44, 1972.

[17] G. T. Vickers and D. J. Brown. The distribution of projected area and perimeter of convex, solid particles. In *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 457, pages 283–306, February 2001.

[18] D. Wulfsohn, H. J. G. Gundersen, E. B. Vedel Jensen, and J. R. Nyengaard. Volume estimation from projections. *Journal of Microscopy*, 215(2) :111–120, 2004.

[19] D. Wulfsohn, J. R. Nyengaard, H. J. G. Gundersen, and E. B. V. Jensen. Stereology for biosystems engineering. In *International Conference on Agricultural Engineering*, pages 1–8, Leuven, Belgium, 2004.