



**HAL**  
open science

## Effet d'une formulation du nombre de Prandtl turbulent variable sur le transfert de chaleur en canal

Najla El Gharbi, Ryan Blanchard, Rafik Absi, Ahmed Benzaoui, Mohammed El Ganaoui

### ► To cite this version:

Najla El Gharbi, Ryan Blanchard, Rafik Absi, Ahmed Benzaoui, Mohammed El Ganaoui. Effet d'une formulation du nombre de Prandtl turbulent variable sur le transfert de chaleur en canal. Société Française de la Thermique, May 2013, Gerardmer, France. hal-00829156

**HAL Id: hal-00829156**

**<https://hal.science/hal-00829156>**

Submitted on 3 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Effet d'une formulation du nombre de Prandtl turbulent variable sur le transfert de chaleur en canal

Najla EL GHARBI<sup>1, 4\*</sup>, Ryan BLANCHARD<sup>2</sup>, Rafik ABSI<sup>3</sup>, Ahmed BENZAOUTI<sup>4</sup>, Mohammed EL GANAOU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université de Lorraine, FJV Méca. Energ. Génie des Procédés/Lermab, IUT Henri Poincaré de Longwy, 186 rue de Lorraine, 54400 Longwy - Cosnes et Romain, France

<sup>2</sup>Virginia Polytechnic Institute and State University, 101 Randolph Hall, Blacksburg, Virginia, 24061, USA

<sup>3</sup>EBI, Inst. Polytech. St-Louis, Université Paris Grand Ouest (UPGO), 32 Boulevard du Port, 95094, Cergy-Pontoise Cedex, France

<sup>4</sup>Université des Sciences et Technologies Houari Boumediene (USTHB), Faculté de Physique, PB 32 El Alia Bab Ezzouar 16111 Alger, Algérie

\* (auteur correspondant : najla.el-gharbi@univ-lorraine.fr)

**Résumé** - Le nombre de Prandtl turbulent est une grandeur physique qui joue un rôle important dans le calcul du transfert de chaleur turbulent. Par conséquent, son évaluation est assez importante. Il est souvent considéré comme constant dans de nombreuses études. On outre, plusieurs travaux ont montré que ce nombre varie de manière significative en couche limite turbulente. Nous évaluerons dans le cadre de ce travail l'effet d'un nombre de Prandtl turbulent dépendant de la distance à la paroi sur les résultats de simulations.

Nous considérons comme cas test, l'écoulement dans un canal. Nous utilisons le modèle turbulent SST  $k-\omega$  (Menter 1992). La validation est faite par des données de simulation numérique directe DNS pour des nombres de Reynolds de frottement variant de 150 à 1020. Les résultats montrent que la prise en compte du nombre de Prandtl turbulent dépendant de la distance à la paroi, améliore la prédiction du profil de température.

## Nomenclature

$A, A_i, B, C, C_{B1}, C_{B2}, C_v$  coefficients  
 $CFD$  Computational Fluid Dynamics  
 $DNS$  Direct Numerical Simulation  
 $C_p$  capacité massique,  $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$   
 $k$  énergie cinétique turbulente,  $m^2 \cdot s^{-2}$   
 $l_m$  longueur de mélange, m  
 $Pe_t$  nombre de Peclet  
 $Pr$  nombre de Prandtl  
 $q$  flux de chaleur,  $W \cdot m^{-2}$   
 $Re$  nombre de Reynolds  
 $SST$  Shear Stress Transport  
 $T$  température, K  
 $TKE$  Turbulent Kinetic Energy,  $m^2 \cdot s^{-2}$   
 $u$  vitesse horizontale,  $m \cdot s^{-1}$   
 $UDF$  User Define Function  
 $UDS$  User Define Scalar  
 $v$  vitesse verticale,  $m \cdot s^{-1}$

$y$  direction verticale, m  
*Symboles grecs*  
 $\alpha$  diffusivité,  $m^2 \cdot s^{-1}$   
 $\delta$  demi hauteur du canal, m  
 $\kappa$  constante de Karman  
 $\mu$  viscosité dynamique,  $N \cdot s \cdot m^{-2}$   
 $\nu$  viscosité cinématique,  $m^2 \cdot s^{-1}$   
 $\rho$  masse volumique,  $kg \cdot m^{-3}$   
 $\omega$  taux de dissipation,  $s^{-1}$   
*Indices et exposants*  
+ valeurs adimensionnées  
' propriétés fluctuantes  
 $\tau$  frottement  
t turbulente  
w paroi

## 1. Introduction

La modélisation du transfert de chaleur dans les couches limites turbulentes est d'une grande importance. On le trouve dans une large gamme de problèmes d'ingénierie, tel que les

échangeurs de chaleur, les turbines à gaz, les réacteurs nucléaires...etc. Le nombre de Prandtl turbulent est indispensable dans les calculs des transferts de chaleur. Il est défini comme le rapport entre la viscosité turbulente et la diffusivité turbulente :

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} \quad (1)$$

Ce nombre est souvent considéré égal à 1 selon l'analogie de Reynolds [1] qui estime une analogie complète entre transfert de chaleur et transfert de quantité de mouvement. Alors que l'expérience de Kays et Crawford [2] montre pour un fluide dont le nombre de Prandtl laminaire est compris entre 0,7 à 5,9,  $Pr_t$  prend la valeur de 1 mais plus précisément dans la région logarithmique. En région proche paroi solide, les expériences ainsi que des calculs en DNS menées par d'autres chercheurs (Reynolds et al. [3], Blackwell et al. [4], Gibson et Verriopoulous [5], Hollingsworth et al. [6], Kawamura et al. [7], Abe et Kawamura [8]) montrent que l'hypothèse du nombre de Prandtl turbulent constant ne pouvait pas refléter adéquatement le phénomène physique. Ils ont trouvé qu'il varie entre 0,7 et 0,9, avec une prépondérance autour de 0,85. A la suite de cela, Kays et Crawford [2] ont lissé les données expérimentales pour la couche limite et ont données une expression pour  $Pr_t$ . Dans la littérature, on trouve d'autres corrélations pour prévoir le nombre de Prandtl turbulent pour de faibles nombres de Prandtl moléculaire. On cite les travaux de ; Rotta [9], Simpson et al. [10], Cebeci [11], Yakhot et al. [12].

Pour notre étude on considère l'expression de Kays et Crawford [2] et on l'implémente dans le code de calcul Fluent [13] qui, à l'origine prend  $Pr_t$  comme une constante. Le cas d'un écoulement d'air dans un canal est considérée (Fig.1). La simulation est faite en 2D. Le schéma numérique, le maillage ainsi que la validation de la méthode de calcul sont détaillés dans les références [14, 15,16].

## 2. Les équations de transfert de chaleur

Pour un écoulement pleinement développé, il est possible de simplifier l'équation de l'énergie en une équation différentielle ordinaire [15]:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{u_\tau T_\tau}{\nu \left( \frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_t} \frac{\nu_t}{\nu} \right)} \quad (2)$$

avec:  $u_\tau T_\tau = \frac{q_w}{\rho C_p}$  et  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ .

Comme l'indique l'équation (2), la relation entre le gradient de température et le nombre de Prandtl turbulent inclut le terme de viscosité turbulente qui a fait l'objet de nombreuses recherches alors que le nombre de Prandtl turbulent a souvent été considéré comme constant. L'écriture de l'équation (2) en unité de paroi donne:

$$\frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{1}{Pr^{-1} + Pr_t^{-1} \nu_t^+} \quad (3)$$

où :  $T^+ = \frac{T_w - T}{T_\tau}$ ,  $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$ ,  $Pr = 0.71$  pour un écoulement de l'air

La viscosité turbulente  $\nu_t^+$  peut-être écrite en fonction de  $k^+$ :

$$\nu_t^+ = C_\nu \sqrt{k^+} l_m^+ \quad (4)$$

où  $C_\nu = 0.25$  et  $l_m^+$  est la longueur de mélange donnée par van Driest [17]:

$$l_m^+ = \kappa y^+ \left( 1 - e^{-y^+/A_t^+} \right) \quad (5)$$

avec  $\kappa$  et la constante de Kármán ( $\kappa = 0.41$ ) et  $A_t^+ = 26$

Dans l'équation (4), l'expression de  $k^+$  est donnée par une formulation analytique [18]. Nous utilisons cette formulation pour cette étude. Dans une première phase de notre étude, nous considérerons un nombre de Prandtl turbulent constant et nous analyserons l'effet de la viscosité turbulente sur les résultats de simulation.

### 3. Profils de température avec un nombre de Prandtl turbulent constant

#### 3.1. Une formulation analytique de l'énergie cinétique turbulente

Pour un écoulement turbulent dans un canal, le profil analytique de l'énergie cinétique turbulente donné par l'équation (6), permet de prédire avec précision l'énergie cinétique turbulente [18]:

$$k^+ = B(y^+)^2 e^{\left[-\frac{y^+}{A}\right]} \quad (6)$$

Dans l'équation (6), A et B sont deux paramètres, A = 8 tandis que B est une fonction du nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau$  ( $Re_\tau = \frac{\delta u_\tau}{\nu}$ ) donné par  $B = C_{B1} \ln(Re_\tau) + C_{B2}$  [19], où  $C_{B1}$  et  $C_{B2}$  sont des coefficients. Pour un écoulement isotherme, l'implémentation de l'équation (6) dans Fluent [13] a permis une bonne prédiction du profil de l'énergie cinétique turbulente [16].

Bien que l'équation (6) ait été développée pour le cas isotherme, elle peut bien être appliquée pour le cas non-isothermes [15], pour pouvoir améliorer le profil de l'énergie cinétique turbulente et celui de la température en même temps. L'adaptation de cette équation pour un écoulement non-isotherme est faite via le paramètre B. Ceci passe par l'implémentation de l'équation (6) dans Fluent et par la sélection de la bonne valeur de B pour différentes valeurs de  $Re_\tau$  afin de rapprocher le profil de l'énergie cinétique turbulente des données de DNS [8, 20-23]. La calibration du paramètre B donne les coefficients suivants ;  $C_{B1} = 0.0354$  et  $C_{B2} = -0.0716$  (Fig. 2).

#### 3.2. Les résultats pour un nombre de Prandtl turbulent constant égal à 0.85

La fonction analytique (6) est définie avec le paramètre B adéquat. Elle est implémentée via un programme en langage C sous Fluent. Les profils de l'énergie cinétique turbulente et celles de la température sont présentés et validés par rapport aux données de DNS pour  $Re_\tau = 150$  [20], 395 [22], 640 [8], 1020 [23] (Fig. 3). Le modèle turbulent SST k- $\omega$  [24] est sélectionné [15].

L'implémentation de la fonction analytique (Eq.6) avec différents nombres de Reynolds, améliore le profil de l'énergie cinétique turbulente. Cependant, son effet est négatif sur les profils de température pour les nombres de Reynolds  $Re_\tau > 150$ . Ces profils de température pourraient donc être améliorés par la prise en compte d'une formulation appropriée pour le nombre de Prandtl turbulent.

## 4. Profils de température avec un nombre de Prandtl turbulent variant

### 4.1. Une formule empirique pour le nombre de Prandtl turbulent

Le nombre de Prandtl turbulent défini en équation (1) est en fonction de  $\nu_t$  et  $\alpha_t$  qui sont successivement la viscosité cinématique turbulente et la diffusivité turbulente thermique, données comme suit :

$$\nu_t = \frac{\langle u'v' \rangle}{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad (7)$$

$$\alpha_t = \frac{\langle v'T' \rangle}{\frac{\partial T}{\partial y}} \quad (8)$$

En remplaçant (7) et (8) dans (1), on obtient :

$$Pr_t = \frac{\langle u'v' \rangle \frac{\partial T}{\partial y}}{\langle v'T' \rangle \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (9)$$

Pour définir le nombre de Prandtl turbulent, quatre quantités dans l'équation, (9) devraient être définies. Comme il n'est pas facile de déterminer ces quatre quantités expérimentalement, à savoir, la contrainte de cisaillement turbulent  $\langle u'v' \rangle$ , le gradient de vitesse  $\partial u/\partial y$ , le flux de chaleur turbulent  $\langle v'T' \rangle$  et le gradient de température  $\partial T/\partial y$ , avec précision à un point dans le champ d'écoulement turbulent. Donc il est difficile de calculer le nombre de Prandtl turbulent précisément. Kays et Crawford [2] ont alors lissé les résultats expérimentaux du nombre de Prandtl turbulent dans la couche limite par l'équation suivante :

$$Pr_t = \frac{1}{\frac{1}{2Pr_{t\infty}} + CPe_t \sqrt{\frac{1}{Pr_{t\infty}} - (CPe_t)^2 \left[ 1 - e^{-\frac{1}{CPe_t \sqrt{Pr_{t\infty}}}} \right]}} \quad (10)$$

où  $Pr_{t\infty}$  est la valeur du nombre de Prandtl loin de la paroi ( $Pr_{t\infty} = 0.85$ ) et  $C$  est une constante définie expérimentalement et égale à 0.3,  $Pe_t$  est le nombre de Peclet donnée par :

$$Pe_t = \frac{\nu_t}{\nu} Pr \quad (11)$$

où  $Pr$  représente le nombre de Prandtl ( $Pr = 0.71$ ). L'équation (10) sera utilisée dans la suite.

### 4.2. Les résultats obtenus avec l'implémentation de la formulation du nombre de Prandtl turbulent

Nous avons implémenté l'équation (10) dans Fluent. Le modèle turbulent SST k-w est considéré [15] pour les quatre nombres de Reynolds de frottement ;  $Re_{\tau}=180$  [21], 395 [22], 640 [8], 1020 [23]. Les résultats sont présentés dans la figure 4. L'implémentation de l'expression de Kays et Crawford dans Fluent améliore considérablement la prédiction du champ thermique.

## 5. Conclusion

Des fonctions spécifiques ont été élaborées et implémentées sous Fluent afin d'améliorer la prédiction de l'énergie cinétique turbulente et de la température dans un canal avec transfert de chaleur. Les comparaisons sont faites par rapport aux données de DNS. Pour les petites valeurs du nombre de Reynolds de frottement  $Re_\tau$  ( $<180$ ), l'implémentation de la fonction analytique pour l'énergie cinématique turbulente améliore les profils de température. Cependant, pour des  $Re_\tau > 180$  cette première fonction a un effet négatif. Afin d'améliorer ces profils, on a pris en compte la formulation de Kays et de Crawford pour le nombre de Prandtl turbulent. Les comparaisons avec les données DNS montrent que cette approche contribue à améliorer les profils de température.

Ce travail a permis d'améliorer la prédiction des écoulements avec transfert de chaleur pour le cas d'un écoulement dans un canal. Il conviendrait par ailleurs de tester cette méthode pour des géométries plus complexes.

## Références

- [1] O. Reynolds, On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 186 (1895) 123-164.
- [2] W. Kays, M. Crawford, *Convective Heat and Mass Transfer*, 3rd Edn, McGraw-Hill, New York, 1993, p. 267.
- [3] W. C. Reynolds, W. M. Kays, S. J. Kline, *Heat Transfer in the Turbulent Incompressible Boundary Layer*, NASA Memo 12-1-58W, Washington, (1958).
- [4] B. F. Blackwell, W. M. Kays, R. J. Moffat, Report HMT-16, Thermosciencec Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University (1972).
- [5] M. M. Gibson, C. A. Verriopoulos, Turbulent boundary layer on a mildly curved convex surface: Part 2, Temperature field measurements, *Experiment in Fluids*, 2 (1984) 73-80.
- [6] D. K. Hollingsworth, W. M. Kays, R. J. Moffat, Report HTM-41, Thermal sciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University (1989).
- [7] H. Kawamura, H. Abe, Y. Matsuo, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effect, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20( 3) (1999) 196-207.
- [8] H. Abe, H. Kawamura, DNS of turbulent heat transfer in a channel flow up to  $Re_\tau = 640$  (With respect to Reynolds and Prandtl number effects), *Transactions of the JSME (B)*, 69 (2003) 2291-2298, (in Japanese).
- [9] J. C. Rotta, *Heat Transfer and Temperature Distribution in Turbulent Boundary Layers at Supersonic and Hypersonic Flow*. AGARDograph 97, Pt.I, (1965) 35-63.
- [10] R. L. Simpson, D. G. Whitten, R. J. Moffat, An Experimental Study of the Turbulent Prandtl Number of Air With Injection and Suction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 13(1) (1970) 125-143.
- [11] T. Cebeci, A Model for Eddy-Conductivity and Turbulent Prandtl Number. Rep. No. MDC-J0747/01, McDonnell Douglas Corp., May 1970.
- [12] V. Yakhot, S.A. Orszag, A. Yakhot, Heat transfer in turbulent fluids – 1, Pipe flow, *International Journal Heat Mass Transfer*, 30 (1987)15-22.
- [13] Fluent, *Fluent 6.2 user's guide* (2005).
- [14] N. El Gharbi, R. Absi, A. Benzaoui, Effect of different near-wall treatments on indoor airflow simulations, Accepted on July for publication in *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 5(4) (2012) 63-70.
- [15] N. El Gharbi, R. Absi, A. Benzaoui, Numerical investigation toward improving heat transfer predictions in a turbulent channel flow. *International Journal of Thermal Sciences*, Available online 15 August 2011(In press). DOI:10.1016/j.ijthermalsci.2011.06.018

- [16] N. El Gharbi, R. Absi, A. Benzaoui, R. Bennacer, An improved near wall treatment for turbulent channel flows, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Taylor & Francis, 25(1) (2011) 41-46.
- [17] E. R. van Driest, On turbulent flow near a wall, *J. Aeronaut. Sci.*, 23 (11) (1956) 1007-1011.
- [18] R. Absi, Analytical solutions for the modeled k-equation, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, American Society of Mechanical Engineers, 75(4) (2008) 044501.
- [19] R. Absi, A simple eddy viscosity formulation for turbulent boundary layers near smooth walls, *Comptes Rendus Mecanique*, Académie des Sciences, Elsevier, 337 (2009) 158-165.
- [20] N. Kasagi, Y. Tomita, A. Kuroda, Direct Numerical Simulation of Passive Scalar Field in a Turbulent Channel Flow, *ASME J. Heat Transfer*, 114 (1992) 598-606.
- [21] H. Abe, H. Kawamura, Y. Matsuo, Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to Reynolds number dependence, *ASME J. Fluids Eng.*, 123 (2001) 382-393.
- [22] H. Kawamura, , H. Abe, Y. Matsuo, DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effect, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20(3) (1999) 196-207
- [23] H. Abe, H. Kawamura, Y. Matsuo, Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to  $Re_\tau=1020$  with  $Pr=0.025$  and  $0.71$ , *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 25 (2004) 404-419.
- [24] F.R. Menter, Improved two-equation k- $\omega$  turbulence models for aerodynamic flows. NASA TM-103975, NASA-Ames research center, 1992.

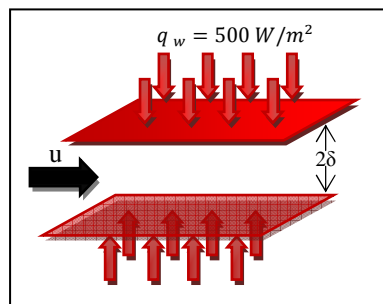


Figure 1 : Géométrie considérée

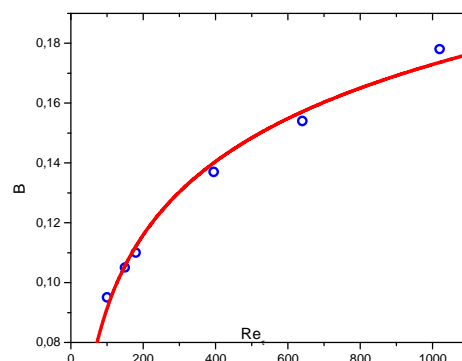


Figure 2: Courbe de dépendance du paramètre  $B$  au nombre de Reynolds  $Re_{\tau}$ : les symboles ; valeurs obtenues à partir de données DNS et Fluent, la courbe ; le paramètre  $B$  avec les coefficients  $C_{B1}$  et  $C_{B2}$  proposés

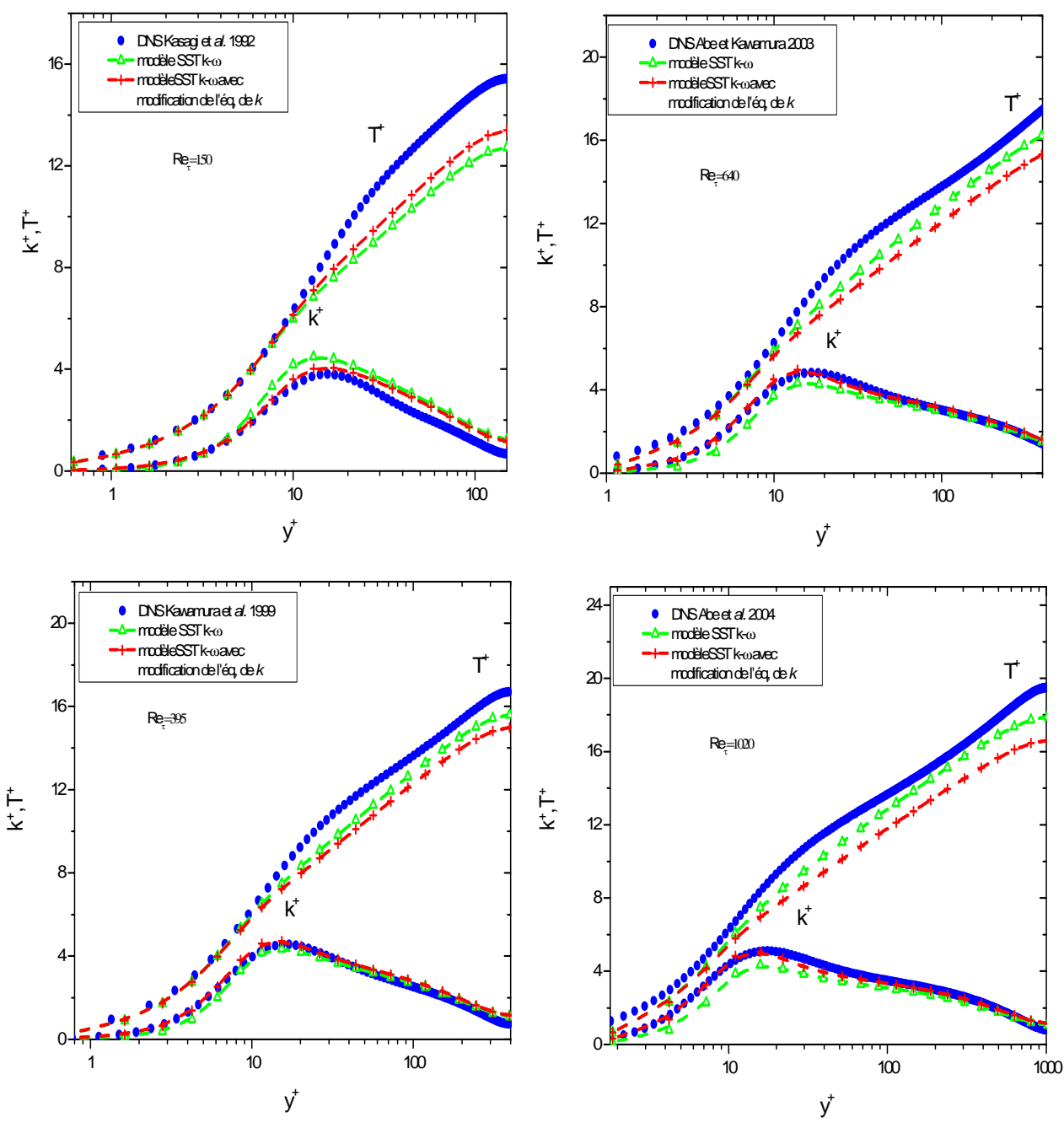


Figure 3: Profil de température totale et de l'énergie cinétique turbulente pour  $Re_\tau = 150, 395, 640, 1020$



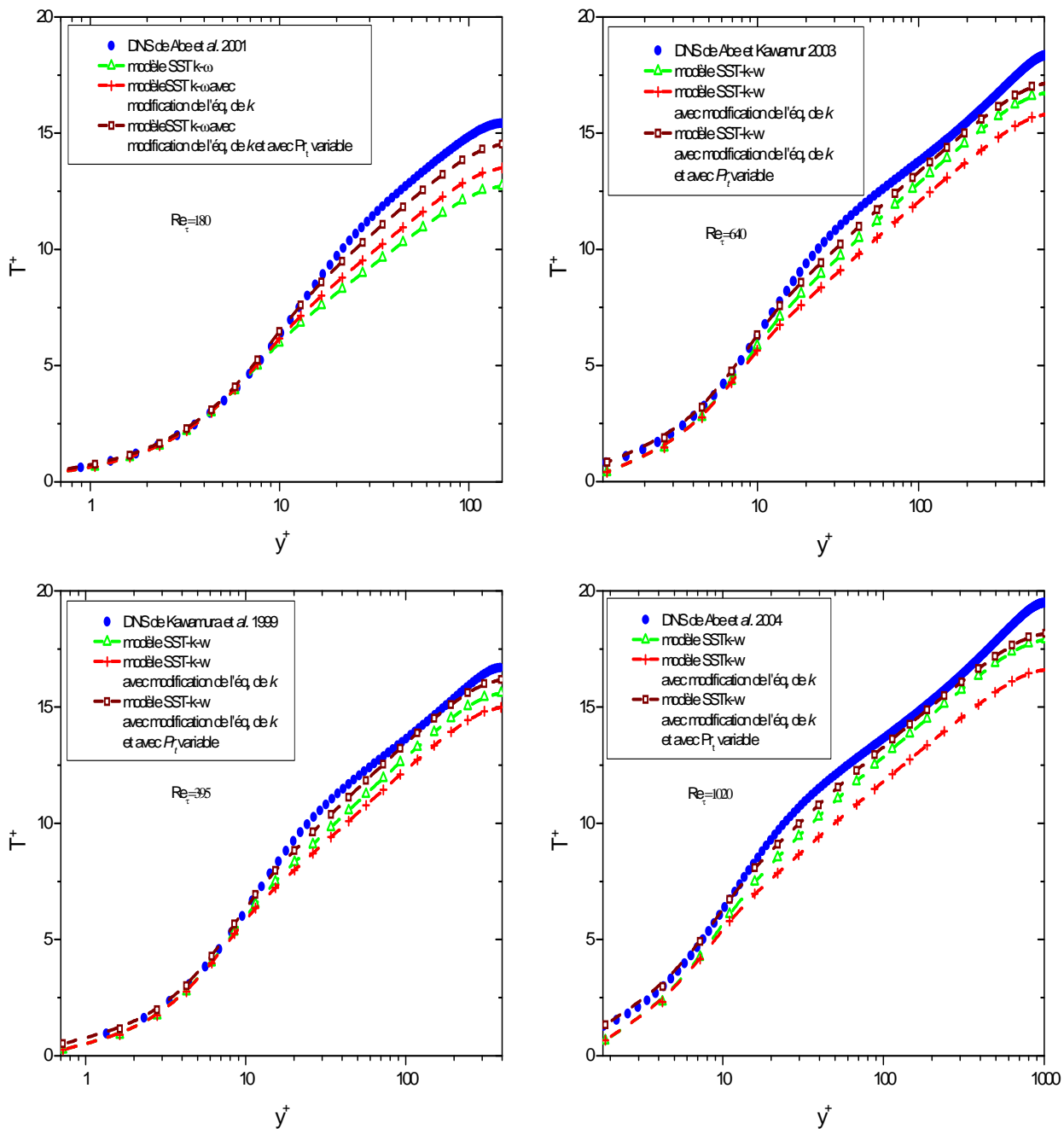


Figure 4: Profil de température totale pour  $Re_\tau = 180, 395, 640, 1020$  avec l'implémentation de l'expression de Kays et Crawford [2]