



HAL
open science

Une méthode indirecte d'identification par sous-espaces en boucle fermée

Mathieu Pouliquen, Eric Pigeon, Olivier Gehan

► **To cite this version:**

Mathieu Pouliquen, Eric Pigeon, Olivier Gehan. Une méthode indirecte d'identification par sous-espaces en boucle fermée. *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, 2012, 46 (6), pp.711. hal-00825721

HAL Id: hal-00825721

<https://hal.science/hal-00825721>

Submitted on 24 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une méthode indirecte d'identification par sous-espaces en boucle fermée

Mathieu Pouliquen, Eric Pigeon, Olivier Gehan

Université de Caen - Ensicaen - CNRS

GREYC/équipe automatique

6, Boulevard du Maréchal Juin, 14050 Caen

mathieu.pouliquen@unicaen.fr,eric.pigeon@unicaen.fr,olivier.gehan@ensicaen.fr

RÉSUMÉ. Cette étude propose une résolution du problème d'identification en boucle fermée. Ceci est réalisé par l'intermédiaire d'une méthode indirecte par sous-espaces utilisant une entrée exogène sur la boucle et la connaissance de la réponse impulsionnelle du régulateur. L'idée est d'extraire dans un premier temps une caractéristique de la dynamique de la boucle puis dans un second temps d'en déduire la dynamique du système. Cette procédure en deux temps consiste en l'application successive de deux algorithmes d'estimation de sous-espaces. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de remonter jusqu'à la représentation d'état du système de commande pour obtenir celle du système. Deux exemples d'application (un exemple en simulation et une application industrielle) sont présentés afin d'illustrer les performances de la méthode.

ABSTRACT. This study proposes a resolution of the closed loop identification problem. This is achieved through an indirect subspace method using exogenous input and knowledge of a part of the controller impulse response. The idea is to extract in a first step a characteristic of the loop dynamics and then in a second step to derive the dynamics of the system. As described in the article, this two-step procedure involves the successive application of two subspace algorithms. Note that it is not necessary to estimate a the state space realization of the loop to get a the state space realization of the system. Two examples (a simulation example and an industrial application) are presented to illustrate the performance of the method.

MOTS-CLÉS : identification en boucle fermée, méthode d'identification par sous-espaces.

KEYWORDS: closed-loop system identification, subspace identification methods.

DOI:10.3166/JESA.46.711-740 © 2012 Lavoisier

1. Introduction

L'identification des systèmes bouclés a suscité beaucoup d'intérêt lors des deux dernières décennies comme en témoignent les quelques références suivantes : (Van Den Hof, Schrama, 1993), (Söderström, Stoica, 1989), (Ljung, 1999), (Forssell, Ljung, 1999), (Codrons *et al.*, 2002), (Gilson, Van Den Hof, 2005), etc. Les raisons de cet intérêt sont l'impossibilité sur de nombreux procédés industriels de réaliser une expérience en boucle ouverte (sécurité, stabilité, économie, etc.) mais aussi le fait que l'identification en boucle fermée est un outil de supervision. Elle permet en effet de vérifier que le système de commande satisfait les performances désirées et par suite de réaliser un calibrage plus adapté du régulateur si nécessaire. Malheureusement la pratique d'une identification en boucle fermée est relativement délicate du fait de l'existence d'une corrélation entre la commande et les bruits de sortie induisant un biais d'estimation. En conséquence différentes méthodes spécifiques ont été développées pour éliminer ce biais ou diminuer sa valeur.

Dans le même temps, un grand intérêt a aussi été porté sur les méthodes d'identification par sous-espaces (comme le montrent les contributions suivantes (Van Overschee, De Moor, 1996b), (Favoreel *et al.*, 2000), (Katayama, 2005), (Qin *et al.*, 2005), (Qin, 2006), (Chiuso, 2007), liste non exhaustive). L'utilisation de ces méthodes est motivée par un ensemble de propriétés intéressantes : simplicité, robustesse intrinsèque et leur application naturelle aux systèmes multivariables. Afin de contourner le problème du biais en boucle fermée, quelques méthodes par sous-espaces spécialement dédiées à la boucle fermée ont été développées. Ces méthodes se divisent en trois groupes : les méthodes directes, les méthodes indirectes et les méthodes simultanées.

- Dans les méthodes directes, l'identification est réalisée comme en boucle ouverte, modulo un traitement adéquat des données ((Ljung, Mc Kelvey, 1996), (Chou, Verhaegen, 1999), (Qin, Ljung, 2003), (Jansson, 2003), (Larimore, 2004), (Lin *et al.*, 2004 ; 2005), (Jansson, 2005), (Chiuso, Picci, 2005a ; 2005b), (Huang, Kadali, 2008), (Chiuso, 2006b), (Wang, Qin, 2006), (Gilson, Mercere, 2006)).

- Les méthodes indirectes sont basées sur une identification type boucle ouverte du système de commande en analysant la relation entre l'entrée d'excitation externe et la sortie du système ((Van Overschee, De Moor, 1996a ; 1997), (Oku, Fujii, 2004), (Oku *et al.*, 2006; Oku, Tanaka, 2006)).

- Les méthodes simultanées analysent conjointement la dynamique excitation externe/commande et la dynamique excitation externe/sortie afin d'extraire le comportement du système ((Verhaegen, 1993), (Katayama, Yamamoto, 1995), (Pouliquen, M'Saad, 2003), (Katayama, Kawauchi, Picci, 2005; Katayama, Tanaka, 2007; Katayama, Ase, 2008)).

Quelques méthodes directes ont été particulièrement analysées dans (Chiuso, Picci, 2005a ; 2005b), (Chiuso, 2006a ; 2006b ; 2007 ; 2010). Ces méthodes directes ont l'avantage de proposer un traitement des données indépendamment de la présence ou non d'une contre réaction. Par suite, elles sont applicables dans un contexte de boucle ouverte et de boucle fermée et proposent des estimations asymptotiquement consis-

tantes dans un cas comme dans l'autre. Néanmoins, comme cela apparaîtra dans la section 4, les performances de ces méthodes se dégradent lorsque le nombre de données disponibles est faible.

Afin de permettre l'obtention d'estimations fiables même dans un tel contexte nous avons choisi une approche différente. La méthode proposée dans cette étude se scinde en deux étapes principales. La première étape consiste en une analyse du comportement de la boucle fermée. Cette analyse est réalisée par l'estimation du sous espace décrivant les trajectoires des états de la boucle. La seconde étape va utiliser cette première estimation afin d'extraire le sous espace décrivant les trajectoires des états du système. Ceci va permettre ensuite l'estimation de la représentation d'état du système. Ces deux étapes d'estimation de sous-espaces sont réalisées à partir de projections orthogonales et de décompositions par valeurs singulières comme cela se pratique dans les méthodes d'identification par sous-espaces traditionnelles (voir références données ci-dessus).

Cet article est organisé comme suit : dans la section 2, le problème de l'identification en boucle fermée est posé. Différentes notations et hypothèses sont aussi données. La section 3 est le cœur de l'article: tout d'abord la sous-section 3.1 est dédié à deux résultats principaux, ensuite la sous-section 3.2 propose un algorithme d'identification complet utilisant ces résultats et enfin la sous-section 3.3 se concentre sur l'estimation de la partie stochastique du modèle. Deux applications sont présentées dans la section 4 : un exemple de simulation issu de la littérature et une application industrielle. Quelques conclusions et remarques terminent l'article dans la section 5.

2. Formulation du problème et notation

2.1. Contexte de l'identification

Considérons le problème d'identification d'un système linéaire invariant dans le temps représenté sur la figure 1 où $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie du système s'exprimant comme suit ((Ljung, 1999)) :

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t) \quad (1)$$

t désigne le temps discret et q est l'opérateur avance tel que $qu(t) = u(t+1)$. $G(q)$ est une matrice de fonctions de transfert propres représentant le comportement déterministe du système (avec ou sans retard), $H(q)$ est une matrice de fonctions de transfert inversement stables et $e(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est un vecteur de bruits blancs de variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ représentant l'innovation. Une représentation d'état minimale de (1) sous forme d'innovation est

$$\begin{cases} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + Ke(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t) \end{cases} \quad (2)$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ et $K \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$. Le couple (A, C) est supposé être observable et le couple (A, B) est supposé être commandable.

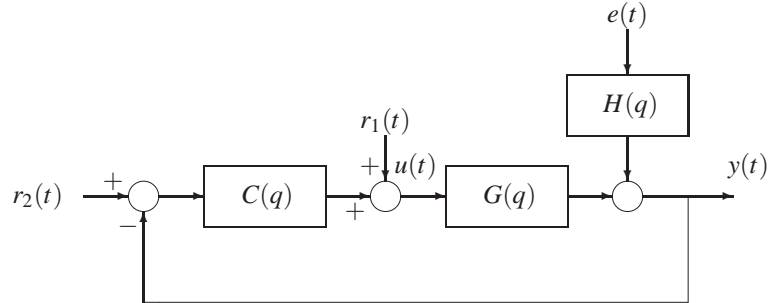


Figure 1. Système en boucle fermée

Le signal de commande $u(t)$ est généré par :

$$u(t) = r_1(t) + C(q)(r_2(t) - y(t)) \quad (3)$$

où $r_1(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $r_2(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont deux séquences d'excitations exogènes. Afin de simplifier les notations, nous posons par la suite $r(t) = r_1(t) + C(q)r_2(t)$ d'où :

$$u(t) = r(t) - C(q)y(t) \quad (4)$$

Une représentation d'état du régulateur est donnée par

$$\begin{cases} x_c(t+1) &= A_c x_c(t) - B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) - D_c y(t) + r(t) \end{cases} \quad (5)$$

où $A_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $B_c \in \mathbb{R}^{n_c \times n_y}$, $C_c \in \mathbb{R}^{n_u \times n_c}$ et $D_c \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ (aucune condition de stabilité n'est imposée au régulateur).

Le problème d'identification traité dans ce papier est le suivant : trouver l'ordre n du système et une réalisation des matrices d'état (A, B, C, D, K) étant donné la connaissance d'une séquence d'entrée $u(t)$, de sortie $y(t)$ et d'excitation $r(t)$. La connaissance des premiers paramètres de Markov du régulateur sera requise même s'il est possible de les estimer assez facilement (voir fin de la sous-section 3.1).

Dans la suite de l'étude nous ferons les hypothèses usuelles ((Van Overschee, De Moor, 1996b), (Van Overschee, De Moor, 1997)) suivantes :

- le système à commander est internement stable;
- le système bouclé est internement stable;
- $r(t)$ et $e(t)$ sont des séquences ergodiques stationnaires de moyennes nulles;
- $r(t)$ vérifie la condition d'excitation persistante;

- $r(t)$ et $e(t)$ sont mutuellement décorrélés;
- le système de commande est supposé bien posé. Cette condition assure que les matrices $(I_{n_u} + D_c D)$ et $(I_{n_y} + D D_c)$ sont non singulières.

2.2. Notations

Nous utiliserons dans cette étude des notations usuellement utilisées dans les méthodes d'identification par sous-espaces ((Van Overschee, De Moor, 1996b), (Van Overschee, De Moor, 1997)). A ce titre, les données sont conditionnées dans des matrices blocs : les matrices de Hankel de l'entrée U_p et U_f sont ainsi définies par :

$$\left(\begin{array}{c} U_p \\ U_f \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} u(t-p) & u(t-p+1) & \dots & u(t-p+j-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(t-2) & u(t-1) & \dots & u(t+j-3) \\ u(t-1) & u(t) & \dots & u(t+j-2) \\ u(t) & u(t+1) & \dots & u(t+j-1) \\ u(t+1) & u(t+2) & \dots & u(t+j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(t+f-1) & u(t+f) & \dots & u(t+f+j-2) \end{array} \right) \quad (6)$$

Les indices f et p désignent respectivement le "futur" et le "passé" et sont des indices choisis par l'utilisateur de telle sorte que $f, p > n + n_c$. j est le nombre de colonnes des matrices de Hankel. Les matrices R_f, R_p, Y_f, Y_p, E_f et E_p sont construites de manière identique à partir des signaux $r(t), y(t)$ et $e(t)$.

A partir des notations précédentes, les équations d'état (2) et (5) peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_t &= A^p X_{t-p} + \Delta_p^d U_p + \Delta_p^s E_p \\ Y_f &= \Gamma_f X_t + H_f^d U_f + H_f^s E_f \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} X_t^c &= A_c^p X_{t-p}^c - \Delta_p^c Y_p \\ U_f &= \Gamma_f^c X_t^c - H_f^c Y_f + R_f \end{cases} \quad (8)$$

où X_{t-p} et X_t sont respectivement les matrices des états passés et futurs du système soit :

$$X_{t-p} = \left(\begin{array}{cccc} x(t-p) & x(t-p+1) & \dots & x(t-p+j-1) \end{array} \right) \quad (9)$$

et

$$X_t = \left(\begin{array}{cccc} x(t) & x(t+1) & \dots & x(t+j-1) \end{array} \right) \quad (10)$$

et X_{t-p}^c et X_t^c sont respectivement les matrices des états passés et futurs du régulateur.

$$\Gamma_f = \left(\begin{array}{c} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{f-1} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \Delta_p^d = \left(\begin{array}{cccc} A^{p-1}B & \dots & AB & B \end{array} \right) \quad (11)$$

sont respectivement les matrices d'observabilité et de commandabilité étendues de la partie déterministe du système ((Van Overschee, De Moor, 1996b), (Van Overschee, De Moor, 1997)). La matrice H_f^d est une matrice triangulaire inférieure de Toeplitz contenant les f premiers paramètres de Markov de la partie déterministe du système et elle est définie par :

$$H_f^d = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{f-2}B & \dots & CB & D \end{pmatrix} \quad (12)$$

Des notations similaires sont utilisées pour la partie stochastique (Δ_p^s et H_f^s) et pour le régulateur (Γ_f^c , Δ_p^c et H_f^c).

Par combinaison de (2) et (5) on a :

$$\begin{cases} x^{bf}(t+1) &= A_{bf}x^{bf}(t) + B_{bf/r}r(t) + B_{bf/e}e(t) \\ y(t) &= C_{bf}x^{bf}(t) + D_{bf/r}r(t) + D_{bf/e}e(t) \end{cases} \quad (13)$$

avec $x^{bf}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{pmatrix}$. Les matrices A_{bf} , C_{bf} , $B_{bf/r}$, $D_{bf/r}$, $B_{bf/e}$ et $D_{bf/e}$ sont déterminées par les matrices d'état (A, B, C, D, K) et (A_c, B_c, C_c, D_c). L'ordre de cette représentation d'état du système de commande est $n_{bf} = n + n_c$. Cet ordre peut ne pas être l'ordre minimal, c'est à dire $n_{bf}^{min} \leq n_{bf}$.

De la même manière, une combinaison de (7) et (8) conduit à la représentation d'état étendue du système de commande suivante (le calcul est détaillé en annexe) :

$$\begin{cases} X_t^{bf} &= A_{bf}^p X_{t-p}^{bf} + \Delta_p^{bf/r} R_p + \Delta_p^{bf/e} E_p \\ Y_f &= \Gamma_f^{bf} X_t^{bf} + H_f^{bf/r} R_f + H_f^{bf/e} E_f \end{cases} \quad (14)$$

avec

$$\begin{aligned} X_t^{bf} &= \begin{pmatrix} X_t \\ X_t^c \end{pmatrix} & \Gamma_f^{bf} &= \begin{pmatrix} T_f \Gamma_f & T_f H_f^d \Gamma_f^c \end{pmatrix} \\ \Delta_p^{bf/r} &= \begin{pmatrix} \Delta_p^d (I_{p m_u} - H_p^c T_p H_p^d) \\ -\Delta_p^c T_p H_p^d \end{pmatrix} & H_f^{bf/r} &= T_f H_f^d \\ \Delta_p^{bf/e} &= \begin{pmatrix} -\Delta_p^d H_p^c T_p H_p^s + \Delta_p^s \\ -\Delta_p^c T_p H_p^s \end{pmatrix} & H_f^{bf/e} &= T_f H_f^s \end{aligned} \quad (15)$$

où $T_f = (I_{f n_y} + H_f^d H_f^c)^{-1}$. Remarquons qu'à partir des hypothèses énoncées auparavant $(I_{f n_y} + H_f^d H_f^c)$ est inversible. A_{bf}^p peut aisément s'exprimer à partir des matrices A^p , A_c^p , H , Δ et Γ .

Pour finir, rappelons les définitions de quelques opérateurs de projection :

– La projection orthogonale de l'espace ligne de la matrice A sur l'espace ligne de la matrice B :

$$A \Pi_B = AB^T (BB^T)^{-1} B \quad (16)$$

– La projection de l'espace ligne de A sur le complément orthogonal de l'espace ligne de B :

$$A \Pi_B^\perp = A (I_j - \Pi_B) = A - A \Pi_B \quad (17)$$

– La projection oblique de l'espace ligne de A sur l'espace ligne de B le long de l'espace ligne de C :

$$A /_C B = A \begin{pmatrix} B^T & C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BB^T & BC^T \\ CB^T & CC^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Il peut être montré que :

$$A /_C B = A \Pi_C^\perp B^T \left(B \Pi_C^\perp B^T \right)^{-1} B \quad (19)$$

3. Proposition d'un algorithme d'identification en boucle fermée

Nous décrivons dans cette section l'approche envisagée pour l'identification du système décrit par (1) et (2). Dans une première sous-section est présentée une estimation de la matrice d'observabilité étendue Γ_f . Un algorithme d'application pour l'estimation des matrices d'état (A, B, C, D) est donné dans une deuxième sous-section. La dernière sous-section se concentre sur l'estimation des composantes du modèle stochastique : la matrice K et la variance σ^2 .

3.1. Principaux résultats

La procédure proposée dans cette étude est la suivante :

- 1- Tout d'abord nous nous concentrons sur l'estimation d'une matrice caractérisant le comportement du système de commande : la matrice d'observabilité étendue Γ_f^{bf} ;
- 2- Ensuite nous estimons Γ_f .

Le résultat suivant propose une estimation de Γ_f^{bf} . Cette estimation est réalisée en utilisant la procédure d'identification usuelle par sous-espaces (Van Overschee, De Moor, 1996b) sur (14).

THÉORÈME.— Définissons $Z_p = \begin{pmatrix} R_p \\ Y_p \end{pmatrix}$ la matrice contenant les informations passées sur la sortie et sur la séquence d'excitation. Sous les hypothèses énoncées dans le sous-paragraphe 2.1 et sous les conditions suivantes:

- 1) le nombre de données tend vers l'infini c'est à dire $j \rightarrow \infty$;

- 2) la matrice $\begin{pmatrix} X_t^{bf} \\ R_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_p^T & R_f^T \end{pmatrix}$ est de rang plein ligne ($n_{bf}^{min} + fn_u$);
- 3) $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} E_f Z_p^T = 0$.

Et si nous définissons la matrice de projection oblique suivante \mathcal{O}_f^{bf} :

$$\mathcal{O}_f^{bf} = Y_f /_{R_f} Z_p \Pi_{R_f}^\perp \quad (20)$$

Alors nous avons :

- 1) \mathcal{O}_f^{bf} peut s'exprimer à partir de la matrice d'observabilité étendue du système de commande Γ_f^{bf} et de la matrice des états X_t^{bf}

$$\mathcal{O}_f^{bf} = \Gamma_f^{bf} X_t^{bf} /_{R_f} Z_p \Pi_{R_f}^\perp \quad (21)$$

- 2) La décomposition par valeurs singulières (SVD) de \mathcal{O}_f^{bf} est donnée par :

$$\mathcal{O}_f^{bf} = \begin{pmatrix} \mathbb{U}_1 & \mathbb{U}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{S}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{V}_1^T \\ \mathbb{V}_2^T \end{pmatrix} = \mathbb{U}_1 \mathbb{S}_1 \mathbb{V}_1^T \quad (22)$$

où $\mathbb{S}_1 \in \mathbb{R}^{n_{bf}^{min} \times n_{bf}^{min}}$,

- 3) Γ_f^{bf} peut s'exprimer par $\Gamma_f^{bf} = \mathbb{U}_1 T$ où T est une matrice de similarité.

(20) peut être réécrit en introduisant deux matrices de pondérations W_1 et W_2 :

$$\mathcal{O}_f^{bf} = W_1 Y_f W_2 \text{ avec } \begin{cases} W_1 = I_{fn_y} \\ W_2 = /_{R_f} Z_p \Pi_{R_f}^\perp \end{cases} \quad (23)$$

Γ_f^{bf} s'exprime ainsi par $\Gamma_f^{bf} = W_1^{-1} \mathbb{U}_1 T$. D'autres méthodes classiques d'identification par sous-espaces telles que N4SID, PO-MOESP, CVA et IVM s'expriment sous cette même formulation en adaptant les matrices de pondération W_1 et W_2 . Le choix fait ici correspond à l'algorithme de type PO-MOESP.

La condition 2) induit quelques conditions sur la valeur des indices f et p , le degré de l'excitation persistante et la complexité de la boucle. D'après (Bauer, Jansson, 2000) cette condition de rang est satisfaite de manière générique pourvu que l'entrée exogène $r(t)$ soit une excitation persistante de degré suffisant. Si par exemple $r(t)$ est une séquence binaire aléatoire alors cette condition est vérifiée (en rappelant que $f, p > n + n_c$ comme précisé dans la sous-section 2.2).

La condition 3) sur la matrice Z_p doit être garantie dans un contexte de mesures bruitées. En effet, une matrice Z_p satisfaisant la condition 3) va permettre, à la manière d'une matrice de variable instrumentale, la réjection asymptotique de la matrice

de bruit futur E_f . Il est possible de substituer à Z_p une matrice Ψ de variable instrumentale quelconque pourvu que cette dernière satisfasse les conditions **2)** et **3)** : qu'elle soit corrélée à l'état et décorrélée du bruit.

Remarquons qu'en présence de bruit, si la condition d'excitation persistante d'ordre suffisant est satisfaite, alors la matrice $Z_p \Pi_{R_f}^\perp Z_p^T$ est de rang plein et par suite la projection oblique est réalisable. Dans le cas où il n'y a pas (ou très peu) de bruit alors le choix précédent sur Z_p ne permet plus d'assurer $Z_p \Pi_{R_f}^\perp Z_p^T$ de rang plein. Sous ces conditions, il est possible de choisir $Z_p = R_p$, choix correspondant à un algorithme de type PI-MOESP.

La matrice Γ_f^{bf} étant connue, nous devons dès lors déterminer Γ_f . La matrice \mathcal{O}_f^{bf} estimée précédemment comporte une part de dynamique induite par le système et une part de dynamique induite par le régulateur. Ainsi à partir de (14) et si on considère que le nombre de données tend vers l'infini alors il est facile de réécrire \mathcal{O}_f^{bf} comme suit :

$$\mathcal{O}_f^{bf} = W_1 T_f \Gamma_f X_t W_2 + W_1 T_f H_f^d \Gamma_f^c X_t^c W_2 \quad (24)$$

ce qui donne :

$$\Gamma_f X_t W_2 = (W_1 T_f)^{-1} \left(\mathcal{O}_f^{bf} - W_1 T_f H_f^d \Gamma_f^c X_t^c W_2 \right) \quad (25)$$

avec :

$$\Gamma_f^c X_t^c = U_f + H_f^c Y_f - R_f \quad (26)$$

Afin de calculer Γ_f nous devons d'abord disposer des matrices $T_f H_f^d$ et T_f . A ce titre, à partir de (14) et en posant $Z = \begin{pmatrix} R_f \\ Z_p \end{pmatrix}$ nous avons :

$$Y_f \Pi_Z = \Gamma_f^{bf} X_t^{bf} \Pi_Z + T_f H_f^d R_f \quad (27)$$

Avec $\left(\widehat{\Gamma}_f^{bf} \right)^\perp$ obtenue à partir du résultat précédent nous trouvons :

$$\left(\widehat{\Gamma}_f^{bf} \right)^\perp Y_f \Pi_Z = \left(\widehat{\Gamma}_f^{bf} \right)^\perp T_f H_f^d R_f \quad (28)$$

avec

$$T_f H_f^d = \begin{pmatrix} L_0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_1 & L_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{f-1} & \cdots & L_1 & L_0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

où $L_0 = D_{bf/r}$ et $L_i = C_{bf} A_{bf}^{i-1} B_{bf/r}$. Ces f éléments $L_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ peuvent être aisément extraits en utilisant la procédure donnée dans (Paternell *et al.*, 1996) et (Van

Overschee, De Moor, 1996a). Cette procédure consiste en la résolution du problème de minimisation suivant ¹

$$\min \left| \left(\widehat{\Gamma}_f^{bf} \right)^\perp Y_f \Pi_Z - \left(\widehat{\Gamma}_f^{bf} \right)^\perp T_f H_f^d(L_i) R_f \right|_2 \quad (30)$$

Il est montré dans les études citées ci-avant comment reformuler et résoudre ce problème linéairement en fonction des éléments L_i .

Une fois $\widehat{T}_f H_f^d$ connue, il est facile d'obtenir T_f :

$$\widehat{T}_f = I_{f n_y} - \widehat{T}_f H_f^d H_f^c \quad (31)$$

Faisant usage des estimations précédentes, le résultat suivant permet un calcul de la matrice d'observabilité étendue Γ_f du système.

THÉORÈME.— Définissons la matrice \mathcal{O}_f suivante :

$$\mathcal{O}_f = (W_1 T_f)^{-1} \left(\mathcal{O}_f^{bf} - W_1 T_f H_f^d \Gamma_f^c X_t^c W_2 \right) \quad (32)$$

Sous les hypothèses énoncées dans la sous-section 2.1 et celles du résultat précédent nous avons :

1) La matrice \mathcal{O}_f peut s'exprimer à partir de la matrice d'observabilité étendue Γ_f et de la matrice des états X_t

$$\mathcal{O}_f = \Gamma_f X_t W_2 \quad (33)$$

2) La SVD de \mathcal{O}_f est donnée par :

$$\mathcal{O}_f = \left(\begin{array}{cc} U'_1 & U'_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} S'_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} V'_1 \\ V'_2 \end{array} \right) = U'_1 S'_1 V'^T_1 \quad (34)$$

où $S'_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

3) Γ_f peut s'exprimer par $\Gamma_f = U'_1 T$ où T est une matrice de similarité.

REMARQUE.— Le fait de passer par l'estimation de la matrice Γ_f peut poser problème lorsque le système étudié est instable. En effet, la dernière ligne de Γ_f est CA^f , par suite pour un choix important de f nous avons $CA^f \gg 1$, d'où une dégradation du

1. $|\cdot|_2$ désigne la norme L2

conditionnement de Γ_f et l'apparition de problèmes numériques. Afin d'éviter cela nous conseillons l'application de cette méthode uniquement sur des procédés stables en boucle ouverte.

REMARQUE.— **Analogie avec la méthode proposée dans (Van Overschee, De Moor, 1996a ; 1997)** : les résultats précédents permettent une estimation de $T_f\Gamma_f$ par le biais de l'expression :

$$T_f\Gamma_f X_t = Y_f - T_f H_f^d \Gamma_f^c X_t^c - T_f H_f^d R_f - T_f H_f^s E_f \quad (35)$$

(où $\Gamma_f^c X_t^c = U_f + H_f^c Y_f - R_f$) et l'application de la projection oblique contenue dans W_2 qui va supprimer les termes en R_f et E_f :

$$W_1 T_f \Gamma_f X_t W_2 = W_1 (Y_f - T_f H_f^d \Gamma_f^c X_t^c) W_2 \quad (36)$$

On peut noter une similitude de raisonnement avec la méthode présentée dans (Van Overschee, De Moor, 1996a ; 1997). En effet, à partir de (35) et en posant $M_f = U_f + H_f^c Y_f = \Gamma_f^c X_t^c + R_f$ on obtient :

$$T_f \Gamma_f X_t = Y_f - T_f H_f^d M_f - T_f H_f^s E_f \quad (37)$$

Dans (Van Overschee, De Moor, 1996a ; 1997) il est alors proposé de réaliser l'estimation de $T_f \Gamma_f$ par l'application d'une projection oblique. Cette projection oblique est contenue dans une matrice de pondération $W_2^{\text{V.O. et al., 1997}}$ permettant la suppression des termes en M_f et E_f :

$$W_2^{\text{V.O. et al., 1997}} = /_{M_f} Z_p^{\text{V.O. et al., 1997}} \Pi_{M_f}^\perp \quad (38)$$

avec $Z_p^{\text{V.O. et al., 1997}} = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix}$, on établit alors :

$$W_1 T_f \Gamma_f X_t W_2^{\text{V.O. et al., 1997}} = W_1 Y_f W_2^{\text{V.O. et al., 1997}} \quad (39)$$

Ainsi une différence essentielle entre les deux méthodes réside dans la compensation du terme $\Gamma_f^c X_t^c$:

- Dans la méthode présentée ici ce terme est compensé dans (36) simplement par soustraction, cette soustraction étant réalisable si $T_f H_f^d$ est calculée au préalable (ce qui est fait via la résolution du problème (30)).
- Dans la méthode présentée dans (Van Overschee, De Moor, 1996a ; 1997) ce terme est supprimé directement par le biais de la projection oblique.

Une autre différence importante est l'application ici d'une première SVD sur $W_1 Y_f W_2$. Cette décomposition va permettre de réduire la variance d'estimation comme illustré dans la section 4. Notons que les deux méthodes nécessitent l'estimation de la matrice T_f et que l'estimation des matrices d'états (A, B, C, D) est là aussi relativement semblable (pour les matrices A et C les deux méthodes sont identiques). Quelques autres éléments de comparaison sont présentés dans la section 4.

REMARQUE.— Les résultats précédents nécessitent la connaissance des paramètres de Markov du régulateur : dans (26) et (31). Remarquons ici que l'équation (8) peut s'écrire comme suit $(U_f - R_f) = \Gamma_f^c X_t^c - H_f^c Y_f$. Cette équation ne fait apparaître aucun terme de bruit, par conséquent la matrice H_f^c peut être aisément calculée à partir d'un algorithme d'identification par sous-espaces de type boucle ouverte.

REMARQUE.— **Analogie avec la méthode proposée dans (Katayama, Tanaka, Enomoto, 2005; Katayama, Tanaka, 2007)** : la méthode simultanée présentée dans (Katayama, Tanaka, Enomoto, 2005; Katayama, Tanaka, 2007) propose aussi une procédure en deux temps. Tout d'abord une analyse de la boucle est réalisée par l'intermédiaire de la projection orthogonale suivante :

$$\begin{pmatrix} \widehat{U}_f \\ \widehat{U}_p \\ \widehat{Y}_p \\ \widehat{Y}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_f \\ U_p \\ Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} \Pi \begin{pmatrix} R_p \\ R_f \end{pmatrix} \quad (40)$$

Ceci donne pour $j \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} \widehat{X}_t &= A^p \widehat{X}_{t-p} + \Delta_p^d \widehat{U}_p \\ \widehat{Y}_f &= \Gamma_f \widehat{X}_t + H_f^d \widehat{U}_f \end{cases} \quad (41)$$

avec $\widehat{X}_t = X_t \Pi \begin{pmatrix} R_p \\ R_f \end{pmatrix}$ et $\widehat{X}_{t-p} = X_{t-p} \Pi \begin{pmatrix} R_p \\ R_f \end{pmatrix}$. Cette projection orthogonale permet ainsi une élimination des composantes de bruit. Ensuite, une seconde projection est réalisée afin d'isoler la matrice d'observabilité étendue Γ_f :

$$\Gamma_f \widehat{X}_t / \widehat{U}_f \widehat{Z}_p \Pi_{\widehat{U}_f}^\perp = \widehat{Y}_f / \widehat{U}_f \widehat{Z}_p \Pi_{\widehat{U}_f}^\perp \quad (42)$$

avec $\widehat{Z}_p = \begin{pmatrix} \widehat{U}_p \\ \widehat{Y}_p \end{pmatrix}$. La suite de l'algorithme est semblable à la méthode proposée dans cette étude : SVD, estimation de Γ_f et estimation des matrices d'état. D'une certaine manière, dans la méthode proposée ici l'utilisation de la connaissance du régulateur dans (25) se substitue à la double projection réalisée ci-dessus. Les résultats de simulation dans la section 4 vont faire apparaître une variance moindre dans notre approche.

3.2. L'algorithme

Dans cette section nous proposons l'algorithme d'estimation d'une réalisation des matrices d'état (A, B, C, D) . Cette estimation peut être réalisée via la reconstruction d'une séquence de l'état ((Van Overschee, De Moor, 1996b)), cependant ici nous présentons la solution utilisant les propriétés structurelles de la matrice d'observabilité étendue Γ_f .

Cet algorithme va bien entendu s'appuyer sur les estimations justifiées dans le paragraphe précédent. Les étapes de l'algorithme, présentées sur la figure 2, sont les suivantes :

étape 1 : Calcul de la décomposition QR

$$\begin{pmatrix} R_f \\ Z_p \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ N_3^T \end{pmatrix} \quad (43)$$

ce qui donne accès à la première projection $\mathcal{O}_f^{bf} = W_1 M_{32} N_2^T$.

étape 2 : Calcul de la SVD (22) et extraction de $\Gamma_f^{bf} = W_1^{-1} U_1$.

étape 3 : Estimation de $T_f H_f^d$ et T_f

étape 4 : Calcul de $\Gamma_f^c X_t^c = U_f + H_f^c Y_f - R_f$ puis calcul de la décomposition QR

$$\begin{pmatrix} R_f \\ Z_p \\ T_f H_f^d \Gamma_f^c X_t^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix} \quad (44)$$

ce qui donne accès à la seconde projection $\mathcal{O}_f = (W_1 T_f)^{-1} (U_1 S_1 V_1^T - W_1 R_{32} Q_2^T)$.

étape 5 : Calcul de la SVD (34) et extraction de $\Gamma_f = U' U_1$.

étape 6 : Estimation des matrices d'état A et C à partir de²:

$$C = \Gamma_f(1 : n_y, :) \quad (45)$$

$$A = (\underline{\Gamma}_f^T \underline{\Gamma}_f)^{-1} \underline{\Gamma}_f^T \overline{\Gamma}_f \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\Gamma}_f = \Gamma_f(1 : (f-1)n_y, :) \\ \overline{\Gamma}_f = \Gamma_f(n_y + 1 : fn_y, :) \end{cases} \quad (46)$$

Estimation des matrices d'état B et D à partir de l'égalité:

$$\left(T_f^{-1} \Gamma_f^{bf} \right)^\perp T_f^{-1} Y_f \Pi_Z = \left(T_f^{-1} \Gamma_f^{bf} \right)^\perp H_f^d(B, D) R_f \quad (47)$$

Ceci va consister en la minimisation suivante:

$$\min \left| \left(T_f^{-1} \Gamma_f^{bf} \right)^\perp T_f^{-1} Y_f \Pi_Z - \left(T_f^{-1} \Gamma_f^{bf} \right)^\perp H_f^d(B, D) R_f \right|_2 \quad (48)$$

en utilisant la procédure décrite dans (Van Overschee, De Moor, 1996b).

REMARQUE.— Notons que l'absence de bouclage correspond au cas $H_f^c = 0$, $\Gamma_f^c = 0$, $R_f = U_f$ et $R_p = U_p$. En conséquence, dans un contexte de boucle ouverte l'algorithme proposé se réduit aux étapes 1, 2 et 6. Ceci correspond alors à un algorithme de type MOESP : avec $Z_p = U_p$ notre algorithme est équivalent à l'algorithme PI-MOESP, avec $Z_p = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix}$ notre algorithme est équivalent à l'algorithme PO-MOESP.

2. En utilisant des notations MATLAB©

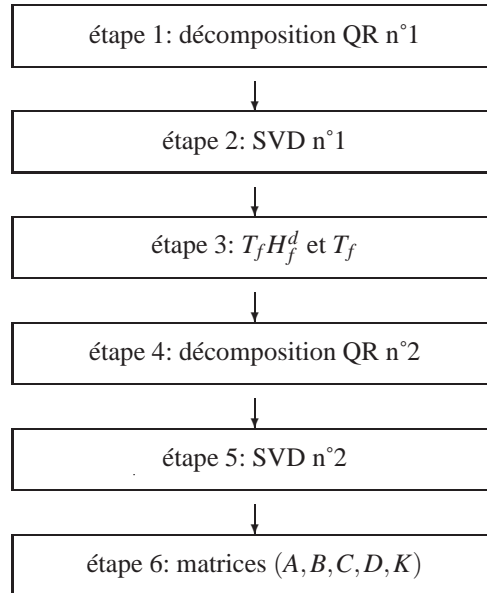


Figure 2. Algorithme d'application

3.3. La partie stochastique

Le modèle stochastique est caractérisé par la matrice $K \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$ et la variance de $e(t) : \sigma^2 = \mathcal{E} \{e(t)e(t)^T\}$. Ces paramètres peuvent être estimés en utilisant l'approche proposée dans (Knudsen, 2002). Sous les conditions posées dans le premier résultat on a

$$Y_f \Pi_Z^\perp = \Gamma_f^{bf} X_t^{bf} \Pi_Z^\perp + T_f H_f^s E_f = M_{33} N_3^T \quad (49)$$

ce qui donne

$$\left(\widehat{T}_f^{-1} \widehat{\Gamma}_f^{bf} \right)^\perp \widehat{T}_f^{-1} Y_f \Pi_Z^\perp = \left(\widehat{T}_f^{-1} \widehat{\Gamma}_f^{bf} \right)^\perp H_f^s E_f \quad (50)$$

Notons P la décomposition de Cholesky suivante :

$$PP^T = T_f^{-1} Y_f \Pi_Z^\perp \left(T_f^{-1} Y_f \Pi_Z^\perp \right)^T \quad (51)$$

Alors K et σ peuvent être estimés par la minimisation suivante

$$\min \left| \left(T_f^{-1} \Gamma_f^{bf} \right)^\perp P - \left(T_f^{-1} \Gamma_f^{bf} \right)^\perp H_f^s (K, \sigma_e) \right|_2 \quad (52)$$

Remarquons, comme énoncé dans (Knudsen, 2002), la similitude des problèmes (30), (48) et (52).

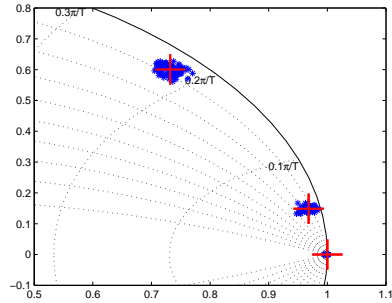


Figure 3. Résultat méthode 1 - série 1

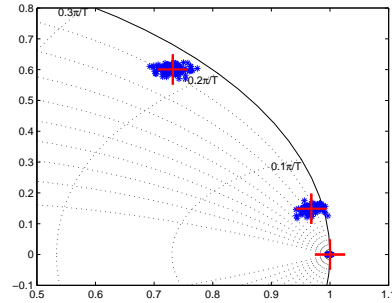


Figure 4. Résultat méthode 2 - série 1

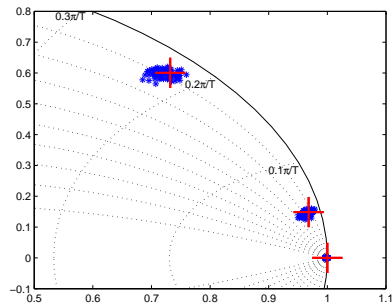


Figure 5. Résultat méthode 3 - série 1

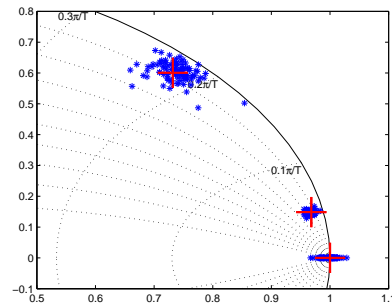


Figure 6. Résultat méthode 4 - série 1

4. Mise en œuvre

4.1. Exemple de simulation

Dans cette sous-section nous considérons un système d'ordre 5 présenté dans (Verhaegen, 1993) et utilisé comme benchmark dans (Van Overschee, De Moor, 1996a) pour traiter le problème de l'identification en boucle fermée par sous-espaces. Cet exemple a aussi été adopté pour comparaison, entre autre, dans (Pouliquen, M'Saad, 2003), (Lin *et al.*, 2005), (Katayama, Tanaka, Enomoto, 2005), (Huang *et al.*, 2005), (Gilson, Mercere, 2006) et (Katayama, Tanaka, 2007).

Les fonctions de transfert du système et du régulateur sont respectivement :

$$G(q) = 10^{-3}q^{-1} \frac{0.98 + 12.99q^{-1} + 18.59q^{-2} + 3.3q^{-3} - 0.02q^{-4}}{1 - 4.4q^{-1} + 8.09q^{-2} - 7.83q^{-3} + 4q^{-4} - 0.86q^{-5}} \quad (53)$$

$$C(q) = \frac{0.63 - 2.083q^{-1} + 2.8222q^{-2} - 1.865q^{-3} + 0.4978q^{-4}}{1 - 2.65q^{-1} + 3.11q^{-2} - 1.75q^{-3} + 0.39q^{-4}} \quad (54)$$

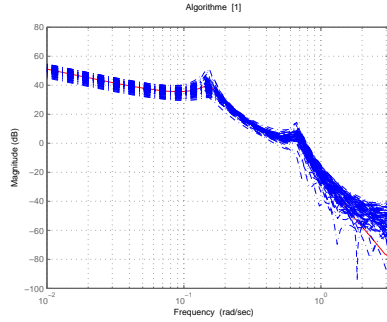


Figure 7. Résultat méthode 1 - série 1

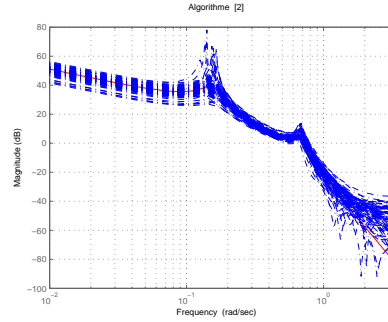


Figure 8. Résultat méthode 2 - série 1

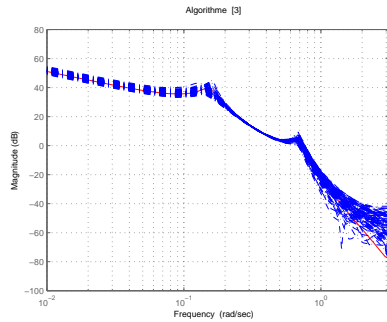


Figure 9. Résultat méthode 3 - série 1

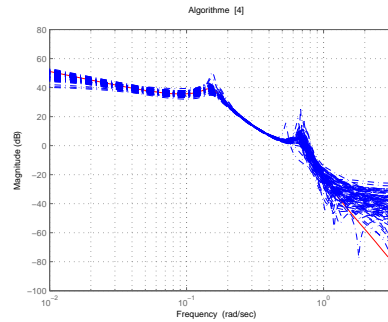


Figure 10. Résultat méthode 4 - série 1

Notons qu'une particularité de ce système est la présence d'un pôle en 1 (système comportant un intégrateur).

L'entrée exogène $r(t)$ est une séquence binaire aléatoire de variance unitaire. La séquence d'innovation est un bruit blanc gaussien de variance 0.111 et le modèle de bruit est donné par :

$$H(q) = \frac{1 - 2.1q^{-1} + 1.45q^{-2} - 0.315q^{-3} - 0.0146q^{-4} + 0.0034q^{-5}}{1 - 4.4q^{-1} + 8.09q^{-2} - 7.83q^{-3} + 4q^{-4} - 0.86q^{-5}} \quad (55)$$

Cet exemple académique est utilisé ici afin de comparer 4 méthodes d'identification par sous-espaces en boucle fermée : la méthode indirecte proposée ici, celle présentée dans (Van Overschee, De Moor, 1996a ; 1997), la méthode directe SSARX proposée dans (Jansson, 2003 ; 2005) et la méthode simultanée introduite dans (Katayama, Tanaka, Enomoto, 2005; Katayama, Tanaka, 2007). Quatre séries de tests, correspondantes à quatre séries de Monte Carlo, ont été réalisées, chacune d'elles révélant des caractéristiques des méthodes citées ci-avant.

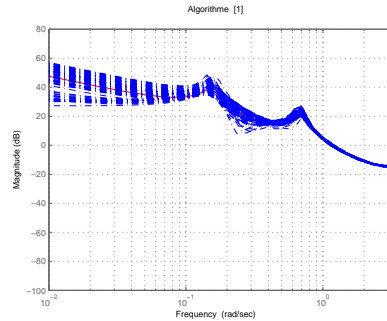


Figure 11. Résultat méthode 1
- modèle de bruit - série 1

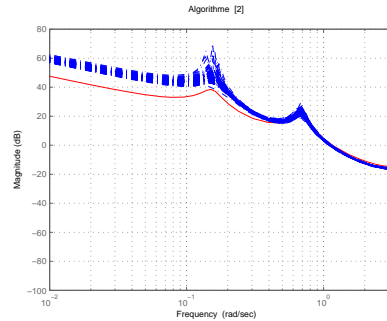


Figure 12. Résultat méthode 2
- modèle de bruit - série 1

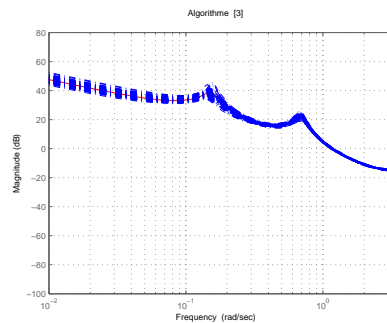


Figure 13. Résultat méthode 3
- modèle de bruit - série 1

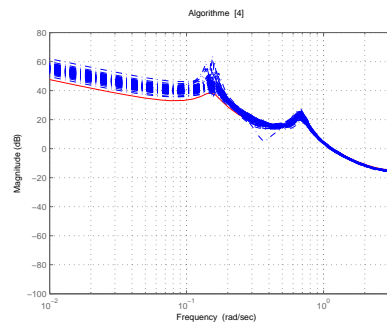


Figure 14. Résultat méthode 4
- modèle de bruit - série 1

4.1.1. Première série de tests

Dans une première série de tests le nombre de données disponibles est tel que le nombre de colonnes dans les matrices de Hankel est $j = 1200$ (comme dans (Van Overschee, De Moor, 1996a) et la plupart des autres références citées ci-dessus) et nous avons généré 100 séries de données. Sur chacune de ces séries la séquence d'excitation $r(t)$ reste inchangée, en revanche la séquence de bruit est à chaque fois différente.

Afin de juger de l'intérêt de la méthode proposée, nous avons testé sur ces 100 séries de données les quatre méthodes d'identification de la manière suivante :

- méthode 1 : il s'agit de la méthode proposée dans cette étude. Nous avons choisi $f = 15$ et $Z_p = \begin{pmatrix} R_p \\ Y_p \end{pmatrix}$, où les matrices R_p et Y_p sont construites avec $p = 15$. Les paramètres de Markov du régulateur sont supposés connus.

- méthode 2 : cette méthode correspond à la méthode indirecte proposée dans (Van Overschee, De Moor, 1996a ; 1997) (avec $p = f = 10$ – comme utilisé dans (Van

Overschee, De Moor, 1996a)).

– méthode 3 : cette méthode correspond à la méthode directe SSARX proposée dans (Jansson, 2003 ; 2005) (avec $p = 30$ et $f = 10$ – le meilleur choix après plusieurs essais). Il est à noter que cette méthode SSARX est asymptotiquement équivalente (voir (Chiuso, 2006a)) à la méthode PBSID (Chiuso, Picci, 2005a ; 2005b), ainsi nous ne présentons ici que SSARX.

– méthode 4 : cette méthode correspond à la méthode simultanée proposée dans (Katayama, Tanaka, Enomoto, 2005; Katayama, Tanaka, 2007) (avec $p = 20$ et $f = 20$ – le meilleur choix après plusieurs essais).

La figure 3 présente les résultats d'estimation sur notre méthode : sur cette figure apparaissent les pôles estimés * et les pôles réels du système +. Nous pouvons voir que notre méthode indirecte fonctionne assez bien en dépit d'une remarque : les pôles $0,7319 \pm 0,6007i$ sont plus difficilement estimés, la variance d'estimation étant plus importante que pour les autres pôles.

Les figures 4, 5 et 6 présentent les estimations obtenues à partir des méthodes 2, 3 et 4. La méthode indirecte proposée ici fonctionne assez bien par rapport aux autres : il ne semble pas apparaître de biais et la variance est moindre que pour certaines autres méthodes. La méthode pour laquelle les résultats sont les plus dégradés semble être la quatrième méthode. On observe en effet une difficulté d'estimation du pôle en 1 et des pôles $0,9681 \pm 0,1486i$.

Les figures 7, 8, 9 et 10 présentent le gain fréquentiel des modèles estimés par les différentes méthodes. Il apparaît que toutes les méthodes sont non biaisées, hormis en hautes fréquences. La méthode SSARX présente la variance d'estimation la plus faible. Remarquons aussi que la variance de la méthode proposée ici est plus faible que celle des méthodes 2 et 4.

Ainsi, sur cet exemple académique et avec ces conditions de simulation ($j = 1200$ et $\sigma = 1/3$), notre approche semble compétitive par rapport aux autres méthodes de la littérature. L'approche proposée ici nous semble plus simple en termes de mise en œuvre par rapport aux méthodes directes (SSARX et PBSID) néanmoins cette simplicité à un prix : la connaissance du régulateur.

Tableau 1. Estimation de la variance du bruit

valeur réelle	méthode 1	méthode 2	méthode 3	méthode 4
$\sigma_e^2 = 0,1111$	0,1067	0,1414	0,1058	0,1240

Pour ce qui est du modèle de bruit, les figures 11, 12, 13 et 14 présentent les estimations de sa réponse fréquentielle par les quatre méthodes. Sur l'ensemble des 100 séries de données, les moyennes des estimations de la variance σ_e^2 sont données dans le tableau 1, l'adaptation de la méthode proposée par (Knudsen, 2002) apparaît ainsi cohérente.

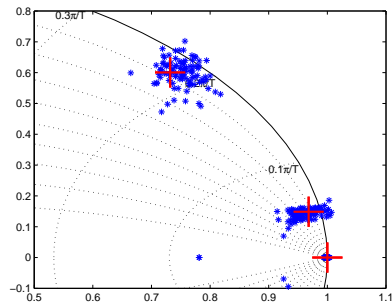


Figure 15. Résultat méthode 1 - série 2

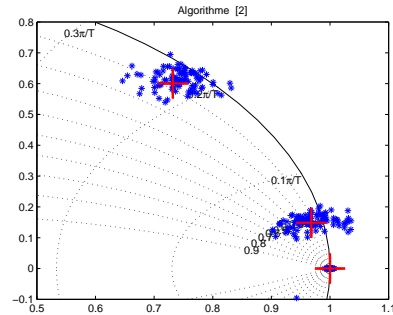


Figure 16. Résultat méthode 2 - série 2

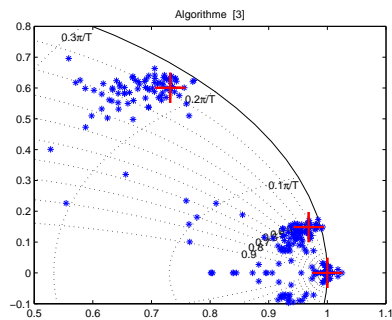


Figure 17. Résultat méthode 3 - série 2

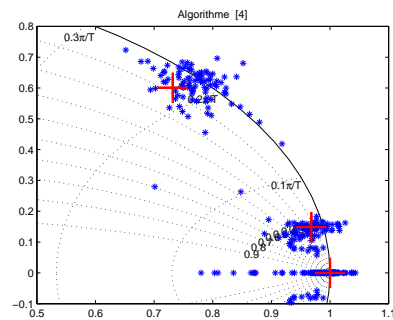


Figure 18. Résultat méthode 4 - série 2

4.1.2. Deuxième et troisième série de tests

Afin d'avoir une idée plus précise du comportement de la méthode proposée vis à vis du comportement des autres méthodes, nous avons durci les conditions de simulation :

- Dans une deuxième série de tests nous avons réduit le nombre de données disponibles: le niveau de bruit reste le même, simplement le nombre de colonnes dans les matrices de Hankel est 6 fois moindre : $j = 200$. Les mêmes méthodes ont été testées sur 100 jeux de données différents avec ici encore un ajustement des paramètres de synthèse pour chaque méthode.

Les figures 15, 16, 17 et 18 présentent les pôles estimés par les différentes méthodes, les figures 19, 20, 21 et 22 présentent le gain fréquentiel des modèles estimés.

Les dégradations des performances de chacune des méthodes sont nettement visibles, néanmoins ces dégradations n'ont pas toute la même ampleur suivant les méthodes. Les pôles $0,9681 \pm 0,1486i$ sont "assez bien estimés" par la méthode proposée ici, plus difficilement par les autres méthodes. La troisième méthode, qui auparavant affichait les résultats les plus intéressants, présente ici des résultats plus nuancés : biais et forte variance sur les pôles $0,7319 \pm 0,6007i$ et sur le pôle en 1.

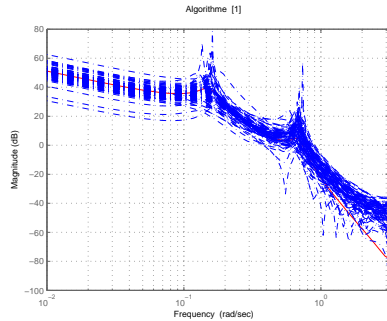


Figure 19. Résultat méthode 1 - série 2

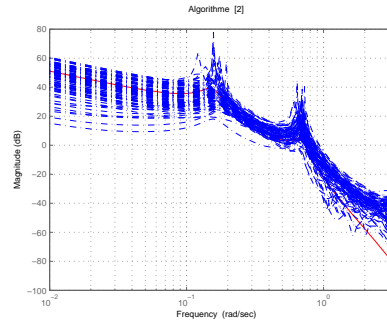


Figure 20. Résultat méthode 2 - série 2

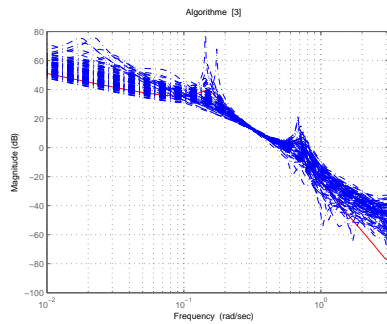


Figure 21. Résultat méthode 3 - série 2

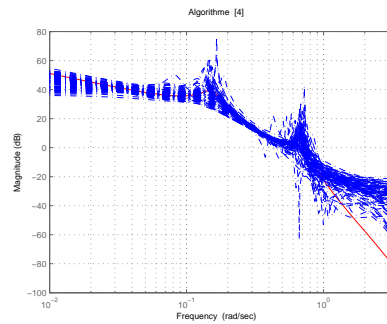


Figure 22. Résultat méthode 4 - série 2

En observant conjointement la position des pôles estimés et les gains fréquentiels estimés il apparaît que la méthode proposée dans cette étude affiche les meilleures performances.

– Dans une troisième série de tests nous avons maintenu le nombre de colonnes dans les matrices de Hankel à $j = 1200$ et doublé l'écart type du bruit $\sigma = 2/3$. Les mêmes méthodes sont ici encore testées sur 100 jeux de données différents.

Les figures 23, 24, 25 et 26 présentent les pôles estimés par les différentes méthodes, les figures 27, 28, 29 et 30 présentent le gain fréquentiel des modèles estimés.

La quatrième méthode fait toujours apparaître une variance importante sur l'estimation des pôles, la troisième méthode retrouve des performances plus proches de celles qu'elle avait lors de la première série de tests.

Comparativement à la deuxième méthode, ici encore la méthode proposée dans cette étude fait apparaître une variance plus faible sur le gain fréquentiel estimé et sur l'estimation du pôle $0,7319 \pm 0,6007i$.

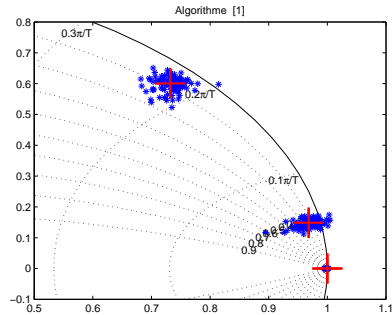


Figure 23. Résultat méthode 1 - série 3

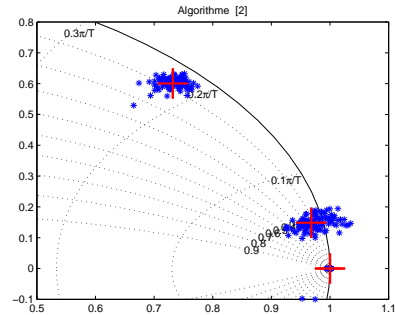


Figure 24. Résultat méthode 2 - série 3

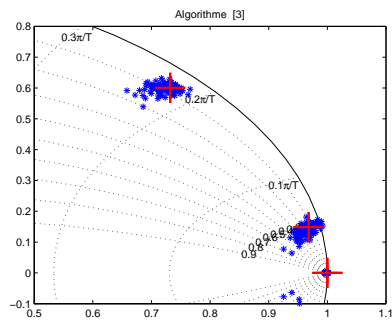


Figure 25. Résultat méthode 3 - série 3

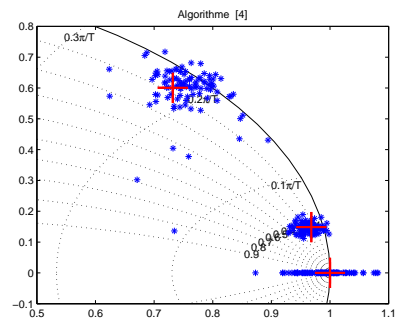


Figure 26. Résultat méthode 4 - série 3

4.1.3. Quatrième série de tests

L'application de cette méthode d'identification, comme la plupart des méthodes par sous-espaces, nécessite le choix des paramètres f et p dimensionnant les matrices de Hankel. L'expérience montre que la qualité des estimations est parfois fortement conditionnée par un choix judicieux de ces paramètres. Afin de compléter l'étude nous avons étudié l'impact de ces paramètres sur la qualité des estimées. Pour la quatrième série de tests les conditions expérimentales sont les mêmes que pour la deuxième série : le nombre de colonnes dans les matrices de Hankel est $j = 200$ et l'écart type du bruit est $\sigma = 1/3$.

Nous avons réalisé des estimations pour 9 choix différents des paramètres f et p :

1. le premier choix, $(f = f_o; p = p_o)$, désigne le choix "optimal" c'est à dire celui pour lequel les estimations sont les plus consistantes par le biais de cette méthode d'identification;
2. les 8 autres choix sont de la forme $(f = f_o \pm 4; p = p_o \pm 4)$.

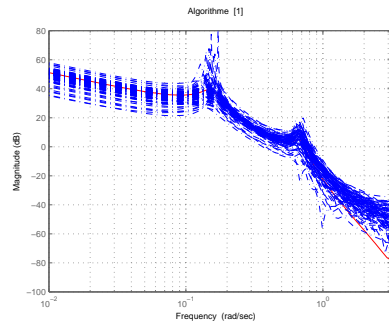


Figure 27. Résultat méthode 1 - série 3

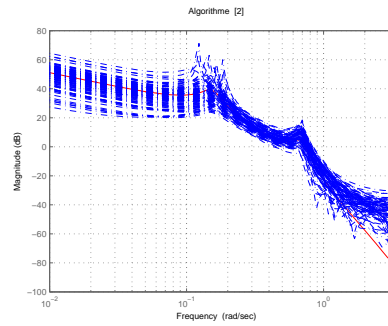


Figure 28. Résultat méthode 2 - série 3

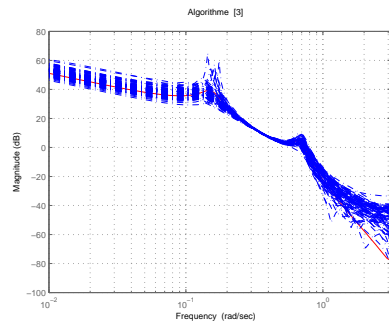


Figure 29. Résultat méthode 3 - série 3

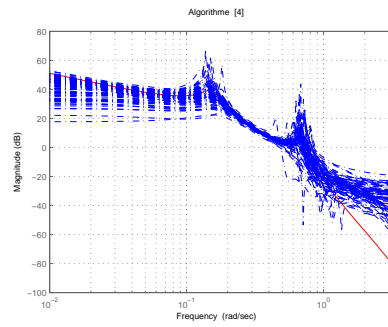


Figure 30. Résultat méthode 4 - série 3

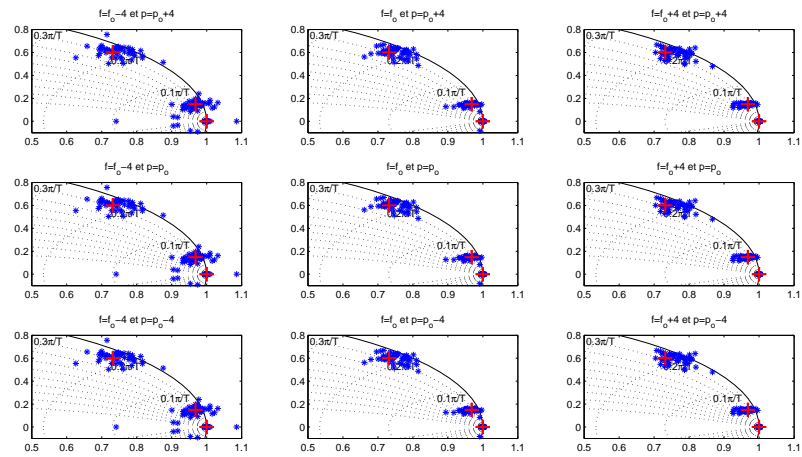


Figure 31. Pôles estimés - série 4

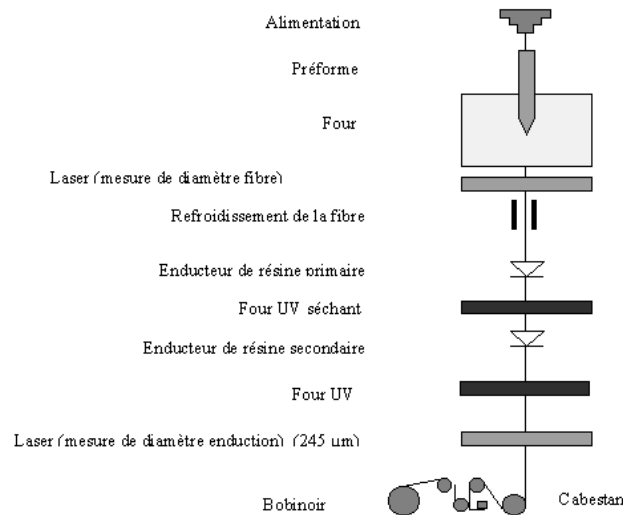


Figure 32. Tour de fibrage

La figure 31 récapitule l'ensemble des pôles estimés: au centre la position des pôles estimés avec le choix "optimal" ($f = f_o; p = p_o$), autour la position des pôles estimés avec les 8 autres choix. Pour la plupart des choix du type ($f = f_o \pm 4; p = p_o \pm 4$) il apparaît une légère altération des résultats par rapport au choix optimal.

En termes de mise en œuvre, pour un problème d'identification donné, nous conseillons de réaliser un maillage sur différentes valeurs de ces paramètres de synthèse. Ceci va permettre de cerner itérativement des valeurs pour lesquelles les estimations sont de bonne qualité.

4.2. Application industrielle

Afin d'observer le comportement de la méthode dans un contexte réel, nous l'avons testée lors d'une phase d'identification en boucle fermée d'un procédé industriel. Le procédé en question est une tour de fibrage schématisée sur la figure 32. Le haut de la tour est constitué d'un four à induction dont la température est de l'ordre de 2000°C et dans lequel un barreau de verre (la préforme) descend lentement. Cette préforme est suspendue à plusieurs mètres de haut par une de ses extrémités. Sous l'effet de la température et de la gravité une goutte se forme et s'écoule à l'autre extrémité de la préforme. Cet écoulement fin est récupéré, étiré et subit différents traitements chimiques ce qui constitue la fibre optique. Celle-ci est alors entraînée par un cabestan situé en bas de la tour et est enroulée sur un bobinoir.

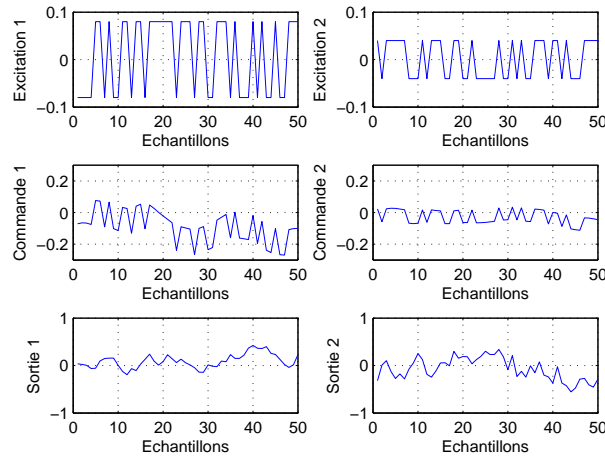


Figure 33. Données utilisées lors de la phase d'estimation

La qualité de la production de fibre optique dépend, entre autres choses, de la vitesse de fibrage et de la tension de fibrage : la tension de fibrage agit sur deux caractéristiques physiques de la fibre (la longueur d'onde de coupure et l'atténuation), la vitesse de fibrage est liée à des objectifs de rendement en vue d'optimiser le temps d'occupation de la tour. Il est possible d'asservir ces deux grandeurs par l'intermédiaire d'une commande sur la vitesse de descente de la préforme dans le four et d'une commande sur la puissance de chauffe du four. Du fait de couplages internes, le système considéré ici est un système multivariable constitué de deux entrées et deux sorties :

- entrée 1 = vitesse de descente de la préforme;
- entrée 2 = puissance de chauffe;
- sortie 1 = vitesse de fibrage;
- sortie 2 = tension de fibrage.

Afin de stabiliser le système autour d'un point de fonctionnement, une première synthèse de régulateur a été réalisée. Pour des raisons économiques et afin de permettre une meilleure synthèse de régulateur nous avons réalisé une identification en boucle fermée du procédé.

Nous avons utilisé deux jeux de données: deux expériences avec deux préformes. Le premier jeu de données a été utilisé pour la phase d'estimation, le second pour la phase de validation du modèle. Remarquons que la période d'échantillonnage est supérieure à la minute ce qui ne permet pas de disposer de beaucoup de données: chaque jeu de données est constitué de seulement 150 échantillons environ. Les données représentées sur la figure 33 sont celles utilisées lors de la phase d'estimation. Elles sont normalisées et par conséquent n'ont aucune unité.

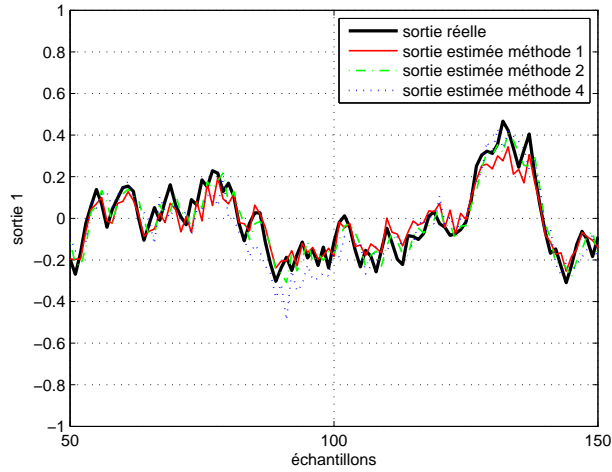


Figure 34. Comparaison entre la sortie réelle 1 et ses estimations

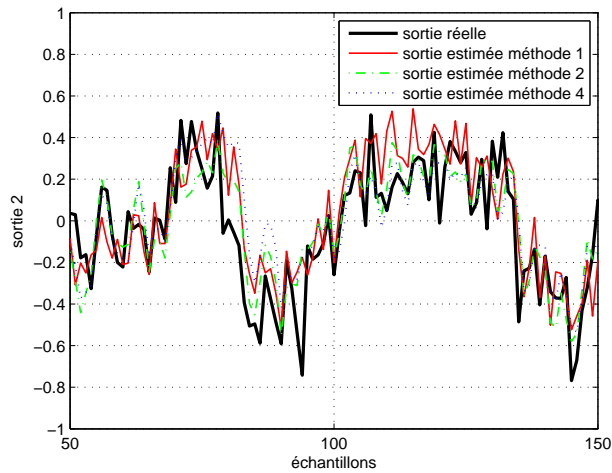


Figure 35. Comparaison entre la sortie réelle 2 et ses estimations

Durant l'étape d'estimation nous avons testé les quatre méthodes d'identification comparées dans la sous-section précédente. Malgré un ajustement des paramètres de synthèse et de l'ordre du modèle nous ne sommes pas parvenus à la synthèse d'un modèle stable pour la méthode 3 (méthode SSARX). Nous retrouvons ainsi la difficulté d'estimation énoncée à la sous-section précédente pour cette méthode dans le cas où il y a peu de données disponibles.

Les sorties réelles et sorties simulées avec les modèles obtenus par les méthodes 1, 2 et 4 sont présentées sur les figures 34 et 35: il semble que pour ces trois méthodes le modèle estimé reproduit la majeure partie des dynamiques du système.

Afin de mesurer la qualité des estimations, l'indicateur suivant est introduit :

$$FIT = 100 \left(1 - \frac{|y - \hat{y}|}{|y - \bar{y}|} \right) \quad (56)$$

où \bar{y} désigne la valeur moyenne de y . Le tableau 2 donne la valeur de cet indicateur pour chaque modèle estimé et pour chaque sortie. La méthode proposée ici affiche un meilleur FIT sur la première sortie, pour la seconde sortie c'est la méthode proposée dans (Van Overschee, De Moor, 1996a ; 1997) qui a le meilleur FIT.

Tableau 2. FIT pour les sorties fonction des méthodes d'estimation

	méthode 1	méthode 2	méthode 4
FIT sortie 1	59,3	51,8	40,5
FIT sortie 2	32,4	37,2	31,5

5. Conclusion

Dans cette étude, une méthode indirecte d'identification par sous-espaces en boucle fermée a été proposée. L'idée clé est l'estimation d'une matrice caractéristique du comportement du système de commande permettant une estimation par la suite des caractéristiques du système. Remarquons que deux décompositions QR et deux SVD sont nécessaires et que cet algorithme passe par une estimation de la complexité de la boucle puis par celle du système.

Les études expérimentales proposées ont fourni quelques enseignements intéressants sur l'application de cette méthode et son comportement vis-à-vis de quelques autres méthodes de la littérature. Dans le cas des systèmes stables en boucle ouverte, cette méthode apparaît particulièrement compétitive lorsque des données bruitées et peu nombreuses sont seules disponibles. En revanche, les méthodes types SSARX-PBSID semblent plus performantes si le nombre de données est suffisamment important.

Bibliographie

- Bauer D., Jansson M. (2000). Analysis of the asymptotic properties of the moesp type of subspace algorithms. *Automatica*, vol. 36, n° 4, p. 497-509.
- Chiuso A. (2006a). Asymptotic equivalence of certain closed loop subspace identification methods. *IFAC Symposium on System Identification-Newcastle*.
- Chiuso A. (2006b). Asymptotic variance of closed-loop subspace identification methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, n° 8, p. 1299-1314.

- Chiuso A. (2007). The role of vector auto regressive modeling in predictor based subspace identification. *Automatica*, vol. 43, n° 6, p. 1034-1048.
- Chiuso A. (2010). On the asymptotic properties of closed-loop cca-type subspace algorithms: equivalence results and role of the future horizon. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, n° 3, p. 634-649.
- Chiuso A., Picci G. (2005a). Consistency analysis of some closed loop subspace identification methods. *Automatica*, vol. 41, n° 3, p. 377-391.
- Chiuso A., Picci G. (2005b). Prediction error vs subspace methods in closed loop identification. *IFAC World Congress-Prague*.
- Chou C., Verhaegen M. (1999). Closed loop identification using canonical correlation analysis. *European Control Conference-Karlsruhe*.
- Codrons B., Anderson B., Gevers M. (2002). Closed loop identification with an unstable or nonminimum phase controller. *Automatica*, vol. 38, n° 12, p. 2127-2137.
- Favoreel W., De Moor B., Van Overschee P. (2000). Subspace state space system identification for industrial processes. *Journal of Process Control*, vol. 10, p. 149-155.
- Forsell U., Ljung L. (1999). Closed loop identification revisited. *Automatica*, vol. 35, n° 7, p. 1215-1241.
- Gilson M., Mercere G. (2006). Subspace based optimal iv method for closed loop system identification. *IFAC Symposium on System Identification-Newcastle*.
- Gilson M., Van Den Hof P. (2005). Instrumental variable methods for closed loop system identification. *Automatica*, vol. 41, n° 2, p. 241-249.
- Huang B., Ding S., Qin S. (2005). Closed-loop subspace identification: an orthogonal projection approach. *Journal of Process Control*, vol. 15, p. 53-66.
- Huang B., Kadali R. (2008). *Dynamic modeling, predictive control and performance monitoring. a data-driven subspace approach*. Springer, Berlin.
- Jansson M. (2003). Subspace identification and arx modeling. *IFAC Symposium on System Identification-Rotterdam*.
- Jansson M. (2005). A new subspace identification method for open and closed loop data. *IFAC World Congress-Prague*.
- Katayama T. (2005). *Subspace methods for system identification*. Springer-Verlag.
- Katayama T., Ase H. (2008). A new subspace identification method for closed loop systems using measurable disturbance. *IFAC World Congress-Seoul*.
- Katayama T., Kawauchi H., Picci G. (2005). Subspace identification of closed loop systems by the orthogonal decomposition method. *Automatica*, vol. 41, n° 9, p. 863-872.
- Katayama T., Tanaka H. (2007). An approach to closed loop subspace identification by orthogonal decomposition. *Automatica*, vol. 43, n° 9, p. 1623-1630.
- Katayama T., Tanaka H., Enomoto T. (2005). A simple subspace identification method of closed-loop systems using orthogonal decomposition. *IFAC World Congress-Prague*.
- Katayama T., Yamamoto T. (1995). A state-space model identification of closed loop system based on subspace method. *American Control Conference-Seattle*.

- Knudsen T. (2002). Subspace identification - reducing uncertainty on the stochastic part. *IFAC World Congress-Barcelona*.
- Larimore W. (2004). Large sample efficiency for adaptive subspace identification with unknown feedback. *IFAC DYCOPS'04-Boston*.
- Lin W., Qin S., Ljung L. (2004). On consistency of closed loop subspace identification with innovation estimation. *43rd Control and Decision Conference-Bahamas*.
- Lin W., Qin S., Ljung L. (2005). Comparisons of subspace identification methods for systems operating in closed loop. *IFAC World Congress-Prague*.
- Ljung L. (1999). *System identification: theory for the user*. Prentice Hall.
- Ljung L., Mc Kelvey T. (1996). Subspace identification from closed loop data. *Signal Processing*, vol. 52, p. 209-215.
- Oku H., Fujii T. (2004). Direct subspace model identification of lti systems operating in closed loop. *43rd Control and Decision Conference-Bahamas*.
- Oku H., Ogura Y., Fujii T. (2006). Closed loop subspace model identification based on qr-factorization. *17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems-Kyoto*.
- Oku H., Tanaka H. (2006). Closed loop subspace model identification. *Institute of Systems, Control and Information Engineers*, vol. 50, n° 3, p. 106-111.
- Peternell K., Scherrer W., Deistler M. (1996). Statistical analysis of novel subspace identification methods. *Signal Processing*, vol. 52.
- Pouliquen M., M'Saad M. (2003). Closed loop identification method using a subspace approach. *IFAC Symposium on System Identification-Rotterdam*.
- Qin S. (2006). An overview of subspace identification. *Computers and chemical engineering*, vol. 30, p. 1502-1513.
- Qin S., Lin W., Ljung L. (2005). A novel subspace identification approach with enforced causal models. *Automatica*, vol. 41, n° 12, p. 2043-2053.
- Qin S., Ljung L. (2003). Closed loop subspace identification with innovation estimation. *IFAC Symposium on System Identification-Rotterdam*.
- Söderström T., Stoica P. (1989). *System identification*. Prentice Hall.
- Van Den Hof P., Schrama R. (1993). An indirect method for transfer function estimation from closed loop data. *Automatica*, vol. 29, n° 6, p. 1523-1527.
- Van Overschee P., De Moor B. (1996a). Closed loop subspace system identification. *Technical report - Katholieke Universiteit Leuven*.
- Van Overschee P., De Moor B. (1996b). *Subspace identification for linear systems. theory, implementation applications*. Kluwer Academic Publishers.
- Van Overschee P., De Moor B. (1997). Closed loop subspace system identification. *36th Control and Decision Conference-San Diego*.
- Verhaegen M. (1993). Application of a subspace model identification technique to identify lti systems operating in closed loop. *Automatica*, vol. 29, n° 4, p. 1027-1040.

Wang J., Qin S. (2006). Closed loop subspace identification using the parity space. *Automatica*, vol. 42, n° 2, p. 315-320.

Annexe - Obtention de (14)

- Expression de Y_f .

A partir de (7) et (8) on a

$$Y_f = \Gamma_f X_t + H_f^d (\Gamma_f^c X_t^c - H_f^c Y_f + R_f) + H_f^s E_f \quad (57)$$

d'où

$$(I_{f_{ny}} + H_f^d H_f^c) Y_f = \Gamma_f X_t + H_f^d \Gamma_f^c X_t^c + H_f^d R_f + H_f^s E_f \quad (58)$$

ceci donne

$$Y_f = \begin{pmatrix} T_f \Gamma_f & T_f H_f^d \Gamma_f^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ X_t^c \end{pmatrix} + T_f H_f^d R_f + T_f H_f^s E_f \quad (59)$$

avec $T_f = (I_{f_{ny}} + H_f^d H_f^c)^{-1}$.

- Expression de $X_t^{bf} = \begin{pmatrix} X_t \\ X_t^c \end{pmatrix}$.

A partir de (7) et (8) on a

$$X_t = A^p X_{t-p} + \Delta_p^d (\Gamma_p^c X_{t-p}^c - H_p^c Y_p + R_p) + \Delta_p^s E_p \quad (60)$$

$$X_t = A^p X_{t-p} + \Delta_p^d \Gamma_p^c X_{t-p}^c - \Delta_p^d H_p^c Y_p + \Delta_p^d R_p + \Delta_p^s E_p \quad (61)$$

et d'après de qui précède on a

$$Y_p = T_p \Gamma_p X_{t-p} + T_p H_p^d \Gamma_p^c X_{t-p}^c + T_p H_p^d R_p + T_p H_p^s E_p \quad (62)$$

d'où

$$X_t = A^p X_{t-p} + \Delta_p^d \Gamma_p^c X_{t-p}^c + \Delta_p^d R_p + \Delta_p^s E_p - \Delta_p^d H_p^c (T_p \Gamma_p X_{t-p} + T_p H_p^d \Gamma_p^c X_{t-p}^c + T_p H_p^d R_p + T_p H_p^s E_p) \quad (63)$$

$$X_t = (A^p - \Delta_p^d H_p^c T_p \Gamma_p) X_{t-p} + \Delta_p^d (\Gamma_p^c - H_p^c T_p H_p^d \Gamma_p^c) X_{t-p}^c + \Delta_p^d (I_{pm_u} - H_p^c T_p H_p^d) R_p + (\Delta_p^s - \Delta_p^d H_p^c T_p H_p^s) E_p \quad (64)$$

De la même manière on a $X_t^c = A_c^p X_{t-p}^c - \Delta_p^c Y_p$ ce qui donne avec Y_p .

$$X_t^c = A_c^p X_{t-p}^c - \Delta_p^c (T_p \Gamma_p X_{t-p} + T_p H_p^d \Gamma_p^c X_{t-p}^c + T_p H_p^d R_p + T_p H_p^s E_p) \quad (65)$$

C'est à dire

$$X_t^c = -\Delta_p^c T_p \Gamma_p X_{t-p} + (A_c^p - \Delta_p^c T_p H_p^d \Gamma_p^c) X_{t-p}^c - \Delta_p^c T_p H_p^d R_p - \Delta_p^c T_p H_p^s E_p \quad (66)$$

Ensuite à partir de (64) et (66) on obtient

$$\begin{pmatrix} X_t \\ X_t^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^p - \Delta_p^d H_p^c T_p \Gamma_p & \Delta_p^d (\Gamma_p^c - H_p^c T_p H_p^d \Gamma_p^c) \\ -\Delta_p^c T_p \Gamma_p & A_p^c - \Delta_p^c T_p H_p^d \Gamma_p^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-p} \\ X_{t-p}^c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_p^d (I_{p^{n_u}} - H_p^c T_p H_p^d) \\ -\Delta_p^c T_p H_p^d \end{pmatrix} R_p + \begin{pmatrix} \Delta_p^s - \Delta_p^d H_p^c T_p H_p^s \\ -\Delta_p^c T_p H_p^s \end{pmatrix} E_p \quad (67)$$

L'association de (59) et (67) donne (14).