



HAL
open science

Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire

Stéphane Clivaz

► **To cite this version:**

Stéphane Clivaz. Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire. Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire, 2011, Paris, France. pp.247-261. hal-00823673

HAL Id: hal-00823673

<https://hal.science/hal-00823673>

Submitted on 17 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des mathématiques pour enseigner

Analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire

Stéphane Clivaz

Université de Genève et HEP Vaud

stephane.clivaz@hepl.ch

Résumé

La recherche présentée vise à décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques. Elle s'appuie sur une comparaison à ce sujet entre enseignants chinois et étatsuniens (Ma, 1999), sur les catégories de connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball, Thames & Phelps, 2008), sur la structuration du milieu et sa déclinaison en niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 2002), et sur les critères de pertinence mathématique du professeur élaborés par Bloch (2009).

Dans une première partie, des entretiens avec des enseignants vaudois ont permis de mettre en évidence certaines similitudes avec les enseignants interrogés par Ma. Dans une seconde partie, quatre enseignants ont été observés durant leur enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Les résultats ont été considérés à plusieurs niveaux d'analyse allant jusqu'au grain très fin de la structuration du milieu. Ils font apparaître des liens entre connaissances mathématiques, pertinence et choix didactiques des enseignants.

Mots clés

connaissances mathématiques, enseignant, enseignement primaire, algorithme de la multiplication, pertinence, structuration du milieu, bifurcation didactique

Cette communication est un aperçu du travail de thèse réalisé sous la direction de Jean-Luc Dorier à l'université de Genève (Clivaz, 2011). Quelques éléments de cadrage et de méthodologie sont présentés en première partie. Les principaux résultats sont ensuite énoncés afin de permettre l'exposition de quelques conclusions.

Introduction

La recherche vise à décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques.

Au cours des dernières années, les recherches portant sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement ont pris de l'ampleur dans la communauté scientifique internationale (Bednarz & Proulx, 2009). Ce mouvement s'observe également dans le monde francophone, toutefois plus au Québec qu'en Europe.

Si de nombreuses recherches, en particulier étatsuniennes, tentent d'établir un lien entre les connaissances mathématiques des enseignants et les performances des élèves, les résultats

sont souvent mitigés, voire contradictoires. De plus, même quand un effet est mesuré, les mécanismes permettant de décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leur enseignement restent mystérieux (Hill, Rowan & Ball, 2005, p. 401). Suite aux comparaisons internationales des performances des élèves, certains auteurs ont comparé les connaissances des enseignants. L'étude de Ma (1999) en particulier analyse les connaissances mathématiques d'enseignants chinois et étatsuniens au travers d'un questionnaire mettant les enseignants en situation de classe.

Par ailleurs, si la Théorie des Situations Didactiques (TSD) s'est d'abord axée sur la modélisation de situations d'apprentissage quasi isolées, ne se préoccupant pas de modéliser le rôle du professeur (Bloch, 2005, pp. 59-61), les travaux de didactique des mathématiques francophone étudiant le rôle de l'enseignant se développent depuis les années 1980. Selon Bloch (1999, p. 139), il y a ici la possibilité de permettre l'étude de la contingence, en particulier en tentant d'identifier les connaissances dont l'enseignant a besoin pour gérer une situation d'enseignement/apprentissage. Plusieurs études mettent particulièrement en évidence les connaissances du professeur (Bloch, 2009; Comiti, Grenier & Margolinas, 1995; Coppé, 2007; Grugeon, 2008; Margolinas, 1992; Margolinas, Coulange & Bessot, 2005; Pian, 1999; Robert, 2001; Robert, 2005).

Cadre théorique

Le cadre théorique de la recherche s'appuie sur la structuration du milieu (Margolinas, 1995) et sa déclinaison en niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 2002), sur les catégories de connaissances mathématiques (Ball *et al.*, 2008) et sur les critères de pertinence mathématique du professeur élaborés par Bloch (2009).

Les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement

Ball, Thames et Phelps (2008) proposent de classer les différentes *Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement* (CME) selon le découpage suivant :

Connaissances du sujet :

- Connaissances Mathématiques Communes
- Connaissance de l'Horizon Mathématique
- Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement

Connaissances pédagogiques du contenu :

- Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet
- Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet
- Connaissances des Programmes et des moyens d'enseignement¹. (p. 403)

Les Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement sont des connaissances mathématiques dont ne disposent pas d'autres professionnels utilisant les mathématiques. C'est le cas par exemple quand il s'agit d'expliquer pourquoi « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro », quand il faut analyser des erreurs d'élèves ou quand il faut décider si une procédure originale proposée par un élève est correcte. Une situation particulière nécessitant ces connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement est celle de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication (Ball, Hill & Bass, 2005, pp. 17-21). Ces Connaissances Mathématiques Spécifiques se distinguent des Connaissances Mathématiques Communes, mais aussi des connaissances pédagogiques du contenu :

Knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. [...] Important to note is that each of these common tasks of teaching involves mathematical reasoning as much as it

¹ Ma traduction des termes de (Ball *et al.*, 2008).

does pedagogical thinking². (Ball et al., 2005, p. 21)

La pertinence mathématique

Afin de distinguer les effets des connaissances mathématiques de l'enseignant, Bloch (2009) propose quant à elle de distinguer divers degrés de *pertinence mathématique des interventions du professeur* selon les trois critères suivants :

C1 : [...] capacité à interagir avec les élèves sur des éléments mathématiques de la situation et à encourager l'activité des élèves par des interventions et des retours sur leur production mathématique

C2 : [...] tolérance aux formulations provisoires et approximatives, aux expressions dans l'action, et la capacité à reconnaître les idées mathématiques qui sont incluses dans des ostensifs non canoniques

C3 : [...] aptitude à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation ; ceci inclut la capacité à sélectionner des formulations et à en laisser d'autres de côté, et à gérer la chronologie du débat sans le tuer par l'énoncé immédiat des meilleures productions ou du savoir visé. (p. 33)

Ces trois critères permettent ainsi d'évaluer les connaissances de la matière de l'enseignant en fonction de la manière dont elles conduisent à mettre en place une organisation didactique.

La structuration du milieu

En vue d'analyser ces connaissances et leurs effets, tant sur la mise en place d'organisations didactiques que sur les interactions en classe, nous avons utilisé le modèle de structuration du milieu. Ce modèle a été développé par Margolinas (1992) qui a enrichi la structuration de Brousseau (1986) pour analyser les activités usuelles du professeur et *démêler* des pratiques qui sont imbriquées.

M ₊₃ : M-Construction		P ₊₃ : P-Noosphérien	S ₊₃ : Situation noosphérienne
M ₊₂ : M-Projet		P ₊₂ : P-Constructeur	S ₊₂ : Sit. de construction
M ₊₁ : M-Didactique	E ₊₁ : E-Réflexif	P ₊₁ : P-Projeteur	S ₊₁ : Sit. de projet
M ₀ : M-Apprentissage	E₀: Elève	P₀: Professeur	S₀: Situation didactique
M ₋₁ : M-Référence	E ₋₁ : E-Apprenant	P ₋₁ : P-Observateur	S ₋₁ : Sit. d'apprentissage
M ₋₂ : M-Objectif	E ₋₂ : E-Agissant		S ₋₂ : Sit. de référence
M ₋₃ : M-Matériel	E ₋₃ : E-Objectif		S ₋₃ : Sit. objective

Tableau 1 – Structuration du milieu (Margolinas, 2002, p. 145)

Les niveaux d'activité du professeur et les situations ne sont pas réduits au temps de la leçon en classe, même si certaines phases d'une situation didactique sont partiellement caractérisées par des situations de niveaux différents. Elles ne sont pas non plus temporellement successives (Margolinas, 1995, p. 96), et chaque niveau peut être considéré dans le présent de l'action, mais aussi dans le passé ou le futur. Par exemple, durant le travail en classe, le professeur peut travailler au niveau +1 en projetant une future leçon ou en se souvenant de son travail passé de préparation. De la même manière, il est en tension entre son ambition, qu'elle concerne la leçon (niveau +1), le thème (niveau +2) ou plus généralement l'enseignement (niveau +3) et ce qu'il pense que les élèves pourront répondre (niveau 0) ou la façon dont il souhaite les observer (niveau -1) (Margolinas, 2004, p. 75). La situation didactique S₀ peut ainsi être déterminée soit par une analyse ascendante, de S₋₃ à S₀, du point de vue de l'élève, soit par une analyse descendante, de S₃ à S₀, du point de vue du professeur. Il peut arriver que ces deux situations ne correspondent pas. Margolinas parle alors de bifurcations didactiques (2004, pp. 59-63).

² « Connaître des mathématiques en vue de les enseigner demande un type de profondeur et de détail qui va bien au delà de ce qui est nécessaire pour effectuer l'algorithme de manière fiable. [...] Il est important de remarquer que chacune de ces tâches ordinaires d'enseignement implique un raisonnement *mathématique* autant qu'une pensée pédagogique ». L'italique est de Ball et ses collègues, la traduction est la mienne.

Questions de recherche

Les questions de recherche sont :

1. Quelles sont les connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants vaudois ?
2. En mathématiques et pour des enseignants généralistes, à quels niveaux d'activité du professeur les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement se manifestent-ils ?
3. Quels effets les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants ont-ils sur la pertinence mathématique de leurs interventions et sur l'organisation didactique de leurs cours de mathématiques à l'école primaire ?

Méthodologie

Le dispositif de recherche comporte deux parties. Dans une première partie, au moyen d'un entretien semi-dirigé repris, en partie, de Ma (1999), mettant en scène des situations d'enseignement et nécessitant le recours aux connaissances mathématiques de l'enseignant, 16 enseignants primaires vaudois ont été interrogés et leurs connaissances ont été comparées à celles relevées par Ma auprès d'enseignants chinois et étatsuniens.

Dans une seconde partie, nous avons observé toutes les leçons à propos de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres chez quatre enseignants de 4^{ème} primaire³. Le nombre de séances varie entre deux et neuf. Il s'agit d'une observation de type « naturaliste » (Comiti *et al.*, 1995, pp. 98-99), c'est-à-dire que nous ne sommes pas intervenus sur le choix des activités laissé au libre arbitre de chaque enseignant. Les observations ont été précédées et suivies d'un entretien semi-dirigé. Les leçons ont été filmées (caméra en fond de classe et micro cravate pour l'enseignant) et quelques passages significatifs du point de vue des connaissances mathématiques pour l'enseignement ont été mis en évidence. Les enregistrements des séquences et des entretiens ont été traités à l'aide du logiciel Transana (Fassnacht & Woods, 2002-2011) afin de relever pour chaque extrait le niveau d'activité du professeur et, pour les passages où des connaissances mathématiques sont utilisées, leur type et leur pertinence. Ces extraits peuvent être situés dans la séquence grâce à la réalisation d'un synopsis (Schneuwly, Dolz & Ronveaux, 2006) et d'une macrostructure (Dolz & Toulou, 2008).

Résultats

Les résultats obtenus sont de quatre types, esquissés maintenant en allant vers un grain d'analyse de plus en plus fin.

Les connaissances de mathématiques fondamentales des enseignants vaudois

Le premier type de résultats concerne le prolongement de la comparaison internationale de Ma. Cette comparaison conduisait à opposer les enseignants étatsuniens et les enseignants chinois sur presque toutes les caractéristiques de leurs connaissances des mathématiques élémentaires et de l'usage qu'ils en font pour l'enseignement. Notre étude tend à situer les enseignants vaudois interrogés entre ces deux extrêmes, ce que nous illustrons par une des questions tirées de l'étude de Ma (1999) concernant l'algorithme de la soustraction et l'usage de l'analogie de l'échange.

³ 4^{ème} primaire, ou 4P : élèves de 9 à 10 ans, équivalent CM1 en France.

Prenons quelques instants pour réfléchir à un sujet particulier avec lequel vous pourriez avoir à travailler quand vous enseignez : l'algorithme de soustraction par échange.

Examinons ces questions :

$$\begin{array}{r} 52 \quad 91 \quad 102 \\ -25 \quad -79 \quad -15 \\ \hline \end{array} \quad \text{etc.}$$

Comment approcheriez-vous ces calculs si vous enseigniez en 3e primaire ? Que pensez-vous que des enfants devraient comprendre ou être capables de faire avant de pouvoir commencer à apprendre la soustraction avec échanges ?

Lors des entretiens, la plupart des enseignants ont débuté par ce qu'ils souhaitaient que leurs élèves apprennent. Pour les enseignants étatsuniens, il s'agit très majoritairement (83%) de la technique de calcul et ils l'expriment sous forme d'un emprunt au groupement d'ordre supérieur. Les enseignants chinois en revanche privilégient la compréhension, en axant leurs explications sur la décomposition de l'entité supérieure (51%), voire en donnant plusieurs décompositions (35%)⁴. Les enseignants vaudois interrogés se situent à mi-chemin. 55% d'entre eux privilégient la technique et l'illustrent par l'idée d'emprunt. 45% mettent en avant la compréhension en parlant de décomposition. Aucun d'entre eux n'utilise plusieurs décompositions.

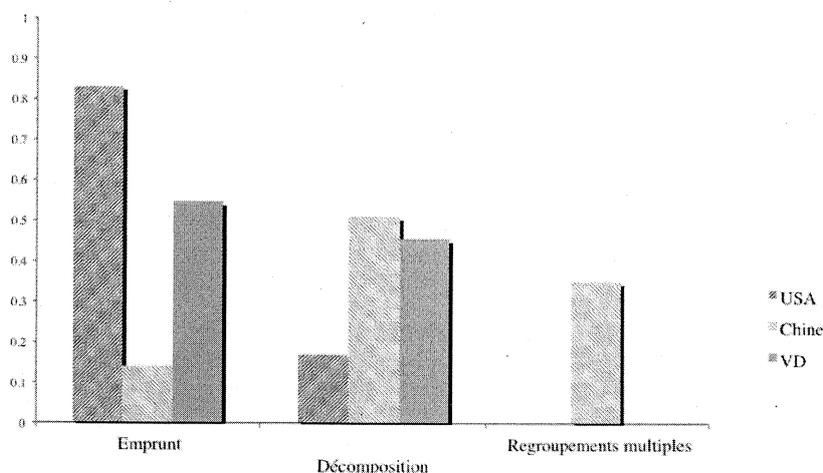


Figure 1 : Compréhension de la soustraction avec retenues.

La présentation de la soustraction avec retenue par les enseignants vaudois interrogés utilise souvent des images. La plus courante est celle d'un emprunt chez le voisin ou chez la voisine. Cette image est à la fois mathématiquement incorrecte et dangereuse car elle incite à penser que les chiffres d'un nombre sont indépendants et qu'un nombre peut changer arbitrairement au cours du calcul. Ce danger est illustré par les déclarations de plusieurs enseignants, par exemple celle de Kate :

Je leur donne la technique que, quand ils ont pas assez dans leur réserve, ils doivent aller chercher des réserves ailleurs. Donc, Madame unité qui est toute seule, doit aller chercher des réserves chez sa copine la dizaine, qui en a tout plein à côté. Donc elle traverse la rue, elle frappe à la porte : "Toc, toc... Bonjour, les dizaines, j'aurais besoin de réserves, parce que je dois faire une grosse livraison et j'ai pas assez". Comme la dizaine est sympa parce qu'elle en a 9, elle va lui donner une dizaine. Mais l'unité ne peut pas amener une dizaine chez elle, elle doit la transformer en unités, donc elle va ramener 10 unités à la maison, puis,

⁴ Par exemple pour $53-26 = 53-(20+3+3) = 53-20-3-3 = 50-20-3 = 47-20 = 27$

comme elle en a déjà une, ça fait 11... Donc là j'explique aux enfants de ... Je leur dis que notre dizaine qui en avait 9, elle en a plus que 8, parce qu'elle a été sympa et elle en a donné une dizaine à ses copines, à sa copine l'unité... L'unité, elle transforme cette dizaine en unités, donc il y en a 10, mais elle en avait déjà une. Donc elle en a maintenant 11. Parce qu'elle a fait 10 plus 1, et puis souvent au début je leur met ça en haut pour les aider (Kate écrit, voir [Figure 2](#)). Et puis après, on peut soustraire comme on le faisait, et puis on fait 11 moins 9. Ce qui donne 2 et on va faire 8 moins 7, ce qui donne 1.

$$\begin{array}{r}
 (10+1) \\
 8 \ 11 \\
 \cancel{8} \ \cancel{11} \\
 -79 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

Figure 2 : Soustraction écrite par Kate

Outre les questions suscitées par l'idée d'emprunt, le problème posé quant à la conception du nombre et de son écriture se cristallise dans l'hésitation entre le singulier et le pluriel à propos des mots dizaine et unité. Pour Kate, la fameuse voisine est à la fois LA dizaine, c'est à dire la colonne, celle qui possède LES dizaines et à la fois LES dizaines. Kate n'est toutefois pas consciente de la difficulté et déclare que cela n'a jamais posé problème pour les élèves. De manière similaire, Martin considère que l'objection du remboursement de l'emprunt est un faux problème et qu'il faut être généreux. L'analogie devient ici plus forte que la rationalité mathématique et l'éthique devient un argument quasiment mathématique. Cette analogie cohabite d'ailleurs fort bien avec un argument d'autorité sur le fait qu'il est « impossible » d'enlever 5 à 2... du moins en 3P.

Cette question de l'impossibilité de soustraire 5 de 2 est d'ailleurs l'occasion pour la plupart des enseignants de justifier, quand ils l'utilisent, d'où vient cet emprunt. C'est le cas de Gaëlle :

Je parle souvent de bonbons, parce que je trouve que ça marche assez bien, que c'est plus représentatif, et puis je leur dis que si ils ont 2 bonbons, ils ne peuvent pas en manger 5. [...] Je leur dis que si ils sont 5 copains, et qu'il n'y a que deux bonbons, ben ça va être difficile de les partager, donc il faut aller... je leur explique qu'on va aller chercher, on va aller en chercher chez le voisin pour pouvoir en avoir plus...

Cette enseignante, qui par ailleurs est celle qui crée le plus de liens entre les diverses notions en jeu, ajoute à la confusion sur l'emprunt, celle entre la soustraction et la division-partage. Ces confusions indiquent bien une compréhension superficielle de l'algorithme et des notions en jeu. Cependant ce manque de compréhension est masqué par un fort recours à des analogies ou à du matériel, qui sont ici mal choisis et ne sont pas « représentatifs » de la notion qui pose problème, ici celle du regroupement par 10, alors même que Gaëlle affirme utiliser ce matériel pour que les élèves « puissent comprendre ».

Sur l'ensemble des quatre questions constituant l'entretien, les enseignants vaudois interrogés se rapprochent de leurs collègues chinois de par leur capacité à faire des liens entre notions mathématiques ou par leur usage adéquat des manipulations, du matériel ou des représentations d'opérations. Ils essaient de résoudre eux-mêmes des problèmes mathématiques. Cependant, les liens entre notions sont moins bien ordonnés, les conséquences de ces liens sur la construction des apprentissages ne sont pas exprimées, l'usage du matériel est moins discuté et les représentations sont moins riches. Ils font

également preuve de moins de richesse et de rigueur que les enseignants chinois dans leurs démarche d'investigation et dans leur argumentation. Sur d'autres points, au contraire, les enseignants vaudois ont des caractéristiques plus proches des enseignants étatsuniens. Ainsi, ils mettent souvent au premier plan le discours et les justifications pédagogiques au détriment du discours et des arguments mathématiques. Leur discours est mal ordonné et le lien entre la résolution d'un problème mathématique et l'apprentissage des notions contenues dans ce problème n'est pas fait.

Les corrélations entre les CME et la pertinence

Les résultats suivants concernent les observations de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication. La deuxième série de résultats concerne la corrélation entre les types de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement (CME) et la pertinence. Plus de 17 heures de séances et 11h30 d'entretiens ont été traitées. Environ 80% des données ont fait l'objet d'un découpage en près de 800 épisodes et ont été codées selon le niveau d'activité de l'enseignant, selon les catégories de CME présentes et selon la pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Les parties non codées dans les entretiens correspondent aux moments de salutation ou de rappel des conditions de la recherche. Celles non codées des séances de classe sont des moments durant lesquels l'enseignant n'est pas dans une position didactique, mais dans une pure position de gestion de classe. Une première analyse statistique permet de mettre en évidence des corrélations significatives entre la présence des diverses catégories de CME et la pertinence des interventions de l'enseignant. En particulier une corrélation forte apparaît entre la présence dans un épisode d'une Connaissance Mathématique Spécifique à l'enseignement correcte et la manifestation de la pertinence mathématique. Ce lien n'existe en revanche pas pour les autres types de CME. En particulier, d'un point de vue statistique, les Connaissances Mathématiques Communes correctes ne sont liées à une manifestation de pertinence que quand elles sont présentes conjointement à d'autres CME correctes ou, dans une moindre mesure, quand elles sont seules présentes. En revanche une Connaissance Mathématique Commune correcte présente en même temps qu'une autre CME erronée, particulièrement d'une Connaissance Mathématique Spécifique erronée, est liée le plus souvent à la non-pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Cela suggère que les Connaissances Mathématiques Communes ne génèrent de la pertinence mathématique que quand elles sont liées à d'autres connaissances mathématiques pour l'enseignement.

L'analyse par enseignant et la comparaison des moments particuliers

La troisième série de résultats porte sur une analyse par enseignant et une comparaison de moments particuliers entre les quatre enseignants observés. Elle sera l'objet du texte présenté au GT1 d'EMF 2012 (Clivaz, 2012).

La mise en évidence de bifurcations didactiques

Le quatrième type de résultat porte sur l'analyse fine d'un épisode de 27 minutes qui a été menée en terme de structuration du milieu. Cet épisode est extrait d'une suite de 7 leçons que Dominique donne dans sa classe de 4P.

L'analyse *a priori* détaillée est faite d'un double point de vue. Celui de l'enseignant dans un mouvement descendant et celui de l'élève d'un point de vue ascendant. Une analyse *a posteriori* permet ensuite d'interpréter l'épisode enregistré et de chercher les causes des phénomènes observés dans les CME de l'enseignant et leur pertinence. Seules certaines parties de l'analyse ascendante et l'interprétation en terme de CME sont détaillées ici, les

autres sont uniquement évoquées.

Analyse descendante

L'analyse descendante a priori du point de vue de l'enseignant permet la détermination de la situation didactique S_0 . Elle permet également de montrer comment les CME de l'enseignant se déclinent à chaque niveau et conduisent Dominique à envisager une situation didactique dans laquelle il montrera tout d'abord une multiplication en tableau (voir Figure 3), puis la multiplication en colonnes usuelle en faisant le parallèle entre le résultat de chaque ligne du tableau et la ligne correspondante de la multiplication en colonnes.

Analyse ascendante

L'analyse ascendante a priori du point de vue de l'élève conduit à considérer, à partir du milieu matériel mis en place par l'enseignant, six situations de niveau 0.

Niveau -3 : Situation objective

Selon Margolinas (1995, p. 99) le milieu matériel M_3 pour E_3 doit contenir les éléments nécessaires pour entrer dans la question. La situation est non finalisée (Comiti *et al.*, 1995, p. 106). M_3 est donc constitué de la description « brute » de l'algorithme donnée par l'enseignant sur un exemple et par les connaissances anciennes et, en principe, mobilisables d'un élève générique.

Parmi ces connaissances, E_3 sait effectuer une addition en colonnes, ainsi qu'une multiplication par un nombre à un chiffre en colonnes. Il sait que « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro ». Cette règle du zéro a été rappelée de multiples fois et « justifiée » par induction à partir de produits connus. Elle est complètement naturalisée pour les élèves. E_3 sait que les nombres (implicitement inférieurs à 100) peuvent être décomposés en dizaines et unités. En particulier dans un nombre entre 11 et 19, « le un, c'est pas un, c'est dix ».

Le milieu matériel comprend également la description, donnée par l'enseignant, des algorithmes (en tableau et en colonnes) pour 12×17 , ainsi que la description du lien entre les deux algorithmes sur cet exemple. La première ligne du tableau donne le même résultat que la première ligne de la disposition en colonnes, il en va de même pour la deuxième. La somme finale est identique.

x	10	2	
7	70	14	84
10	100	20	120
			204

	d	u
x	12	17
	120	84
+		120
		204

Figure 3 : Lien entre les deux façons d'effectuer la multiplication 12×17 , effectuées sur affiche lors de la leçon 4

Niveau -2 : Situation de référence

L'élève E_2 est un élève agissant. Pour décrire S_2 , il faut trouver un enjeu dont la conclusion puisse être obtenue dans l'interaction de l'élève agissant avec le milieu objectif (Margolinas,

1995, p. 99). Cet enjeu peut donc être de « faire la multiplication » en même temps que l'enseignant qui donne son explication en interrogeant les élèves à chaque étape.

Le milieu M_2 est alors constitué de la situation S_3 et des explications et connaissances qui s'y trouvent. Il faut y ajouter les justifications que donne l'enseignant et les connaissances du métier d'élève de E, son habitude d'interagir avec cet enseignant et de répondre à ses attentes d'un enseignement par ostension. Les réponses possibles peuvent être déterminées *a priori* à partir des éléments du milieu.

La multiplication 12×17 en tableau est présentée comme une extension de la procédure vue l'année précédente. Selon ce qui est dit par l'enseignant, tant durant cette explication que lors des entretiens, il s'agit là d'une disposition de calcul. Le lien avec le produit cartésien ou l'aire du rectangle (lien dont l'enseignant n'est pas conscient) n'est jamais établi. Chaque produit est calculé pour lui-même, Pour E_2 , la *règle du zéro* est appliquée mécaniquement et la somme par ligne, écrite en ligne à la leçon 2, semble évidente. E_2 applique cet algorithme en tableau (à une ligne) de façon automatique. Le fait de décomposer le second facteur 17 en 10 et 7 et de créer ainsi une deuxième ligne ne sera pas remis en question. Cette remise en question sera d'autant plus fermée que l'enseignant a prévu de mettre les unités avant les dizaines, en ne le motivant auprès de élèves que par une utilité future pour la multiplication en colonnes. A la suite des deux sommes en ligne, E_2 , placé dans un contexte additif effectuée par analogie une addition. Il est toutefois possible qu'une incitation de l'enseignant soit nécessaire afin de lui faire faire une opération (il pourrait laisser le tableau en l'état). L'apparition d'une multiplication semble ici peu probable, ne serait-ce que parce que les nombres en jeu (84 et 120) sont plus difficiles à multiplier que les nombres de départ.

La multiplication en colonnes de 12×17 est présentée immédiatement après celle en tableau et disposée à côté de cette dernière. Pourtant, ni le tracé des colonnes pour les dizaines et les unités, ni le fait d'écrire deux lignes en séparant les deux chiffres du 17, ni la façon d'effectuer ces deux lignes n'est rapprochée de la multiplication en tableau. Les deux lignes et la séparation du 17 sont simplement énoncées par l'enseignant et la façon d'effectuer chaque ligne est ramenée à la multiplication en colonnes par un nombre à deux chiffres. Le parallèle est fait exclusivement en comparant le résultat de chaque ligne à la somme obtenue dans le tableau. Face à cette présentation, l'élève agissant E_2 va pouvoir investir quatre situations, notées en colonnes dans le Tableau 2. Soit utiliser les mêmes règles d'action que celles énoncées par l'enseignant (correspondance ligne à ligne), soit utiliser les résultats de chaque case du tableau pour établir la ligne correspondante (correspondance produit à produit), soit encore ne pas effectuer la multiplication en colonnes et écrire directement le résultat de chaque ligne, voire le résultat final (utilisation directe du tableau). Il peut également ne faire aucune correspondance et effectuer les deux opérations de façon indépendante (algorithmes indépendants).

Pour ce qui est du zéro de la deuxième ligne, selon l'explication de l'enseignant, il faut « faire 12 fois 1, mais comme il ne s'agit pas de 1, mais de 10, il faut ajouter un zéro ». Ici trois situations S_2 semblent possibles. Elles sont notées en ligne dans le Tableau 2. La première serait d'appliquer mécaniquement la « recette » en mettant le zéro et en effectuant la suite de la multiplication (application recette), la deuxième serait de mettre en rapport ce zéro avec ceux figurant comme dernier chiffre dans chaque produit de la deuxième ligne du tableau (correspondance des zéros), la troisième serait de prendre en compte l'explication de l'enseignant, et donc de rajouter un zéro à chaque fois que, dans la multiplication en colonnes, le chiffre représente une dizaine (ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines).

En croisant les réactions possibles sur le lien entre les deux algorithmes et celles sur le zéro, il serait donc possible d'imaginer 12 situations :

		Attitudes par rapport au lien entre les deux algorithmes			
		Correspondance ligne à ligne L	Correspondance produit à produit P	Utilisation directe du tableau D	Algorithmes indépendants I
Attitudes par rapport au zéro de la deuxième ligne	Application recette r	$(S_{-2})_r^L$	$(S_{-2})_r^P$	$(S_{-2})_r^D$	$(S_{-2})_r^I$
	Correspondance des zéros z	$(S_{-2})_z^L$	$(S_{-2})_z^P$	$(S_{-2})_z^D$	$(S_{-2})_z^I$
	Ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines a	$(S_{-2})_a^L$	$(S_{-2})_a^P$	$(S_{-2})_a^D$	$(S_{-2})_a^I$

Tableau 2 : Situations S_{-2} possibles.

Dans le tableau, chaque situation correspond à une des attitudes possibles par rapport au lien entre les algorithmes (codée en exposant) à une attitude possible par rapport au zéro (codée en indice). Quelques-unes sont décrites ci-dessous.

La situation $(S_{-2})_r^L$ représente la situation d'un élève E_{-2} qui verrait une correspondance entre chaque ligne de la multiplication en colonnes et le résultat de chaque ligne du tableau et qui, au moment de commencer la deuxième ligne placerait un zéro sans s'interroger sur la signification de ce zéro. La situation $(S_{-2})_z^P$ est celle d'un élève qui mettrait en correspondance chaque case du tableau avec un produit partiel en colonnes, remarquerait donc que les lignes de l'algorithme en colonnes sont déjà le résultat d'une addition, et remarquerait également que chaque produit de la deuxième ligne du tableau se termine par zéro, voire que ce zéro est « ajouté » car on multiplie par un nombre se terminant par 0, et donc que ce zéro est « ajouté » de la même manière à la deuxième ligne de la multiplication en colonnes. La situation $(S_{-2})_a^L$ est paradoxale. D'un côté elle respecte la visée de l'enseignant déterminée par l'analyse descendante, puisqu'elle suppose un élève effectuant une correspondance ligne à ligne et appliquant la *règle du zéro*. D'un autre côté, elle pourrait conduire cet élève à « ajouter un zéro » à chaque fois qu'il travaille avec des dizaines, c'est à dire pour chaque produit partiel de la deuxième ligne, mais aussi pour le deuxième produit de la première ligne. Cette situation est donc mathématiquement incohérente, mais c'est celle qui correspond le mieux au contrat didactique.

D'autres situations sont incohérentes. Par exemple, pour $(S_{-2})_a^P$, si l'élève fait une correspondance entre chaque case de la multiplication en tableau et le produit partiel correspondant de la multiplication en colonnes, il ne pourra pas appliquer la *règle du zéro* directement et sans se poser de question. Etant donné que ces situations, en plus d'être incohérentes ne correspondent pas aux intentions de l'enseignant déterminées par l'analyse descendante, elles sont très peu probables, voire impossibles. Ces cases sont grisées dans le tableau ci-dessus.

En revanche une situation n'apparaît pas dans la combinaison des possibilités, puisque E_{-2} peut recopier directement les lignes du tableau sans se préoccuper du zéro. Cette situation est nommée $(S_{-2})_a^I$. Le nombre des situations S_{-2} possibles est ainsi de six.

Niveau -1, situation d'apprentissage et niveau 0, situation didactique

La poursuite de l'analyse ascendante permet la détermination de la situation S_0 du point de vue de l'élève et fait ainsi apparaître six situations. Une d'entre elle $(S_0)_a^L$ semble correspondre à la situation S_0 . Cette correspondance n'est toutefois pas complète puisque le fait d'« ajouter un zéro quand on travaille avec des dizaines » n'est appliqué par l'enseignant que pour le

premier produit partiel de la seconde ligne de l'algorithme en colonnes.

En terme de bifurcations didactiques, on ne peut dès lors considérer aucune branche comme principale et toutes les branches sont donc marginales ! De fait, la situation matérielle mise en place ne peut pas conduire à la situation didactique souhaitée par l'enseignant !

Analyse a posteriori

L'analyse *a posteriori* confirme les tensions que ces bifurcations peuvent générer (Clivaz, A paraître). La plupart des élèves se placent dans une situation $(S_0)_r^L$ en utilisant une correspondance ligne à ligne entre les deux algorithmes et en ne s'interrogeant pas sur la signification du zéro à la seconde ligne. Seul un élève, Armand, habitera la situation $(S_0)_\alpha^L$, voulant ajouter un zéro à chaque fois qu'il effectue une multiplication par un chiffre des dizaines. Cette situation n'est pas cohérente. Elle nécessite soit le passage en $(S_0)_r^L$ par l'abandon de la justification « on ajoute un zéro quand on travaille avec des dizaines », soit le passage en $(S_0)_z^P$ pour comprendre cette justification. Le premier passage est obstinément refusé par l'élève qui semble ne pas supporter d'appliquer une recette sans la comprendre. Le second passage est systématiquement évité par l'enseignant qui tente de ramener l'élève à la situation S_0 . Mais cette situation de l'enseignant n'est pas compatible avec le milieu matériel mis en place, sauf en modifiant le milieu en appliquant mécaniquement la *règle du zéro*, c'est à dire en rabattant la situation S_0 en situation $(S_0)_r^L$.

Connaissances mathématiques pour l'enseignement, pertinence et bifurcations didactiques

L'analyse *a posteriori*, s'appuyant sur l'analyse *a priori*, montre que la démultiplication des situations de niveau 0 et le sentiment d'incommunicabilité entre ces situations sont causés par certains choix faits par l'enseignant, soit au moment de la détermination de S_0 , soit au moment de la mise en place de la situation de référence S_{-3} , mais aussi par l'impuissance de l'enseignant en position P_0 à adapter ses interventions didactiques à la situation de l'élève, ne serait-ce que pour faire évoluer cette dernière. Il s'agit maintenant de reprendre ces choix en les rattachant aux connaissances mathématiques pour l'enseignement de Dominique et à sa pertinence mathématique.

Le premier choix à considérer est celui d'appuyer l'algorithme de la multiplication en colonnes sur celui de la multiplication en tableau en insistant sur la correspondance entre les lignes de l'algorithme en colonnes et les sommes par lignes du tableau. Les connaissances mises en jeu pour faire ce choix sont des connaissances du contenu du point de vue de son enseignement (Connaissance du Contenu et de l'enseignement du sujet, de par la volonté d'expliquer l'algorithme), des connaissances du programme et des moyens d'enseignement (Connaissance des Programmes et des moyens d'enseignement, de par la connaissance de plusieurs algorithmes et de l'usage de l'algorithme en tableau) et des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement enfin (Connaissance Mathématique Spécifique, de par la connaissance de l'algorithme en tableau). Ces connaissances sont correctes. Il est plus difficile d'expliquer le choix de ne pas mettre en évidence la correspondance terme à terme, voire les tentatives d'esquiver cette correspondance. En fait Dominique possède la Connaissance Mathématique Spécifique de cette correspondance, comme il le montre lors des entretiens, mais cette connaissance n'est pas pertinente puisqu'elle ne lui permet pas d'interagir sur les éléments mathématiques de la situation, c'est à dire de se placer dans la situation $(S_0)_z^P$ ou il aurait pu retrouver l'élève Armand dans le passage considéré. La raison de cette absence de pertinence d'une Connaissance Mathématique Spécifique correcte et

apparemment disponible est probablement à chercher dans la représentation qu'a Dominique de la multiplication.

Lors des séances en classe, Dominique affirme à plusieurs reprises que la multiplication est un raccourci de l'addition. Interrogé à ce sujet lors de l'entretien *post*, il répétera cela et ne donnera aucune représentation de type produit cartésien ou aire d'un rectangle. Ainsi la Connaissance Mathématique Spécifique de la multiplication en tableau est purement procédurale, le tableau n'est pas vu comme un produit cartésien, mais comme un endroit où l'on range des produits à additionner ensuite en ligne. Ce manque de compréhension du fondement de la multiplication en tableau va l'empêcher de l'utiliser avec pertinence pour interagir sur les aspects mathématiques de la multiplication en colonnes représentés par la situation $(S_0)_z^p$.

Le deuxième choix est celui de donner une recette pour la *règle du zéro*. Ce choix pose problème, à la fois dans l'application dans l'algorithme en colonnes puisqu'on n'« ajoute un zéro quand on travaille avec les dizaines » que au début de la deuxième ligne. Il pose également un problème de vocabulaire additif (ajouter) dans une situation multiplicative et est confondu avec l'ajout de la retenue. La non pertinence de la connaissance mathématique commune est ainsi liée dans ce cas à l'absence de la *version spécifique* de cette connaissance.

D'autres choix, plus secondaires, sont faits par l'enseignant et influencent la situation didactique. Il faut mentionner en particulier, parmi les éléments qui déterminent le milieu objectif et par suite les situations successives, le choix des nombres multipliés pour les premières multiplications, tous compris entre 12 et 19. Les raisons de cette option ne sont pas explicitées par Dominique, mais on peut penser qu'il vise une progression dans la difficulté. Ce choix a pour conséquence de rendre la seconde ligne de la multiplication en colonnes triviale, ce que l'enseignant ne mentionne jamais. Il a aussi pour conséquence de donner l'impression de refaire plusieurs fois la même multiplication et par exemple à Armand de poser plusieurs fois la même question, « c'est 1x1 ou 10x10 ? », à propos de plusieurs multiplications.

Conclusion

Les quatre séries de résultats obtenus à des niveaux d'analyse de plus en plus fins mettent en évidence le rôle des connaissances mathématiques des enseignants. Tant dans les entretiens à partir des questions de Ma (1999) que dans les observations de l'enseignement de l'algorithme ou lors des entretiens encadrant ces observations, les choix, envisagés (mais pas forcément mis en œuvre) ou effectifs, des enseignants sont conditionnés par leurs Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement. D'autres variables influencent certainement ces choix : manuels, conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement, conceptions des mathématiques, contexte scolaire... Pourtant les connaissances mathématiques jouent un rôle premier dans le sens où elles rendent possibles ou impossibles des choix en fonction des autres variables. L'absence de certaines Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement relatives à un objet d'enseignement ne permet pas à l'enseignant d'effectuer ses choix en disharmonie avec ses conceptions de l'apprentissage, de l'enseignement ou des mathématiques. Nous avons par ailleurs des indications tangibles qu'au contraire la présence de telles Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement rend les enseignants à même de faire ces choix en harmonie. Comme l'affirmait Ma (p. 36), il est possible pour un enseignant de choisir de donner une explication procédurale s'il possède une compréhension profonde des mathématiques. Il lui

est en revanche impossible de donner une explication conceptuelle s'il ne possède qu'une compréhension procédurale d'un sujet. Ce cas de figure, celui d'un enseignant souhaitant donner une explication de type conceptuel alors qu'il ne dispose pas des Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement permettant de décortiquer le fonctionnement d'une procédure mathématique comme un algorithme, peut le conduire à donner des raisons mathématiquement infondées ou à défaut des recettes mnémotechniques, en étant persuadé qu'il interagit avec ses élèves au plan mathématique. Ce phénomène, observé lors des deux parties de notre recherche, est une illustration de l'importance des Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement de l'enseignant pour la pertinence mathématique de ses interventions.

Les réponses à nos trois questions de recherche nous ont permis d'alimenter notre question naïve initiale : qu'est-ce que ça change de connaître les maths quand on les enseigne ? Les éléments de réponse que nous sommes en mesure d'apporter à l'issue de cette thèse retrouvent un caractère un peu naïf. Connaître les mathématiques qu'on enseigne permet de choisir comment on les enseigne. Connaître les mathématiques enseignées donne une liberté pédagogique à l'enseignant.

Références bibliographiques

- Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*(Fall 2005), 14-22, 43-46. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/65072/4/Ball_F05.pdf
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389>
- Bednarz, N. & Proulx, J. (2009). Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants. *For the learning of mathematics*, 29(3), 11-17. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://flm.educ.ualberta.ca/BednarzProulx.pdf>
- Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu – connaissances et savoirs. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 135-194.
- Bloch, I. (2005). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur : contribution à l'étude et à l'évolution de quelques concepts issus de la théorie des situations didactiques en didactique des mathématiques*. HDR. Paris 7, Paris
- Bloch, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ? *Petit x*, 81, 25-52.
- Brousseau, G. (1986). La relation didactique: le milieu. In *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques* IREM de Paris 7.
- Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. Consulté le 27 septembre 2011, dans <http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047>
- Clivaz, S. (2012). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication, *EMF 2012*. Genève
- Clivaz, S. (A paraître). Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations

- didactiques : analyse d'un épisode. *Recherches en didactique*
- Comiti, C., Grenier, D. & Margolinas, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In G. Arzac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (Eds.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 91-127). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Coppé, S. (2007). Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2006* (pp. 139-168). Paris: IREM Paris 7.
- Dolz, J. & Toulou, S. (2008). De la macrostructure de la séquence d'enseignement du texte d'opinion à l'analyse des interactions didactiques. *Travail et formation en éducation*, (1). Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://tfe.revues.org/index596.html>
- Fassnacht, C. & Woods, D. K. (2002-2011). Transana (Version 2.42) [Mac]. Madison: University of Wisconsin. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://www.transana.org/>
- Grugeon, B. (2008). Quelle évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l'IUFM. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 383-419). Toulouse: Octarès.
- Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 113-158. Consulté le 24 janvier 2011, dans <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00458309/fr/>
- Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques : actes du Séminaire national 1993-1994*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-155). Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté le 18 juillet 2011, dans http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=m2hj19vrm34e7osqkidopu67k7&view_this_doc=halshs-00421848&version=1
- Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. HDR. Université de Provence - Aix-Marseille I. Consulté le 18 juillet 2011, dans <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/en/>
- Margolinas, C., Coulange, L. & Bessot, A. (2005). What Can the Teacher Learn in the Classroom? *Educational Studies in Mathematics*, 59, 205-234.
- Pian, J. (1999). *Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels*. Paris: IREM Paris 7.
- Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1-2), 57-79.
- Robert, A. (2005). Recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants du second degré en mathématiques – L'exemple d'une formation de formateur. In C. Castela & C. Houdement (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2005* (pp. 137-176). Paris:

ARDM et IREM de Paris 7.

Schneuwly, B., Dolz, J. & Ronveaux, C. (2006). Le synopsis: un outil pour analyser les objets enseignés. In M.-J. Perrin-Glorian & Y. Reuter (Eds.), *Les méthodes de recherche en didactiques : actes du premier séminaire international sur les méthodes de recherches en didactiques de juin 2005* (pp. 175-189). Villeneuve d'Ascq: Presses univ. du Septentrion.