



HAL
open science

Écarts d'opportunité et contrôle des décisions de synthèse

Claude Cossu

► **To cite this version:**

Claude Cossu. Écarts d'opportunité et contrôle des décisions de synthèse. L'alchimie des coûts, May 1983, France. pp.cd-rom. hal-00823525

HAL Id: hal-00823525

<https://hal.science/hal-00823525>

Submitted on 14 Aug 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Écarts d'opportunité et contrôle
des décisions de synthèse

Claude COSSU
Chargé de conférence
Université de Paris I

INTRODUCTION

Le contrôle par la méthode des écarts (parfois appelée gestion par exception) se donne pour objet l'analyse détaillée des divergences entre budgets et réalité. Il vise principalement à contrôler les responsabilités internes, au niveau de décisions intermédiaires, quant à l'emploi des facteurs de production. Il en résulte une démarche analytique qui pêche souvent par le fait qu'elle incite à négliger l'interdépendance des décisions et des actions et pousse à considérer les responsabilités décentralisées comme indépendantes les unes des autres, alors même qu'elles résultent de décisions coordonnées.

La méthode de contrôle décrite ci-après prétend prendre le relais pour l'analyse des décisions globales, et principalement en termes d'étude des conséquences de l'anomalie de décision ou de mise en oeuvre. C'est dire qu'elle apparaît a priori comme complémentaire.

Le principe de base de cette méthode est le suivant :

Si nous considérons une décision globale, soit par exemple, le plan de production-vente de l'ensemble des produits d'une entreprise pour une période donnée, cette décision résultant d'un objectif de maximilisation du profit (ou, au minimum, prise dans des conditions de non-optimisation connues et acceptées) ; si, de plus, sont connues un certain nombre de contraintes concernant :

- la capacité de production,
- les éventuels objectifs de stockage,
- les marchés amont ou aval de l'entreprise ;

il est alors possible de situer cette décision par rapport à l'optimum défini par un programme linéaire et de mesurer l'écart de marge entre ces deux décisions en termes de regrets par l'usage des prix duaux : c'est ce que nous allons montrer.

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

Si nous considérons un programme linéaire de n contraintes et p variables réelles, nous savons que la solution optimale se traduit par deux vecteurs :

- le vecteur "primal" des valeurs à donner aux variables réelles et des éventuels sous-emplois des contraintes ou valeurs des

variables d'écart.

" le vecteur "dual" indiquant les prix duaux (ou coûts marginaux) associés aux variables primales : 0 pour les variables non nulles et un terme positif pour les variables nulles.

Si nous considérons un vecteur-solution non optimal, que la solution soit possible ou non, il est possible d'exprimer la différence de valeur de la fonction objectif de deux manières :

- Soient : -p : nombre de variables réelles, $i = 1, \dots, n$.
- n : nombre de contraintes, $j = 1, \dots, p$.
- a_{ij} : coefficient de la variable j dans la contrainte i
- M_j : coefficient de la variable j dans la fonction objectif
- B_i : terme constant de la contrainte i
- Q_j : quantité (quelconque) de la variable j
- Q*_j : quantité optimale de la variable j
- Z : valeur de l'objectif
- Z* : valeur optimale de l'objectif
- L_i : variable d'écart sur contrainte i
- d_{j,di} : prix duaux

$$1 - Z - Z^* = \sum_{j=1}^p m_j (Q_j - Q^*_j)$$

est une simple ventilation du manque à gagner entre les valeurs des variables et n'apporte donc aucune information nouvelle.

$$2 - Z - Z^* = \sum_{j=1}^p d_j (Q^*_j - Q_j) + \sum_{i=1}^n d_i (L^*_i - L_i)$$

La différence de marge est répartie en deux catégories d'éléments :

- les variables non nulles dans la solution réelle mais nulles dans la solution optimale.
- les contraintes sous-employées dans la réalité alors que l'optimum menait au plein-emploi.

L'explication est donc fournie en termes de regrets d'avoir pris une décision sous-optimale, mal équilibrée ou au contraire de ne pas pouvoir atteindre une décision sur-optimale.

Ces regrets sont orientés vers les erreurs d'orientation de la production d'outputs ou vers les erreurs d'utilisation des facteurs rares (contraintes), ou encore, en cas de tentative de sur-optimisation, vers les barrières qu'il est essentiel de lever en préalable à la réalisation.

APPLICATION A LA GESTION BUDGETAIRE

L'application à la gestion budgétaire est assez évidente, que ce soit comme évaluation de la qualité des décisions par rapport à un objectif de profit (ou de chiffre d'affaires), ainsi que par rapport à la qualité des informations utilisées dans le processus décisionnel, ou que ce soit comme feed-back au sens où le montre IJIRI à partir de

son concept "d'évaluateur duel" (1).

Une généralisation est possible dans le cadre défini à l'introduction, en définissant une suite de programmes linéaires allant du prévisionnel au réel, différant entre eux par l'introduction d'un ensemble de données découlant d'une même cause. L'analyse des prix duaux permet donc :

1 - Dans le sens amont :

- De mesurer le regret d'avoir à subir une situation plus contraignante que prévu au niveau amont.
- Ou de mesurer le profit tiré de circonstances favorables connues.

2 - Dans le sens aval :

- De mesurer le regret de n'avoir pas disposé de l'information selon laquelle la situation était plus contraignante que prévu : ce qui définit le prix de l'information ou le prix du desserrement de la contrainte.
- Ou de mesurer le regret de n'avoir pas connu des circonstances favorables et de n'avoir donc pas pu en tirer parti.

La séquence exploratoire pourra envisager les programmes suivants (par exemple) :

1 - Programme standard :

Défini par les contraintes internes de production, il a pour solution la capacité optimale de production en fonction d'un objectif de maximisation de la marge globale.

2 - Programme budgétaire :

Outre les mêmes contraintes, il comprend les contraintes externes (marchés amont et aval) et éventuellement des contraintes nées des variations de stocks budgétées. La fonction objectif est la même que précédemment.

L'écart entre les solutions optimales de ces deux programmes provient donc uniquement d'une différence dans les quantités à produire. Cet écart ne peut être que défavorable, puisqu'on ne fait qu'ajouter des contraintes supplémentaires, sauf si le budget prévoit un destockage.

L'analyse d'opportunité amont mesure les regrets de ne pas pouvoir fonctionner à pleine capacité, d'une part en perte de marge pour ne pas produire les produits les plus rentables, d'autre part en

(1) JIRI, Y. - Objectifs et contrôle de gestion - Dunod, Paris, 1970
pp 142 - 153.

regret de ne plus assurer le plein emploi de certains moyens de production.

L'analyse d'opportunité aval mesure le regret de subir de nouvelles contraintes, et par conséquent le prix que nous sommes prêts à payer pour les lever (développement de marchés par exemple).

3 - Budget à rendements réels :

Le programme a exactement la même structure que le précédent, mais les coefficients de consommation de facteurs des contraintes techniques internes (unités d'oeuvre consommées pour la production par exemple) sont en termes réels ; de même, dans la fonction objectif, les marges sur coûts variables unitaires tiennent compte des rendements réels à coûts standard.

Il y a donc à la fois déformation du polyèdre convexe et modification de la pente de la fonction objectif. Il y aura donc lieu de distinguer deux sous-écarts : l'un, quantitatif, sur modification de la solution optimale, l'autre relatif exclusivement aux rendements.

En effet, l'écart :

$$Z_3 - Z_2^* = \sum_{j=1}^p m_{3j} \cdot q_{3j} - \sum_{j=1}^p m_{2j} \cdot q_{2j}$$

devient

$$Z_3 - Z_2^* = \sum_{j=1}^p m_{2j} (q_{3j} - q_{2j}) + \sum_{j=1}^p q_{3j} \left\{ \sum_{i=1}^n v_i (a_{ij} - a_{3i}) \right\}$$

soit un vecteur des écarts de marge par produit et une matrice des écarts de rendement valorisés au coût variable, par produit et par contrainte.

Les analyses d'opportunité tiennent compte de cette distinction : après avoir éliminé par un écart de programme l'écart quantitatif valorisé aux prix duaux des produits, et donc mesuré la non-optimalité d'un programme par rapport à des conditions différentes, on définit des écarts de rendements en termes de prix duaux des écarts de niveau d'emploi des contraintes ; c'est-à-dire qu'on mesure soit le regret de n'avoir pas respecté les rendements standards, soit le regret de n'avoir pas connu à l'avance les rendements réels.

4 - Programme des coûts réels :

Ce programme est obtenu en substituant au précédent les coefficients de la fonction objectif : les marges unitaires sont calculées à partir des prix standard et des coûts réels.

Le polyèdre convexe est donc le même que précédemment et deux cas sont possibles : ou le sommet définissant la solution optimale reste le même, et il n'y a pas modification du programme, ou le changement de pente du plan de la fonction objectif entraîne un changement de sommet et il apparaît un écart de programme analysé comme

le précédent en termes de regrets.

Dans les deux cas, il reste une matrice d'écarts de coûts par produit et par contrainte, plus un vecteur d'écarts de coûts directs par produit.

5 - Programme des prix réels

Le polyèdre convexe définissant le domaine des solutions possibles reste identique, mais la substitution des prix de vente réels aux prix standard modifie la pente du plan de la fonction objectif.

L'analyse d'opportunité conduit donc à un système de regrets et d'écarts analogue à celui de l'étape précédente.

6 - Toutes données réelles :

La seule donnée réelle restant à introduire est le vecteur des quantités réellement produites ; il s'agit donc d'une solution possible non optimale (sauf exception) du programme précédent.

L'analyse d'opportunité amont se fera donc en termes de regrets de n'avoir pas su optimiser par rapport aux données réelles de rendements, coûts et prix, soit en ayant fabriqué et vendu des produits non rentables, soit en n'ayant pas assuré le plein-emploi de contraintes qui auraient dû être saturées.

L'ensemble fournit donc un ensemble cohérent d'informations en termes de coûts d'opportunité vis-à-vis du système de prévision-décision de production et permet donc de donner un prix :

- soit à l'amélioration de la qualité des informations, et donc des standards utilisés, dans le système de contrôle de gestion,
- soit à l'opportunité de desserrer telle ou telle contrainte formant goulet d'étranglement.

EVALUATION

Il est clair que le concept développé ci-avant s'inscrit dans un cadre néo-classique où la maximisation du profit dans un cadre de décisions parfaitement rationnelles est le mobile fondamental de l'entrepreneur. On notera cependant que le transfert du modèle d'analyse vers des objectifs de croissance ou de M / C V (Maximisation sous contrainte des ventes) est immédiat.

Modèle global, on peut lui reprocher de pousser au développement d'un esprit centralisateur. Ce n'est toutefois qu'apparence, car dans une structure décentralisée, le problème moyen est celui de l'interdépendance des décisions et de la cohérence qui doit nécessairement exister entre les actes des différents responsables. En tant qu'instrument de mesure de cette cohérence, ou plutôt des regrets qui découlent des actes incohérents, ce système d'analyse devrait pousser à la concertation en vue d'une meilleure efficacité dans les décisions à court terme.

BIBLIOGRAPHIE

- COSSU, Claude - Calcul linéaire et contrôle des écarts sur coûts indirects. Thèse de spécialité. Université de Paris I. Paris (1974) : non publié : 192 p.

- COSSU, Claude - Description de la structure productive de la firme multiproduits et construction de modèles comptables de coûts. Thèse d'Etat. Université de Paris I. Paris (1976) : non publié : 188 p.

- IJIRI, Yuji. Objectifs et contrôle de gestion. Paris : Dunod (1970) : 216 p.

Annexe 1 : Appendice mathématique

PRINCIPAUX SYMBOLES MATHÉMATIQUES UTILISÉS

Production : p produits : $j = \{1, \dots, p\}$

q_j^s : quantité standard du produit j.

q_j^{s*} : quantité standard optimale du produit j.

q_j^p : quantité budgétée du produit j.

q_j^{p*} : quantité budgétée optimale du produit j.

q_j^r : quantité réelle du produit j.

p_j : prix de vente unitaire prévu du produit j.

p_j^r : prix de vente unitaire réel du produit j.

Activité : n sections homogènes principales : $i = \{1, \dots, n\}$

B_i : capacité maximale de la section i, exprimée en nombre d'unités d'oeuvre.

λ_i : nombre d'unités d'oeuvre de la section i non employées par le programme standard.

μ_i : nombre d'unités d'oeuvre de la section i non employées par le programme budgétaire.

B_i^r : nombre d'unités d'oeuvre de la section i réellement fournies.

a_{ij} : nombre standard d'unités d'oeuvre de la section i nécessaires à l'obtention d'une unité du produit j.

a'_{ij} : nombre réel d'unités d'oeuvre de la section i nécessaires à l'obtention d'une unité du produit j.

1. Ecart ex-ante de budgétisation

Cet écart ($z^{(2)*} - z^{(1)*}$) résulte de la comparaison du programme standard (1) et du programme budgétaire (2). La seule différence étant l'adjonction de contraintes supplémentaires, cet écart ne peut pas être favorable. Coûts et prix unitaires étant égaux dans les deux cas, la seule cause sera la différence quantitative

$(q_j^{(2)z}) - (q_j^{(1)z})$, valorisée aux marges unitaires standard, et les conséquences marginales de l'introduction des contraintes de marché pourront être analysées d'amont en aval ou d'aval en amont, comme l'a montré l'exemple de la section précédente (cf pages 114 à 116).

2. Écart de rendement

Cet écart $(z^{(3)z} - z^{(2)z})$ mesure l'effet global de la substitution dans le programme (2) des rendements réels (a'_{ij}) aux rendements standard (a_{ij}) pour former le programme (3) du budget optimal à rendements réels : dans la fonction économique, nous substituons aux marges unitaires standard $m_j^{(2)} = p_j - (d_j + \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i)$ les

$$\text{marges } m_j^{(3)} = p_j - (d_j + \sum_{i=1}^n a'_{ij} v_i).$$

Il y a donc à la fois déformation du polyèdre convexe et modification de la pente du plan de la fonction économique. De ce fait, quelle que soit l'analyse de l'écart de marge, il y aura lieu de distinguer deux sous-écarts : l'un sur quantités, l'autre sur rendements.

a) Écarts par produit : puisque deux éléments apparaissent, il existe un effet de covariance que nous ne pouvons masquer qu'en ordonnant les deux causes et, comme à l'accoutumé, nous choisissons de valoriser les écarts de quantités aux marges les plus théoriques, c'est-à-dire aux marges budgétaires, ainsi :

$$(z^{(3)z} - z^{(2)z}) = \sum_{j=1}^p m_j^{(3)} q_j^{(3)z} - \sum_{j=1}^p m_j^{(2)} q_j^{(2)z}$$

devient :

$$(z^{(3)z} - z^{(2)z}) = \sum_{j=1}^p m_j^{(2)} (q_j^{(3)z} - q_j^{(2)z}) + \sum_{j=1}^p q_j^{(3)z} \times \left[\sum_{i=1}^n v_i (a_{ij} - a'_{ij}) \right]$$

Il y a donc un écart par quantité de chaque produit et un écart de rendement ventilé par section pour chaque produit.

b) Ecart marginaux par rapport au budget (2) :

Dans ce cas aussi, nous rencontrons deux catégories d'écarts :

. La première analyse par les "coûts marginaux" du programme (2) les écarts de sous-optimisation (ou de sur-optimisation si les rendements réels sont en moyennes supérieurs aux rendements standard) résultant de la production de $(q_j^{(3)*})$ aux conditions définies par les contraintes du programme (2). Nous définissons ainsi une solution non-optimale de (2) que nous pouvons comparer à la solution optimale :

posant pour chaque contrainte de section

$$\mu_1 = B_1 - \sum_{j=1}^p a_{1j} q_j^{(3)*} \quad \text{et pour chaque contrainte de marché}$$

$$\mu_k = B_k - \sum_{j=1}^p b_{kj} q_j^{(3)*}, \quad \text{nous pouvons définir l'écart}$$

$$\begin{aligned} (Z^{(2)} - Z^{(2)*}) &= \sum_{j=1}^p \delta_j^{(2)*} (q_j^{(2)*} - q_j^{(3)*}) \\ &+ \sum_{i=1}^n \delta_i^{(2)*} (\lambda_i^{(2)*} - \mu_1) + \sum_{k=1}^q \delta_k^{(2)*} (\lambda_k^{(2)*} - \mu_k) \end{aligned}$$

Cette ventilation des coûts marginaux entre les variables réelles (cas exceptionnel puisqu'il ne concerne que les produits fabriqués dans (3) et non fabriqués dans (2) et les variables d'écart nous permet de mesurer le regret du fait que l'optimisation à rendements réels ne soit pas l'optimisation aux rendements théoriques par rapport aux contraintes effectives de cette dernière. Notons aussi le contrôle qui nous est donné par le fait que

$$(Z^{(2)} - Z^{(2)*}) = \sum_{j=1}^p m_j^{(2)*} (q_j^{(3)*} - q_j^{(2)*}) \quad \text{écart sur quantités de}$$

l'analyse précédente.

. La deuxième catégorie analyse les écarts de rendements par section en fonction de :

$$\sum_{i=1}^n \left[v_i \sum_{j=1}^p q_j^{(3)*} (a_{1j} - a'_{1j}) \right], \quad \text{ventilant par produit dans chaque section les écarts de rendements sur les quantités optimales de (3).}$$

c) Écarts marginaux par rapport au programme (3)

L'analyse est analogue à la précédente, mais en considérant la production optimale de (2) comme non-optimale par rapport aux conditions de (3). Ayant calculé les variables d'écart μ_i' et μ_k' qui résultent de l'application des rendements réels aux quantités $q_j^{(2)*}$ et $Z_A^{(3)}$, valeur de la fonction économique de (3) pour ces mêmes quantités, nous pouvons faire apparaître :

$$\begin{aligned} (Z^{(3)*} - Z^{(3)}) &= \sum_{j=1}^p \delta_j^{(3)*} (q_j^{(2)*} - q_j^{(3)*}) + \sum_{i=1}^n \delta_i^{(3)*} (\mu_i' - \lambda_i^{(3)*}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^q \delta_k^{(3)*} (\mu_k' - \lambda_k^{(3)*}) \end{aligned}$$

qui mesure les regrets de n'avoir pas établi le budget (2) en connaissant les rendements réels.

$$(Z^{(3)} - Z^{(2)*}) = \sum_{i=1}^n \left[v_i \sum_{j=1}^p q_j^{(2)*} (a_{ij} - a'_{ij}) \right]$$

qui ventile entre chaque section les écarts de rendement appliqués aux quantités budgétées.

Note : Il faut remarquer que les $\mu_i, \mu_k, \mu_i', \mu_k'$ ne sont pas nécessairement positifs ou nuls, ce qui signifie que la décision optimale d'un programme ne fait pas nécessairement partie des solutions possibles de l'autre programme.

3. Écart de prix des facteurs

Cet écart $(Z^{(4)*} - Z^{(3)*})$ mesure l'effet global de la substitution dans la fonction économique du programme (3) des marges unitaires à prix des facteurs réels, $m_j^{(4)} = p_j - (d'_j + \sum_{i=1}^n a'_{ij} v'_i)$ aux marges $m_j^{(3)}$.

Le polyèdre définissant le domaine des solutions possibles est donc le même dans les deux programmes et il peut se produire que les écarts sur quantités soient nuls si le sommet optimal reste le même.

La méthode d'analyse est identique à la précédente, définissant :

a) Les écarts par produit :

$$(Z^{(4)\#} - Z^{(3)\#}) = \sum_{j=1}^p m_j^{(3)} (q_j^{(4)\#} - q_j^{(3)\#}) + \sum_{j=1}^p q_j^{(4)\#} \left[\sum_{i=1}^n a'_{ij} (v_i - v'_i) \right] + \sum_{j=1}^p q_j^{(4)\#} (d_j - d'_j)$$

b) Les écarts marginaux par rapport au programme (3)

$$(Z^{(4)\#} - Z^{(3)\#}) = \sum_{j=1}^p \delta_j^{(3)\#} (q_j^{(3)\#} - q_j^{(4)\#}) + \sum_{i=1}^n \delta_i^{(3)\#} (\lambda_i^{(3)\#} - \mu_i) + \sum_{k=1}^q \delta_k^{(3)\#} (\lambda_k^{(3)\#} - \mu_k) + \sum_{i=1}^n \left[(v_i - v'_i) \sum_{j=1}^p a'_{ij} q_j^{(4)\#} \right] + \sum_{j=1}^p q_j^{(4)\#} (d_j - d'_j)$$

c) Les écarts marginaux par rapport au programme (4)

$$(Z^{(4)\#} - Z^{(3)\#}) = \sum_{j=1}^p \delta_j^{(4)\#} (q_j^{(3)\#} - q_j^{(4)\#}) + \sum_{i=1}^n \delta_i^{(4)\#} (\lambda_i^{(4)\#} - \mu'_i) + \sum_{k=1}^q \delta_k^{(4)\#} (\lambda_k^{(4)\#} - \mu'_k) + \sum_{i=1}^n \left[(v_i - v'_i) \sum_{j=1}^p a'_{ij} q_j^{(3)\#} \right] + \sum_{j=1}^p q_j^{(3)\#} (d_j - d'_j)$$

4. Ecart de prix des produits

Les prix p'_j sont substitués aux prix prévus p_j dans les marges $m_j^{(4)}$

pour obtenir dans la fonction économique les marges unitaires réel-

les $m_j^{(5)} = \left[p'_j - (d'_j + \sum_{i=1}^n a'_{ij} v'_i) \right]$, les contraintes demeurant

identiques.

Une analyse identique aux deux précédentes nous permet d'obtenir

les conditions suivantes :

a) Écarts par produit :

$$(Z^{(5)\#} - Z^{(4)\#}) = \sum_{j=1}^p m_j^{(4)} (q_j^{(5)\#} - q_j^{(4)\#}) + \sum_{j=1}^p q_j^{(5)\#} (p'_j - p_j)$$

b) Écarts marginaux par rapport au programme (4)

$$\begin{aligned}
 (Z^{(5)} - Z^{(4)}) &= \sum_{j=1}^p \delta_j^{(4)} (q_j^{(4)} - q_j^{(5)}) + \sum_{i=1}^n \delta_i^{(4)} (\lambda_i^{(4)} - \lambda_i^{(5)}) \\
 &+ \sum_{k=1}^q \delta_k^{(4)} (\lambda_k^{(4)} - \lambda_k^{(5)}) + \sum_{j=1}^p q_j^{(5)} (p'_j - p_j)
 \end{aligned}$$

c) Écarts marginaux par rapport au programme (5)

$$\begin{aligned}
 (Z^{(5)} - Z^{(4)}) &= \sum_{j=1}^p \delta_j^{(5)} (q_j^{(4)} - q_j^{(5)}) + \sum_{i=1}^n \delta_i^{(5)} (\lambda_i^{(4)} - \lambda_i^{(5)}) \\
 &+ \sum_{k=1}^q \delta_k^{(5)} (\lambda_k^{(4)} - \lambda_k^{(5)}) + \sum_{j=1}^p q_j^{(4)} (p'_j - p_j)
 \end{aligned}$$

5. Écart de production

Il s'agit là d'analyser l'écart de marge $(Z_r - Z^{(5)})$ qui résulte du fait que la production réelle n'est pas une solution optimale du programme (5) qui tient compte de toutes les conditions réelles. Il en résulte évidemment que l'analyse de l'aval vers l'amont est impossible et que les deux autres analyses ne définiront que des écarts sur quantités produites.

a) Écarts par produit

$$(Z_r - Z^{(5)}) = \sum_{j=1}^p n_j^{(5)} (q_j^{(6)} - q_j^{(5)})$$

b) Écarts marginaux

$$\begin{aligned}
 (Z_r - Z^{(5)}) &= \sum_{j=1}^p \delta_j^{(5)} (q_j^{(5)} - q_j^{(6)}) + \sum_{i=1}^n \delta_i^{(5)} (\lambda_i^{(5)} - \mu_i) \\
 &+ \sum_{k=1}^q \delta_k^{(5)} (\lambda_k^{(5)} - \mu_k)
 \end{aligned}$$

Appendice 2 : Exemple numérique.

Les données

L'entreprise étudiée comprend trois sections S_1, S_2, S_3 (cette section, étant suréquipée par rapport aux deux autres, n'est jamais contraignante) et fabrique deux produits P_1 et P_2 pour lesquels la capacité d'absorption du marché est limitée à respectivement 400 et 300 unités.

Les données standard de fonctionnement peuvent être résumées ainsi :

Section	Nombre maximum d'unités d'oeuvre	Coût variable unitaire	Coût fixe	Nombre d'unités d'oeuvre nécessaire à l'obtention d'une unité de :	
				P_1	P_2
S_1	1 000	10	5 000	1	2
S_2	2 000	4	10 000	3	2
S_3	5 000	2	8 000	4	8

Les données standard concernant les prix et coûts des produits sont :

Produit	prix de vente unitaire	Coût direct	Marge sur coût direct	Coût variable indirect	Marge sur coût variable
P_1	100	30	70	30	40
P_2	150	46	104	44	60

Les données comptables réelles de la période considérée sont les suivantes :

Section	Nombre réel d'unités d'oeuvre	Coût variable unitaire	Coût fixe	Répartition des unités d'oeuvre			
				taux unitaire		emploi global	
				P ₁	P ₂	P ₁	P ₂
S ₁	925	11	4 800	1,1	1,95	418	507
S ₂	1 610	3,50	10 500	2,8	2,1	1 064	546
S ₃	3 920	2,20	8 200	4,5	8,5	1 710	2 210

Produit	Quantité produite	Prix de vente unitaire	Coût direct	Marge sur coût direct	Coût variable indirect	Marge sur coût variable
P ₁	380	95	32	63	31,80	31,20
P ₂	260	160	45	115	47,50	67,50

Les programmes linéaires

(1) Programme standard

Formulation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ \lambda_1^{(1)} \\ \lambda_2^{(1)} \\ \lambda_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 000 \\ 2\ 000 \\ 5\ 000 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Max}] z^{(1)} = 40 q_1^{(1)} + 60 q_2^{(1)}$$

Tableau de l'itération finale

Variables non nulles	Valeur	$q_1^{(1)}$	$q_2^{(1)}$	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_2^{(1)}$	$\lambda_3^{(1)}$
$q_2^{(1)*}$	250	0	1	3/4	-1/4	0
$q_1^{(1)*}$	500	1	0	-1/2	1/2	0
$\lambda_3^{(1)*}$	1.000	0	0	-4	0	1
$z^{(1)*}$	35 000	0	0	+ 25	+ 5	0

(2) Programme budgétaire

Formulation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{(2)} \\ q_2^{(2)} \\ \lambda_1^{(2)} \\ \lambda_2^{(2)} \\ \lambda_3^{(2)} \\ \lambda_4^{(2)} \\ \lambda_5^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 000 \\ 2\ 000 \\ 5\ 000 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Max}] Z^{(2)} = 40 q_1^{(2)} + 60 q_2^{(2)}$$

Variables non nulles	Valeur	$q_1^{(2)}$	$q_2^{(2)}$	$\lambda_1^{(2)}$	$\lambda_2^{(2)}$	$\lambda_3^{(2)}$	$\lambda_4^{(2)}$	$\lambda_5^{(2)}$
$\lambda_1^{(2)}$	0	0	0	1	0	0	-1	-2
$\lambda_2^{(2)}$	200	0	0	0	1	0	-2	-2
$\lambda_3^{(2)}$	1 000	0	0	0	0	1	-4	-8
$q_1^{(2)}$	400	1	0	0	0	0	1	0
$q_2^{(2)}$	300	0	1	0	0	0	0	1
$Z^{(2)}$	34 000	0	0	0	0	0	+40	+60

(3) Programme budgété aux rendements réels

Formulation

$$\begin{pmatrix} 1,1 & 1,95 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,8 & 2,1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4,5 & 8,5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{(3)} \\ q_2^{(3)} \\ \lambda_1^{(3)} \\ \lambda_2^{(3)} \\ \lambda_3^{(3)} \\ \lambda_4^{(3)} \\ \lambda_5^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 000 \\ 2\ 000 \\ 5\ 000 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Max}] Z^{(3)} = 38,8 q_1^{(3)} + 59,1 q_2^{(3)}$$

Tableau de l'itération finale (voir page suivante)

Variables non nulles	Valeur	$q_1^{(3)}$	$q_2^{(3)}$	$\lambda_1^{(3)}$	$\lambda_2^{(3)}$	$\lambda_3^{(3)}$	$\lambda_4^{(3)}$	$\lambda_5^{(3)}$
$q_1^{(3)*}$	400	1	0	0	0	0	1	0
$\lambda_2^{(3)*}$	276,40	0	0	-1,06	1	0	-1,62	0
$\lambda_3^{(3)*}$	759,05	0	0	-4,36	0	1	+0,29	0
$\lambda_5^{(3)*}$	12,82	0	0	-0,51	0	0	0,56	1
$q_2^{(3)*}$	287,18	0	1	+0,51	0	0	-0,56	0
$Z^{(3)*}$	32492,28	0	0	30,31	0	0	5,40	0

Après arrondi de $q_2^{(3)*}$ à l'entier le plus proche, nous trouvons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 q_1^{(3)*} &= 400 & \lambda_1^{(3)*} &= 0,35 & \lambda_4^{(3)*} &= 0 \\
 q_2^{(3)*} &= 287 & \lambda_2^{(3)*} &= 277,30 & \lambda_5^{(3)*} &= 13 \\
 & & \lambda_3^{(3)*} &= 760,50 & Z^{(3)*} &= 32\ 481,70
 \end{aligned}$$

(4) Programme aux rendements et coûts réels, prix des produits théoriques

Formulation

Les contraintes sont identiques à celles du programme précédent, la fonction économique est :

$$\boxed{\text{Max}} Z^{(4)} = 36,2 q_1^{(4)} + 57,5 q_2^{(4)}$$

Tableau de l'itération finale (voir page suivante)

Nous remarquons que le sommet optimal est le même que précédemment et entraîne les mêmes arrondis ; la modification des marges unitaires entraîne une réduction de la fonction économique dont la valeur après arrondi de $q_2^{(4)*}$ devient :

$$Z^{(4)*} = 30\ 902,50$$

Tableau de l'itération finale

Variables non nulles	Valeur	q ₁ ⁽⁴⁾	q ₂ ⁽⁴⁾	λ ₁ ⁽⁴⁾	λ ₂ ⁽⁴⁾	λ ₃ ⁽⁴⁾	λ ₄ ⁽⁴⁾	λ ₅ ⁽⁴⁾
q ₁ ^{(4)*}	400	1	0	0	0	0	1	0
λ ₂ ^{(4)*}	276,48	0	0	- 1,02	1	0	- 1,62	0
λ ₃ ^{(4)*}	759,05	0	0	- 4,36	0	1	0,29	0
λ ₅ ^{(4)*}	12,82	0	0	- 0,51	0	0	0,56	1
q ₂ ^{(4)*}	287,18	0	1	+ 0,51	0	0	- 0,56	0
Z ^{(4)*}	30 992,22	0	0	29,49	0	0	3,76	0

(5) Programmation sur toutes données réelles

Formulation

Les contraintes sont celles des programmes (3) et (4), la fonction économique est :

$$[\text{Max}] Z^{(5)} = 31,2 q_1^{(5)} + 67,5 q_2^{(5)}$$

Tableau de l'itération finale

Variables non nulles	Valeur	q ₁ ⁽⁵⁾	q ₂ ⁽⁵⁾	λ ₁ ⁽⁵⁾	λ ₂ ⁽⁵⁾	λ ₃ ⁽⁵⁾	λ ₄ ⁽⁵⁾	λ ₅ ⁽⁵⁾
q ₁ ^{(5)*}	377,27	1	0	0,91	0	0	0	- 1,77
λ ₂ ^{(5)*}	313,64	0	0	- 2,55	1	0	0	2,86
λ ₃ ^{(5)*}	752,27	0	0	- 4,09	0	1	0	- 0,52
λ ₄ ^{(5)*}	22,73	0	0	- 0,91	0	0	1	1,77
q ₂ ^{(5)*}	300	0	1	0	0	0	0	1
Z ^{(5)*}	32020,11	0	0	28,36	0	0	0	12,19

Après arrondi de $q_1^{(5)*}$ à 377, nous retenons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} q_1^{(5)*} &= 377 & \lambda_1^{(5)*} &= 0,30 & \lambda_4^{(5)*} &= 23 \\ q_2^{(5)*} &= 300 & \lambda_2^{(5)*} &= 314,40 & \lambda_5^{(5)*} &= 0 \\ & & \lambda_3^{(5)*} &= 753,50 & & \end{aligned}$$

$$Z^{(5)*} = 32\,012,40$$

Situation du point réel

$$\begin{aligned} q_1^r &= 380 & \lambda_1^r &= 75 & \lambda_4^r &= 20 \\ q_2^r &= 260 & \lambda_2^r &= 390 & \lambda_5^r &= 40 \\ & & \lambda_3^r &= 1080 & & \end{aligned}$$

$$Z^r = 29\,406$$

D) Analyse des écarts de marge

La comparaison des cinq optimums ainsi définis et de la situation réelle nous permet d'analyser l'écart de marge conformément aux principes énoncés dans la section précédente.

1. Ecart ex-ante de budgétisation

$$Z^{(2)*} - Z^{(1)*} = 34\,000 - 35\,000 = -1\,000$$

La cause de cet écart est uniquement une modification des quantités optimales à produire du fait de l'introduction des contraintes externes, toutes les conditions internes étant les mêmes.

a) Analyse par produit

	P ₁	P ₂	Ensemble
Production budgétée	400	300	
Production standard	500	250	
Ecart quantités	- 100	+ 50	
Marge standard	40	60	
Ecart en valeur	- 4 000	+ 3 000	- 1 000

b) Analyse marginale par rapport au programme standard

	q_1	q_2	λ_1	λ_2	λ_3	Ensemble
Quantité budgétée	400	300	0	200	1 000	
Quantité standard	500	250	0	0	1 000	
Ecart quantités	+ 100	- 50	0	- 200	0	
Coût marginal (1)	0	0	+ 25	+ 5	0	
Ecart valeur	0	0	0	- 1 000	0	- 1 000

L'écart apparaît donc comme le regret de ne plus pouvoir assurer le plein emploi de la section S_2 du fait des contraintes de marché.

c) Analyse marginale par rapport au budget

	q_1	q_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	Ensemble
Quantité standard	500	250	0	0	1 000	- 100	50	
Quantité budget	400	300	0	200	1 000	0	0	
Ecart quantités	100	- 50	0	- 200	0	- 100	50	
Coût marginal (2)	0	0	0	0	0	40	60	
Ecart valeur	0	0	0	0	0	- 4 000	+ 3 000	+ 1 000

Le regret de subir une contrainte sur le marché de P_1 n'est que partiellement compensé par l'intérêt de développer jusqu'à saturation le marché de P_2 . Il est à noter que c'est par simple coïncidence que cette analyse fournit des résultats identiques à ceux des résultats de l'analyse par produit.

2. Ecart de rendement

$$z^{(3)*} - z^{(2)*} = 32\ 401,70 - 34\ 000 = - 1\ 598,30$$

a) Analyse par produit : le tableau est séparé en deux parties : la première mesure un écart sur programme, aux normes du budget, la seconde l'écart de rendement proprement dit, appliqué aux quantités optimales du programme (3) ; cet écart peut être ventilé par sections par un calcul matriciel élémentaire :

$$(v_1)^D_{(n,n)} \left[(a_{1j}) - (a'_{1j}) \right]_{(n,p)} (q_j^{(3)*})^D_{(p,p)}$$

	P ₁	P ₂	Ensemble
Quantité budget (3)	400	287	
Quantité budget (2)	400	300	
Ecart de quantités	0	- 13	
Marge budget (2)	40	60	
Ecart de programme	0	- 780	- 780
Marge budget (3)	38,80	59,10	
Ecart unitaire de marge	- 1,20	- 0,90	
Quantité budget (3)	400	287	
Ecart de rendement	- 480	- 258,30	- 738,30
Ecart global	- 480	- 1 038,30	- 1 518,30
Analyse de l'écart de rendement :			
S ₁	- 400	+ 143,50	- 256,50
S ₂	+ 320	- 114,80	+ 205,20
S ₃	- 400	- 287	- 687

b) Analyse marginale par rapport au budget (2)

Cette analyse peut être limitée à l'écart de programme, puisque l'écart de rendement proprement dit, dans l'optique de la section, n'est autre que la transposée de la matrice ci-dessus.

	q ₁	q ₂	λ ₁	λ ₂	λ ₃	λ ₄	λ ₅	Ensemble
Budget (2)	400	300	0	200	1 000	0	0	
Programme (3) rendements théoriques	400	287	26	226	1 104	0	13	
Ecart quantités	0	+ 13	- 26	- 26	- 104	0	- 13	
Coût marginal (2)	0	0	0	0	0	40	60	
Ecart programme	0	0	0	0	0	0	-780	- 780

L'introduction des rendements réels nous fait donc regretter de ne plus pouvoir saturer le marché de P₂.

c) Analyse marginale par rapport au programme (3)

	q_1	q_2	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	Ensemble
Budget (2) rendements réels	400	300	- 25	250	650	0	0	
Programme (3)	400	287	0,35	277,30	760,50	0	13	
Ecart quantités	0	13	- 25,35	- 27,30	- 110,50	0	- 13	
Coût marginal (3)	0	0	30,31	0	0	5,40	0	
Ecart de programme	0	0	- 760,30	0	0	0	0	--760,30
Budget (2) rendements théoriques	400	300	0	200	1 000	0	0	
Ecart quantités de rendement sur activité théorique	0	0	- 25	+ 50	- 350	0	0	
Coût unitaire			10	4	2			
Ecart de rendement			- 250	+ 200	- 700			- 750
Ecart global	0	0	- 1 018,30	+ 200	- 700	0	0	-1518,30
Analyse de l'écart de rendement :			S_1	S_2	S_3			
P_1			- 400	+ 320	- 400			- 480
P_2			+ 150	- 120	- 300			- 270

L'écart de programme s'analyse comme le regret d'avoir à subir les rendements réels qui auraient interdit la réalisation du programme (2), la section S_1 étant alors goulet d'étranglement.

3. Ecart de prix des facteurs

$$Z^{(4)*} - Z^{(3)*} = 30\ 982,50 - 32\ 481,70 = - 1\ 499,20$$

Dans le cas particulier de cet exemple, le sommet optimal du polyèdre est le même dans les deux programmes ; il en résulte que tous les écarts de programme sont nuls et que l'analyse marginale disparaît, seuls demeurent les écarts de prix des facteurs qui donnent lieu à l'élaboration du tableau suivant :

	P ₁	P ₂	Ensemble
Ecart sur coûts directs	- 800	+ 287	- 513
Ecart sur sections : S ₁	- 440	- 559,65	- 999,65
S ₂	+ 560	+ 301,35	++ 861,35
S ₃	- 360	- 487,90	- 847,90
Ecart par produit	- 1 040	- 459,20	- 1 499,20

4. Ecart de prix des produits

$$Z^{(5)*} - Z^{(4)*} = 32\ 012,40 - 30\ 982,50 = + 1\ 029,90$$

a) Analyse par produit

	P ₁	P ₂	Ensemble
Quantités programme (5)	377	300	
Quantités programme (4)	400	287	
Ecart de quantités	- 23	+ 13	
Marge unitaire (4)	36,20	57,50	
Ecart de programme	- 832,60	+ 747,50	- 85,10
Prix de vente réel	95	160	
Prix de vente prévu	100	150	
Ecart unitaire sur prix	- 5	+ 10	
Quantités programme (5)	377	300	
Ecart sur prix de vente	- 1 885	+ 3 000	+ 1 115
Ecart global	- 2 717,60	+ 3 747,50	++1 029,90

b) Analyse marginale par rapport au programme (4)

(voir tableau page suivante)

c) Analyse marginale par rapport au programme (5)

(voir tableau page suivante)

b)

	q ₁	q ₂	λ ₁	λ ₂	λ ₃	λ ₄	λ ₅	Ens.
Programme (4)	400	287	0,35	277,30	760,50	0	13	
Programme (5)	377	300	0,30	314,40	753,50	23	0	
Ecart quantités	+ 23	- 13	+ 0,05	- 37,10	+ 7	-23	+13	
Coût marginal (4)	0	0	29,49	0	0	3,76	0	
Ecart de programme	0	0	+ 1,47	0	0	-86,57	0	- 85,10
Ecart de prix	-1 835	+3 000						+1115
Ecart global	-1 835	+3 000	+ 1,47	0	0	-86,57	0	+1029,90

c)

	q ₁	q ₂	λ ₁	λ ₂	λ ₃	λ ₄	λ ₅	Ensemble
Programme (4)	400	287	0,35	277,30	760,50	0	13	
Programme (5)	377	300	0,30	314,40	753,50	23	0	
Ecart quantités	+ 23	- 13	+0,05	-37,10	+ 7	-23	+13	
Coût marginal (5)	0	0	28,36	0	0	0	12,19	
Ecart de programme	0	0	+1,42	0	0	0	+158,48	+ 159,90
Qtés programme (4)	400	287						
Prix réel	95	160						
Prix prévu	100	150						
Ecart unitaire de prix	- 5	+ 10						
Ecart de prix	-2 000	+2 870						+ 870
Ecart global	-2 000	+2 870	+1,42	0	0	0	+158,48	+1029,90

5. Ecart de production

$$Z^x - Z^{(5)x} = 29\ 406 - 32\ 012,40 = - 2\ 606,40$$

Toutes les données étant identiques, l'écart n'a pas d'autre cause que la différence de quantités produites.

a) Analyse par produit

(voir tableau page suivante)

b) Analyse marginale

(voir tableau page suivante)

a)

	P ₁	P ₂	Ensemble
Quantités réelles	380	260	
Quantités programme (5)	377	300	
Ecart quantités	+ 3	- 40	
Marge unitaire	31,20	67,50	
Ecart de production	+ 93,60	- 2 700	- 2 606,40

b)

	q ₁	q ₂	λ ₁	λ ₂	λ ₃	λ ₄	λ ₅	Ensemble
Programme (5)	377	300	0,30	314,40	753,50	23	0	
Programme réel	380	260	75	390	1 030	20	40	
Ecart quantités	- 3	+ 40	- 74,70	- 75,60	- 326,50	+ 3	- 40	
Coût marginal (5)	0	0	20,36	0	0	0	12,19	
Ecart de production	0	0	-2 118,76	0	0	0	-497,64	-2 606,40

Cette analyse montre que, toutes données réelles supposées connues, l'entreprise n'a pas su, du point de vue de l'activité, assurer le plein emploi de la section S₁, goulet d'étranglement, et que, du point de vue commercial, elle n'a pas su tirer pleinement parti du marché de P₂.

