



HAL
open science

Relations de tresses dans SL_n

Raphaël Bonis

► **To cite this version:**

| Raphaël Bonis. Relations de tresses dans SL_n . 2013. hal-00823400v1

HAL Id: hal-00823400

<https://hal.science/hal-00823400v1>

Preprint submitted on 16 May 2013 (v1), last revised 15 May 2014 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Relations de tresses dans SL_n

Raphaël Bonis

Abstract : The study of integrable systems in statistical physics (Ising model, vertex model) led to the so called Yang-Baxter equation [1], who plays a fundamental role in the quantum group theory. This equation looks like the relation for braids with three strings with parameters added, these parameters being connected by analytical relations. Furthermore, it is well known that the Artin braid groups admit a presentation by generators and relations, including the relation for three strings. In [5] we suggested the existence of presentations of the classical groups in the form of braid relations with parameters. For example, such a presentation exists for $SO_3(\mathbb{R})$ according to the decomposition of a rotation matrix using Euler angles. The case of certain compact Lie groups was treated in [4] and [5]. It exists also such presentations for certain unipotent groups [3] attached to the classical algebraic groups. Natural algebraic Yang-Baxter relations hold for classical algebraic groups [2], such as SL_n group on an any commutative ring. We thus tried to find a presentation of SL_n using braid relations with parameters (restricting ourselves to the case of a commutative field).

Yet it is known, since Steinberg [14], a presentation of SL_n and its universal central extension and the kernel of the homomorphism from Steinberg group to SL_n is known to be an important invariant of the ring theory, because it is Milnor K_2 [10]. For the unimodular group of rank 1 and, at upper rank, for unipotent and monomial maximal subgroups, presentations were established without hindrance but at the price of rather long calculus. The study of upper ranks, and in particular SL_3 , entailed more difficulties, a first result being, for $n \geq 3$, that the natural Yang-Baxter-type presentation related to SL_n defines a group G_n strictly bigger than SL_n . Our main result is the description of the kernel K_{YB} of the natural surjection from G_n to SL_n . So our study allowed to create a new invariant (at least in the case of a commutative field) which appears in a similar way at K_2 . This study also allowed to make the link between braids and groups with BN-pair or more exactly with a root datum. We therefore present SL_n thanks to UN pair.

1 Introduction

L'étude des systèmes intégrables en physique statistique (modèle d'Ising, modèles à vertex...) a conduit à l'équation dite de Yang-Baxter [1], qui joue un rôle fondamental dans la théorie des groupes quantiques. Cette équation a l'allure d'une relation de tresses à trois brins avec des paramètres en plus, ces paramètres étant liés par des relations analytiques. Par ailleurs, il est bien connu que le groupe des tresses d'Artin admet une présentation par générateurs et relations, dont la relation à trois brins. Ces remarques ont conduit Daniel Bennequin à se poser la question de l'existence d'une présentation des groupes classiques à l'aide de relations de tresses à paramètre. Par exemple, une telle présentation existe pour $SO_3(\mathbb{R})$ en vertu de la décomposition d'une matrice de rotation à l'aide des angles d'Euler et le cas de certains groupes de Lie compacts a été traité dans [4] et [5]. Il existe aussi des présentations analogues pour certains groupes unipotents [3]. Il apparaît ainsi des relations de Yang-Baxter pour des groupes non-compacts [2], comme le groupe SL_n sur un corps commutatif quelconque et même sur un anneau commutatif quelconque. Une fois ces relations établies, il reste à voir dans quelle mesure elles définissent une présentation du groupe.

Or on connaît, depuis Steinberg [14], une présentation du groupe SL_n et de son extension centrale universelle et l'on sait que le noyau de l'homomorphisme du groupe de Steinberg dans SL_n est un invariant important de la théorie des anneaux, puisque c'est le K_2 de Milnor [10]. Nous nous sommes demandés s'il existait une présentation de SL_n à l'aide des relations de tresses à paramètres.

Notons tout de suite que nous n'avons pas traité le cas d'un anneau quelconque ; nous nous sommes contentés presque toujours de relations de tresses sur un corps commutatif. Pour le groupe unimodulaire de rang 1 et, aux rangs supérieurs, pour des sous-groupes unipotent et monomial maximaux, des présentations ont été établies sans encombre mais au prix de calculs assez longs. La plupart des démonstrations fournies ne sont pas valables sur un anneau quelconque.

L'étude des groupes de rang supérieur, et en particulier de SL_3 , a posé bien plus de difficultés, un premier résultat, pour $n \geq 3$, étant que la présentation naturelle de type Yang-Baxter associée à SL_n définit un groupe G_n strictement plus gros que SL_n . Notre principal résultat est la description du noyau K_{YB} de la surjection naturelle de G_n sur SL_n . Ainsi notre étude a permis de faire apparaître un nouvel invariant (au moins dans le cas d'un corps commutatif) qui se présente de façon similaire au K_2 . Cette étude a également permis de faire le lien entre les tresses et les groupes possédant une BN-paire ou plus précisément une donnée radicielle. Nous présentons ainsi SL_n à l'aide d'une paire UN.

On établit, au § 2, des relations de tresses entre des générateurs $u_\alpha(t)$ du groupe $SL(n, k)$, où α est racine simple d'un système de type A_{n-1} et t un élément d'un corps commutatif k (ou d'un anneau commutatif). Ces générateurs, qui sont des sous-groupes à un paramètre, sont ceux utilisés par Steinberg pour donner une présentation de $SL(n, k)$ et de son extension centrale universelle, présentations que l'on rappelle au § 3. On définit alors (§ 4) des monoïdes abstraits à partir des relations de tresses en n'utilisant que les racines simples ou leurs opposées. En imposant une relation supplémentaire on obtient des groupes $U(n, k)$ et $G(n, k)$. Les liens entre les paramètres dans les relations de tresses définissent des variétés algébriques, M_i et P_i , qui jouent un rôle essentiel. On a ainsi des homomorphismes surjectifs $\phi : G(n, k) \rightarrow SL(n+1, k)$ et $U(n, k) \rightarrow SL^+(n+1, k)$ (groupe des matrices triangulaires supérieures strictes). On démontre au § 5 que, si $k \neq \mathbb{F}_2$, $U(n, k)$ est isomorphe à $SL^+(n+1, k)$ et, au § 6, que $G(1, k)$ est isomorphe à $SL(2, k)$. Le paragraphe suivant traite le cas particulier de $SL(2, \mathbb{Z})$.

Le groupe monomial admet également une présentation sous forme de tresses à paramètre, comme on le montre au § 8. Mais pour $n \geq 2$, les relations de tresses ne permettent plus d'obtenir, à elles-seules, toutes les formules de commutateurs de la présentation de Steinberg. On expose dans le long § 9, les problèmes rencontrés pour le cas $n = 2$. Des générateurs de $\ker \phi$ sont mis en évidence et l'on définit des relations supplémentaires (toujours sous la forme de tresses) qui permettent d'obtenir finalement une présentation de $SL(3, k)$ par équations de Yang-Baxter. Le § 10 étudie le cas $n > 2$.

Le paragraphe 11 présente le groupe $SL(n, k)$ à l'aide des générateurs de la BN-paire ou plus exactement ceux d'une donnée radicielle. On résume tous ces résultats dans le dernier paragraphe.

2 Relations de tresses dans $SL(n, k)$

Soit k un corps commutatif, k^* le groupe multiplicatif de k . La lettre t désigne un élément quelconque de k , ou de k^* lorsque l'on divise par t . On définit des sous-groupes à un paramètre qui satisfont à des relations d'échanges à deux ou trois termes, du type des relations de tresses à paramètres, dites équations de Yang-Baxter :

– au rang 1, pour $u_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $u_{-\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$:

$$(T_0) : u_\alpha(0) = u_{-\alpha}(0) = 1$$

$$(T_1) : u_\alpha(r) \cdot u_{-\alpha}(s) \cdot u_\alpha(t) = u_{-\alpha}(t') \cdot u_\alpha(s') \cdot u_{-\alpha}(r') \iff \begin{cases} s' = r + t + rst \\ s'r' = rs \\ t's' = st \\ r' + t' + t's'r' = s \end{cases}$$

pour $n_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix} = u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot u_\alpha(t)$, $h_\alpha(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = n_\alpha(t) \cdot n_\alpha(-1)$ et :

$$(N_0) : n_\alpha(1) \cdot n_\alpha(-1) = 1$$

$$(N_1) : n_\alpha(r) \cdot n_\alpha(s) = n_\alpha(r') \cdot n_\alpha(s') \iff r's = rs'$$

– au rang 2, pour $u_{\alpha_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $u_{\alpha_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $i \neq j \in \{1, 2\}$:

$$(T_3) : u_{\alpha_i}(r) \cdot u_{\alpha_j}(s) \cdot u_{\alpha_i}(t) = u_{\alpha_j}(t') \cdot u_{\alpha_i}(s') \cdot u_{\alpha_j}(r') \iff \begin{cases} s' = r + t \\ s'r' = rs \\ t's' = st \\ r' + t' = s \end{cases}$$

pour $n_{\alpha_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ -t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $n_{\alpha_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, pour $i \neq j \in \{1, 2\}$:

$$(N_3) : n_{\alpha_i}(r) \cdot n_{\alpha_j}(s) \cdot n_{\alpha_i}(t) = n_{\alpha_j}(t') \cdot n_{\alpha_i}(s') \cdot n_{\alpha_j}(r') \iff \begin{cases} s'r' = rs \\ t's' = st \end{cases}$$

– aux rangs supérieurs à 2, si $u_{\alpha_i}(t)$ (resp. $u_{-\alpha_i}(t)$) est la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf les éléments diagonaux qui valent 1 et celui de la i -ème ligne (resp. colonne) et $i+1$ -ème colonne (resp. ligne) qui vaut t et si $n_{\alpha_i}(t) = u_{\alpha_i}(t) \cdot u_{-\alpha_i}(-t^{-1}) \cdot u_{\alpha_i}(t)$, alors pour $|i-j| > 1$:

$$(T_2) : u_{\alpha_i}(r) \cdot u_{\alpha_j}(s) = u_{\alpha_j}(s) \cdot u_{\alpha_i}(r) \text{ pour tous } r, s \in k$$

$$(N_2) : n_{\alpha_i}(r) \cdot n_{\alpha_j}(s) = n_{\alpha_j}(s) \cdot n_{\alpha_i}(r) \text{ pour tous } r, s \in k^*.$$

3 Présentation de $\mathrm{SL}(n, k)$ par Steinberg

On adopte, pour cette section, d'autres notations, souvent utilisées en K-théorie [11]. Soit 1_{n+1} la matrice identité dans $\mathrm{GL}(n+1, k)$ et $e_{i,j}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i -ème ligne et j -ème colonne qui vaut 1. Pour $t \in k$, et $1 \leq i, j \leq n$, on définit les matrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}(t) &= 1_{n+1} + te_{i,j} \\ \mathbf{n}_{i,j}(t) &= \mathbf{u}_{i,j}(t) \cdot \mathbf{u}_{j,i}(-t^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{i,j}(t) \\ \mathbf{h}_{i,j}(t) &= \mathbf{n}_{i,j}(t) \cdot \mathbf{n}_{i,j}(-1). \end{aligned}$$

$$\text{On a alors : } \mathbf{u}_{i,j}(r) \cdot \mathbf{u}_{i,j}(t) = \mathbf{u}_{i,j}(r+t) \quad (A)$$

$$[\mathbf{u}_{i,j}, (r)\mathbf{u}_{k,l}(t)] = 1 \quad \text{si } i \neq l, j \neq k \quad (B_1)$$

$$[\mathbf{u}_{i,j}, (r)\mathbf{u}_{j,k}(t)] = \mathbf{u}_{i,k}(rt) \quad \text{si } i, j, k \text{ sont distincts deux à deux} \quad (B_2)$$

$$\mathbf{n}_{i,j}(t) \cdot \mathbf{u}_{i,j}(r) \cdot \mathbf{n}_{i,j}(-t) = \mathbf{u}_{j,i}(-rt^{-2}) \quad (B')$$

$$\mathbf{h}_{i,j}(r) \cdot \mathbf{h}_{i,j}(r') = \mathbf{h}_{i,j}(rr') \quad (C)$$

D'après Steinberg [14], une présentation de $\mathrm{SL}(n+1, k)$ est donnée par les $\mathbf{u}_{i,j}(t)$ soumis aux relations (A), (B₁), (B₂) et (C) si $n \geq 2$ et (A), (B') et (C) si $n = 1$.

Le groupe de Steinberg $\mathrm{St}(n+1, k)$ présenté par (A) et (B_i), $i = 1, 2$, si $n \geq 2$ et (A) et (B') si $n = 1$ est une extension centrale de $\mathrm{SL}(n+1, k)$ et, en dehors de quelques cas particuliers de « petits » corps, $\mathrm{St}(n+1, k)$ est l'extension centrale universelle de $\mathrm{SL}(n+1, k)$.

Enfin, si $n \geq 2$, une présentation du sous-groupe unipotent $\mathrm{SL}^+(n+1, k)$ de $\mathrm{SL}(n+1, k)$ des matrices triangulaires supérieures strictes (avec des 1 sur la diagonale) est donnée par les générateurs $\mathbf{u}_{i,j}(t)$ pour $i < j$ uniquement et soumis aux relations (A), (B₁), (B₂).

Alors que le groupe $\mathrm{SL}(n+1, k)$ est engendré par les seuls $\mathbf{u}_{i,i+1}(t)$ et $\mathbf{u}_{i+1,i}(t)$, $1 \leq i \leq n$, la présentation de Steinberg utilise tous les $\mathbf{u}_{i,j}(t)$ pour $1 \leq i, j \leq n$.

Il en va de même de $\mathrm{SL}^+(n+1, k)$, engendré par les seuls $\mathbf{u}_{i,i+1}(t)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Les relations de tresses permettent d'envisager une autre présentation : c'est à Daniel Bennequin que l'on doit cette idée.

4 Présentation d'Artin à paramètres

Dans l'idée de généraliser les définitions qui suivent à des systèmes autres que A_n , on utilisera, comme Steinberg, les notations plus lourdes du paragraphe 2, plutôt que celles du paragraphe précédent.

Soit $\Pi = \{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base d'un système de racines R de type Γ quelconque [6]. W le groupe de Weyl associé, $w_\alpha = w_{-\alpha} \in W$ la réflexion associée à $\alpha \in R$ et $m_{\alpha,\beta}$ l'ordre de $w_\alpha w_\beta$ dans W .

On a donc $m_{\alpha,\pm\alpha} = 1$, et pour le système de racines de type $\Gamma = A_n$ qui est celui que nous traiterons ici, si $\alpha \neq \beta \in \pm\Pi$, $m_{\alpha,\beta} = 3$ ou 2 selon que $\alpha + \beta \in R$ ou non. (On étend ici la définition des coefficients de la matrice de Coxeter aux opposées des racines simples. Pour d'autres systèmes que A_n les nombres $m_{\alpha,\beta}$ peuvent donc prendre les valeurs 4 et 6.)

A chaque $\alpha \in \Pi$ et $t \in k$, on associe les symboles $\mathbf{u}_\alpha(t)$ et $\mathbf{u}_{-\alpha}(t)$ et on note $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}(\Gamma, k)$ (resp. $\mathcal{M}_n^+ = \mathcal{M}_n^+(\Gamma, k)$) le monoïde libre sur les $\mathbf{u}_{\pm\alpha}(t)$ (resp. sur les seuls $\mathbf{u}_\alpha(t)$).

Soit \mathcal{A}_n (resp. \mathcal{A}_n^+) le quotient de \mathcal{M}_n (de \mathcal{M}_n^+) par toutes les relations $(T_{m_{\alpha,\beta}})$ pour tous les $\alpha \neq \beta$ de $\pm\Pi$ (resp. de Π). \mathcal{A}_n^+ peut être vu comme un monoïde de tresses à paramètre.

On définit enfin $\mathbf{G}(n, k)$ (resp. $\mathbf{U}(n, k)$) comme le quotient de \mathcal{A}_n (de \mathcal{A}_n^+) par les relations (T_0) .

De même, $\mathbf{N}(n, k)$ est le quotient du monoïde libre sur les $\mathbf{n}_{\pm\alpha}(t)$, $\alpha \in \Pi$ et $t \in k^*$ par les relations (N_0) et $(N_{m_{\alpha,\beta}})$ pour $\alpha, \beta \in \Pi$.

Pour les cas $m_{\alpha,\beta} = 4$ et $m_{\alpha,\beta} = 6$, il existe aussi des relations de tresses (voir [3]). Il résulte de la proposition 2 ci-dessous et de l'étude faite au § 8 que $\mathbf{U}(n, k)$, $\mathbf{G}(n, k)$ et $\mathbf{N}(n, k)$ sont des groupes, extensions respectives de $\mathrm{SL}^+(n+1, k)$, $\mathrm{SL}(n+1, k)$ et de son sous-groupe monomial maximal N . Ce sont ces groupes $\mathbf{G}(n, k)$ (resp. $\mathbf{U}(n, k)$, $\mathbf{N}(n, k)$), avec leurs présentations, que l'on nomme groupes d'Artin à paramètres, ou groupes de tresses à paramètres. La question que nous examinons dans les sections suivantes est celle du rapport, dans le cas $\Gamma = A_n$, entre les groupes ainsi présentés et les groupes $\mathrm{SL}(n+1, k)$ (resp. $\mathrm{SL}^+(n+1, k)$, N).

$\mathbf{G}(n, k)$ étant une extension du groupe $\mathrm{SL}(n+1, k)$, on notera $\phi : \mathbf{G}(n, k) \rightarrow \mathrm{SL}(n+1, k)$ l'homomorphisme surjectif associant à chaque générateur $\mathbf{u}_\alpha(t)$ la matrice correspondante et $\mathbf{K}_{\mathbf{VB}}(n, k)$ le noyau de ϕ .

On notera également \mathbf{u}_α le sous-groupe (de $\mathbf{U}(n, k)$ ou $\mathbf{G}(n, k)$) engendré par les $\mathbf{u}_\alpha(t)$, $t \in k$.

La démonstration de la présentation donnée par Steinberg repose sur deux arguments essentiels [7] :

- dans le groupe unipotent $\mathrm{SL}^+(n+1, k)$, comme dans le groupe abstrait défini par générateurs et relations correspondant, tout élément s'écrit sous la forme :

$$\prod_{\alpha \in R^+} u_\alpha(t_\alpha), \quad t_\alpha \in k.$$

l'unicité de cette écriture permettant d'établir l'isomorphisme entre les deux groupes ;

- le groupe de Weyl agit à travers les $n_\alpha(r)$ sur les $u_\beta(t)$:

$$n_\alpha(t) \cdot u_\beta(r) \cdot n_\alpha(-t) = u_{w_\alpha(\beta)}(\pm r t^{\pm n(\alpha, \beta)})$$

où $n(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle = \frac{2(\alpha, \beta')}{(\alpha, \alpha)}$ sont les nombres de Cartan.

Dans le groupe abstrait, cette relation, conséquence des formules de commutateurs (B_1) , (B_2) , entraîne l'existence d'une paire BN puis de la décomposition de Bruhat, donc la présentation attendue.

On note $M_1 \subset k^3 \times k^3$ (resp. M_3), la sous-variété algébrique des éléments (r, s, t, r', s', t') qui vérifient le système de la relation (T_1) (resp. (T_3)).

On note $P_2 \subset k^2 \times k^2$, la sous-variété algébrique des éléments (u, v, u', v') tels que $uv = u'v'$ et $P_3 \subset k^3 \times k^3$, la sous-variété algébrique des éléments (u, v, w, u', v', w') tels que $uv = u'v'$ et $vw = v'w'$ (variété des éléments vérifiant la « loi des sinus » de la relation (N_3)).

On note enfin $P_i^* = P_i \cap (k^{*i} \times k^{*i})$, $i = 2, 3$. Par la suite, on aura besoin du résultat élémentaire suivant.

Proposition 1. (i) Si $(r, s, t, r', s', t') \in M_1$ ou M_3 alors $(r, s, t, r', s', t') \in P_3$.

(ii) Si $uv \neq -1$ alors $(u, v, u', v') \in P_2$ est équivalent à :

$$((u' - u)(1 + uv)^{-1}, v, u, (v - v')(1 + uv)^{-1}, u', v') \in M_1.$$

(iii) $(u, v, u', v') \in P_2$ est équivalent à $(u - u', v, -u, v - v', -u', v') \in M_3$.

Démonstration : (i) est évident.

(ii) $(u, v, u', v') \in P_2$ est équivalent à $uv = u'v'$; pour $uv = u'v' \neq -1$, on pose $h = 1 + uv = 1 + u'v'$.

D'où $rs = h^{-1}(u' - u)v = h^{-1}(u'v - uv) = h^{-1}(u'v - u'v') = h^{-1}u'(v - v') = r's'$.

De plus $r + t + rst = h^{-1}(u' - u) + u + h^{-1}(u' - u)vu = h^{-1}(u' - u)(1 + uv) + u = u' - u + u = u' = s'$ et $r' + t' + r's't' = h^{-1}(v - v') + v' + h^{-1}(v - v')u'v' = v' + h^{-1}(v - v')(1 + u'v') = v' + (v - v') = v = s$.

On a bien $((u' - u)(1 + uv)^{-1}, v, u, (v - v')(1 + uv)^{-1}, u', v') \in M_1$. La réciproque est évidente.

(iii) $(u, v, u', v') \in P_2$ est équivalent à $uv = u'v'$. D'où $rs = (u - u')v = uv - u'v = v'u' - vu' = (-v' + v)(-u') = r's'$ et $v(-u) = v'(-u')$. Comme $(u - u') + (-u) = -u'$ et $v' + (v - v') = v$ on a bien $(u - u', v, -u, v - v', -u', v') \in M_3$.

La réciproque est encore évidente. □

5 Présentation du groupe unipotent maximal

On suppose $n > 1$. On dispose dans $\mathbf{U}(n, k)$ des générateurs $u_\alpha(t)$ pour toute racine simple $\alpha \in \Pi$; on veut définir des éléments $u_\epsilon(t)$ pour toutes les racines positives $\epsilon \in R^+$, et montrer que les relations (A) , (B_1) et (B_2) sont vérifiées.

5.1 Au rang 2

On va d'abord donner une condition équivalente à la relation de tresses (T_3) .

On travaille donc dans un premier temps dans le monoïde libre sur $u_\alpha(t)$ et $u_\beta(t)$, $t \in k$.

Proposition 2. Si u_α et u_β vérifient (T_0) et (T_3) alors ce sont des sous-groupes à un paramètre : $u_\alpha(r) \cdot u_\alpha(t) = u_\alpha(r+t)$ et $u_\beta(r) \cdot u_\beta(t) = u_\beta(r+t)$.

Démonstration : Puisque u_α et u_β vérifient (T_3) :

$$u_\alpha(r) \cdot u_\beta(s) \cdot u_\alpha(t) = u_\beta(t') \cdot u_\alpha(s') \cdot u_\beta(r') \quad (*) \quad \iff \quad \begin{cases} s' & = & r + t \\ s'r' & = & rs \\ t's' & = & st \\ r' + t' & = & s \end{cases}$$

On pose $s = 0$; alors $r' + t' = 0$ et, si $r \neq 0$ et $t \neq 0$, soit $r' = t' = 0$, soit $s' = 0$.

Si $r' = t' = 0$ alors la relation (*) devient $u_\alpha(r).u_\beta(0).u_\alpha(t) = u_\beta(0).u_\alpha(r+t).u_\beta(0)$ ce qui compte tenu de (T_0) : $u_\alpha(0) = u_\beta(0) = 1$ donne bien $u_\alpha(r).u_\alpha(t) = u_\alpha(r+t)$.

Si $s' = 0$ alors $r+t = 0$ donc la relation (*) devient $u_\alpha(r).u_\alpha(-r) = u_\beta(-r').u_\beta(r')$ ce qui n'est possible que si $u_\alpha(r).u_\alpha(-r) = 1$ et $u_\beta(-r').u_\beta(r') = 1$. \square

Proposition 3. Si u_α et u_β vérifient (T_0) et (T_3) le commutateur $[u_\alpha(r), u_\beta(s)] = u_\alpha(r).u_\beta(s).u_\alpha(-r).u_\beta(-s)$ ne dépend que du produit rs .

Démonstration : Soit r, s, r', s' tels que $rs = r's'$.

D'après la proposition 1 (iii) on a $(r-s', s, -r, s-r', -s', r') \in M_3$ donc (T_3) donne :

$$u_\alpha(r-s').u_\beta(s).u_\alpha(-r) = u_\beta(r').u_\alpha(-s').u_\beta(s-r')$$

$$\text{soit, d'après le résultat précédent : } u_\alpha(-s').u_\alpha(r).u_\beta(s).u_\alpha(-r) = u_\beta(r').u_\alpha(-s').u_\beta(-r').u_\beta(s)$$

$$\text{ou encore : } u_\alpha(r).u_\beta(s).u_\alpha(-r).u_\beta(-s) = u_\alpha(s').u_\beta(r').u_\alpha(-s').u_\beta(-r').$$

\square

Cette démonstration permet même d'obtenir le résultat plus précis suivant.

Proposition 4. Dans le monoïde libre sur $u_\alpha(t)$ et $u_\beta(t)$, $t \in k$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u_α et u_β vérifient (T_0) et (T_3) ;

(ii) $u_\alpha(r), u_\beta(s)$ sont des sous-groupes à un paramètre (i.e. vérifient (A)) et $[u_\alpha(r), u_\beta(s)]$ ne dépend que du produit rs .

Dans la suite du paragraphe, on travaille dans $U(2, k)$; on suppose donc maintenant que $u_\alpha(t)$ et $u_\beta(t)$ vérifient (T_0) et (T_3) .

D'après la proposition 2, $U(2, k)$ est un groupe, et d'après le résultat précédent, on peut définir $u_{\alpha+\beta}(rs) = [u_\alpha(r), u_\beta(s)]$ et l'on a facilement $u_{\alpha+\beta}(0) = 1$. Si les images de $u_\alpha(t)$ et $u_\beta(t)$ dans $SL^+(3, k)$ sont res-

pectivement $\begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{pmatrix}$, celle de $u_{\alpha+\beta}(t)$ est bien sûr $\begin{pmatrix} 1 & & t \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

De même, on peut définir dans $U(2, k)$ l'élément $u_{\beta+\alpha}(-rs) = [u_\beta(s), u_\alpha(r)]$. Le signe et la notation additionnelle $\alpha + \beta$ sont justifiés par le résultat suivant.

Lemme 1. Soit $(r, s) \in k^2$. Pour tout couple $(r', s') \in k^2$ tel que $r's' = rs$ et $(r', s') \neq (r, s)$ on a :

$$[u_\alpha(r), u_\beta(s)] = [u_\beta(s'), u_\alpha(-r')].$$

Démonstration : On suppose $s \neq s'$.

$[u_\alpha(r), u_\beta(s)] = [u_\beta(s'), u_\alpha(-r')]$ est équivalent à

$$u_\alpha(r).u_\beta(s).u_\alpha(-r).u_\beta(-s) = u_\beta(s').u_\alpha(-r').u_\beta(-s').u_\alpha(r')$$

$$\text{ou encore } u_\beta(-s').u_\alpha(r).u_\beta(s).u_\alpha(-r) = u_\alpha(-r').u_\beta(-s').u_\alpha(r').u_\beta(s).$$

$$\text{Puisque } s' - s \neq 0, \text{ on a } u_\beta(-s').u_\alpha(r).u_\beta(s) = u_\alpha(rs(s-s')^{-1}).u_\beta(s-s').u_\alpha(-s's(s-s')^{-1})$$

$$\text{d'où } u_\beta(-s').u_\alpha(r).u_\beta(s).u_\alpha(-r) = u_\alpha(rs(s-s')^{-1}).u_\beta(s-s').u_\alpha(-s'r(s-s')^{-1}).u_\alpha(-r)$$

$$= u_\alpha(rs(s-s')^{-1}).u_\beta(s-s').u_\alpha(-rs(s-s')^{-1}).$$

$$\text{Par ailleurs : } u_\beta(-s').u_\alpha(r').u_\beta(s) = u_\alpha(r's(s-s')^{-1}).u_\beta(s-s').u_\alpha(-r's'(s-s')^{-1}),$$

$$\text{d'où } u_\alpha(-r').u_\beta(-s').u_\alpha(r').u_\beta(s) = u_\alpha(-r').u_\alpha(r's(s-s')^{-1}).u_\beta(s-s').u_\alpha(-r's'(s-s')^{-1})$$

$$= u_\alpha(r's'(s-s')^{-1}).u_\beta(s-s').u_\alpha(-r's'(s-s')^{-1}).$$

\square

Remarque 1 : Le choix des signes est tel que $u_{\alpha+\beta}(rs) = u_{\beta+\alpha}(rs)$.

Mais la symétrie entre α et β est ici perdue dans la définition du sous-groupe à un paramètre $u_{\alpha+\beta}$.

On introduit ainsi une relation d'ordre sur l'ensemble $\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$ des racines positives.

On pose : $\alpha < \beta < \alpha + \beta$. Pour $\epsilon, \epsilon' \in \Pi$, on a alors :

$$[u_\epsilon(r), u_{\epsilon'}(s)] = u_{\epsilon+\epsilon'}(\sigma(\epsilon, \epsilon')rs)$$

où $\sigma(\epsilon, \epsilon) = 0$, $\sigma(\epsilon, \epsilon') = 1$ si $\epsilon < \epsilon'$ et $\sigma(\epsilon, \epsilon') = -1$ si $\epsilon > \epsilon'$.

Au lieu d'établir un ordre sur l'ensemble des racines, on peut introduire des constantes de structure $n_{\alpha, \beta}$ définies par $[u_\alpha(r), u_\beta(s)] = u_{\alpha+\beta}(n_{\alpha, \beta}rs)$.

Pour que $u_{\alpha+\beta} = u_{\beta+\alpha}$, il faut alors imposer que $n_{\alpha, \beta} = -n_{\beta, \alpha}$.

Mais les conditions sur ces constantes de structure se compliquent un peu aux rangs supérieurs à 2.

Remarque 2 : Si $k \neq \mathbb{F}_2$, pour $(r, s) \in k^{*2}$ on peut toujours trouver $(r', s') \neq (r, s)$ tels que $rs = r's'$. Mais si $k = \mathbb{F}_2$, au moins un des paramètres est toujours nul dans M_3 , de sorte que la relation (T_3) est toujours triviale. Le groupe $U(2, k)$ est alors le groupe diédral infini engendré par $u_\alpha(1)$ et $u_\beta(1)$. Par ailleurs la démonstration des deux premières propositions n'utilisait pas la structure de corps de k . Ces deux résultats sont donc aussi valables pour un anneau commutatif, avec la même démonstration. Il en est tout autrement du lemme 1 ci-dessus et du lemme 2 ci-dessous, ne serait-ce que sur l'anneau \mathbb{Z} . Par la suite, en dehors du paragraphe 7, nous ne considérerons plus que le cas d'un corps k .

Lemme 2. $u_{\alpha+\beta}$ est un sous-groupe à un paramètre : $u_{\alpha+\beta}(r).u_{\alpha+\beta}(s) = u_{\alpha+\beta}(r+s)$.

Démonstration : Le cas $s = 0$ est trivial ; on suppose $s \neq 0$.

(On indique par une accolade l'utilisation d'une relation de tresses, suivant la pratique de [8].)

$$\begin{aligned}
\text{On a : } u_{\alpha+\beta}(r).u_{\alpha+\beta}(s) &= u_{\alpha+\beta}(r).u_{\beta+\alpha}(s) \\
&= [u_\alpha(r), u_\beta(1)].[u_\beta(1)u_\alpha(-s)] \\
&= u_\alpha(r).u_\beta(1).u_\alpha(-r).\underbrace{u_\beta(-1).u_\beta(1).u_\alpha(-s).u_\beta(-1).u_\alpha(s)} \\
&= \underbrace{u_\alpha(r).u_\beta(1).u_\alpha(-r-s).u_\beta(-1).u_\alpha(s)} \\
&= u_\beta((r+s)s^{-1}).u_\alpha(-s).\underbrace{u_\beta(-rs^{-1}).u_\beta(-1).u_\alpha(s)} \\
&= u_\beta((r+s)s^{-1}).u_\alpha(-s).u_\beta(-(r+s)s^{-1}).u_\alpha(s) \\
&= u_{\alpha+\beta}((r+s)s^{-1}s) = u_{\alpha+\beta}(r+s).
\end{aligned}$$

□

Lemme 3. On a : $[u_\alpha, u_{\alpha+\beta}] = 1$ et $[u_\beta, u_{\alpha+\beta}] = 1$.

Démonstration : On suppose $r \neq 0$ et on pose $s = tr$.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } u_\alpha(r).u_{\alpha+\beta}(s).u_\alpha(-r) &= u_\alpha(r).[u_\alpha(-r), u_\beta(-t)].u_\alpha(-r) \\
&= \underbrace{u_\alpha(r).u_\alpha(-r).u_\beta(-t).u_\alpha(r).u_\beta(t).u_\alpha(-r)} \\
&= u_\beta(-t).u_\alpha(r).u_\beta(t).u_\alpha(-r) \\
&= [u_\beta(-t), u_\alpha(r)] \\
&= u_{\alpha+\beta}(tr) = u_{\alpha+\beta}(s)
\end{aligned}$$

□

Ainsi pour $k \neq \mathbb{F}_2$, le groupe $U(2, k)$ est bien une présentation de $SL^+(3, k)$ puisque l'on a les sous-groupes à un paramètre u_α, u_β et $u_{\alpha+\beta}$ qui vérifient toutes les formules de commutateurs.

5.2 Réduction au rang 3

Le cas $n > 2$ se réduit, comme on va le voir, au cas $n = 3$. Ce résultat a été démontré par Tits [15].

Soit R un système de racines, R^+ l'ensemble des racines positives associé à une base Π de R .

On rappelle que la hauteur d'une racine relativement à une base est la somme des coefficients de cette racine écrite comme combinaison linéaire des éléments de la base.

Lemme 4. Soit $\epsilon = \alpha + \beta$ où α, β, ϵ sont trois racines positives.

Si α', β' sont deux autres racines positives telles que $\epsilon = \alpha' + \beta'$ alors il existe un système de racines de rang 3 contenu dans R , dont une base est constituée d'éléments de R^+ contenant $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ et ϵ en tant que racines positives. Dans cette base, $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sont de hauteur 1 ou 2 et ϵ de hauteur 3.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines simples de telle sorte que $m_{\alpha_i, \alpha_j} = 2$ si $|i - j| > 1$ et $m_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 3$.

Démonstration : On peut supposer que : $\alpha = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$, $\beta = \alpha_{j+1} + \alpha_{j+2} + \dots + \alpha_k$, $\alpha' = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j'}$, $\beta' = \alpha_{j'+1} + \alpha_{j'+2} + \dots + \alpha_k$ avec $j \neq j'$.

Si $j < j'$ on pose $\gamma = \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{j'}$ et la base $\{\alpha, \gamma, \beta'\}$ répond au problème.

Sinon on pose $\gamma = \alpha_{j'+1} + \dots + \alpha_j$ et la base $\{\alpha', \gamma, \beta\}$ répond au problème.

□

On cherche, dans le groupe $U(n, k)$ engendré par les u_{α_k} pour $\alpha_k \in \Pi$, à définir un sous-groupe à un paramètre u_ϵ pour chaque $\epsilon \in R^+$, tel que toutes les formules de commutateurs soient vérifiées.

On introduit, sur l'ensemble des racines positives, la relation d'ordre suivante :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_2 + \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \alpha_4 < \dots < \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

et on renomme les racines suivant cet ordre : $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_l$ (on rappelle que $l = \frac{n(n+1)}{2}$).

On définit la fonction σ sur R^+ par : $\sigma(\epsilon_k, \epsilon_{k'}) = 1$ si $k < k'$, $\sigma(\epsilon_k, \epsilon_{k'}) = 0$ si $k = k'$, $\sigma(\epsilon_k, \epsilon_{k'}) = -1$ sinon.

Pour tout système de racines réduit R de rang $n \geq 3$ et pour tout entier $1 \leq k \leq \frac{n(n+1)}{2}$, on considère l'assertion $A_{n,k}$:

« à tout $1 \leq k' \leq k$, on peut associer un élément $u_{\epsilon_{k'}}$ de U_n^+ tel que :

- si $1 \leq k', k'' \leq k$ alors $u_{\epsilon_{k'}}$ et $u_{\epsilon_{k''}}$ vérifient la relation $(T_{m_{\epsilon_{k'}, \epsilon_{k''}}})$;
- $u_{\epsilon_k}(\sigma(\epsilon_{k'}, \epsilon_{k''})rs) = [u_{\epsilon_{k'}}(r), u_{\epsilon_{k''}}(s)]$ quels que soient k' et k'' tels que $\epsilon_k = \epsilon_{k'} + \epsilon_{k''}$. »

Enfin on note A_n la conjonction de tous les $A_{n,k}$ pour tous les k , $1 \leq k \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Lemme 5. L'assertion A_3 entraîne les assertions A_n pour tout $n \geq 3$.

Démonstration : Soit $n > 3$. On veut établir $A_{n,k}$ pour tout $k > 1$. On procède par récurrence sur k en supposant $A_{n,k}$.

• Supposons que ϵ_k ne soit pas une racine simple ; soit k' et k'' tels que $\epsilon_k = \epsilon_{k'} + \epsilon_{k''}$. Par hypothèse de récurrence $u_{\epsilon_{k'}}$ et $u_{\epsilon_{k''}}$ existent et vérifient $(T_{m_{\epsilon_{k'}, \epsilon_{k''}}})$ donc on peut évidemment définir u_{ϵ_k} par $u_{\epsilon_k}(\sigma(\epsilon_{k'}, \epsilon_{k''})rs) = [u_{\epsilon_{k'}}(r), u_{\epsilon_{k''}}(s)]$.

Il faut montrer que cette définition est indépendante du choix de $\epsilon_{k'}$ et $\epsilon_{k''}$; si $\epsilon_k = \epsilon_{h'} + \epsilon_{h''}$ est une autre décomposition de ϵ_k avec $1 \leq h', h'' \leq k$, le lemme précédent montre qu'il existe une base constituée de racines positives formant un système de rang trois et contenant $\epsilon_{k'}$, $\epsilon_{k''}$, $\epsilon_{h'}$, $\epsilon_{h''}$ et ϵ_k . Si l'on suppose l'assertion A_3 , on a, dans cette base $u_{\epsilon_{k'} + \epsilon_{k''}} = u_{\epsilon_{h'} + \epsilon_{h''}}$. Ainsi u_{ϵ_k} est bien défini et les formules de commutateurs ne faisant intervenir que des u_{ϵ_ℓ} avec $\ell \leq k$ sont vérifiées.

Si $\ell < k$, par hypothèse de récurrence u_{ϵ_ℓ} et $u_{\epsilon_{k'}}$ vérifient $(T_{m_{\epsilon_\ell, \epsilon_{k'}}})$ et u_{ϵ_ℓ} et $u_{\epsilon_{k''}}$ vérifient $(T_{m_{\epsilon_\ell, \epsilon_{k''}}})$. Or le système de racines engendré par ℓ , k' et k'' est soit du type $A_1 \times A_2$, soit du type A_3 ; dans le premier cas u_{ϵ_ℓ} commute avec $u_{\epsilon_{k'}}$ et avec $u_{\epsilon_{k''}}$ donc avec u_{ϵ_k} . Dans le second cas le lemme précédent et l'assertion A_3 permettent de conclure que u_{ϵ_k} et u_{ϵ_ℓ} vérifient (T_3) .

• Si ϵ_k est une racine simple, u_{ϵ_k} est déjà défini. Il faut cependant vérifier les relations de tresses avec les u_{ϵ_ℓ} pour $1 \leq \ell \leq k$. Cela fait partie des données si ϵ_ℓ est simple. Sinon, $\epsilon_\ell = \epsilon_{k'} + \epsilon_{k''}$ et il suffit d'appliquer l'assertion A_3 au système de racines engendré par ϵ_k , $\epsilon_{k'}$ et $\epsilon_{k''}$. \square

5.3 Le rang 3

On doit également à Tits [15] la démonstration du fait que le sous-groupe unipotent de rang 3 est somme amalgamée des unipotents de rang 2. On propose ici une démonstration qui utilise les relations de tresses.

On considère trois racines simples α, β, γ formant un système de racines A_3 : $m_{\alpha, \beta} = m_{\beta, \gamma} = 3$ et $m_{\alpha, \gamma} = 2$ et l'on impose donc la relation d'ordre suivante : $\alpha < \beta < \alpha + \beta < \gamma < \beta + \gamma < \alpha + \beta + \gamma$, la fonction σ étant définie comme au paragraphe précédent.

On travaille ainsi dans $U(3, k)$ où l'on dispose des éléments $u_\alpha(r), u_\beta(r), u_\gamma(r)$ mais aussi, d'après ce qui a été dit pour le rang 2, de $u_{\alpha+\beta}(r)$ et $u_{\beta+\gamma}(r)$, correctement définis comme commutateurs de racines plus petites pour cette relation d'ordre.

Lemme 6. Si $k \neq \mathbb{F}_2$, $u_{\alpha+\beta}$ et $u_{\beta+\gamma}$ commutent.

Démonstration : Soit $r', r'', s', s'' \in k^*$ et tels que $r' + r'' \neq 0$. De tels éléments existent si $k \neq \mathbb{F}_2$. On pose d'abord $u_{\alpha+\beta}(r) = [u_\alpha(rr'^{-1}), u_\beta(r')]$ et $u_{\beta+\gamma}(s) = [u_\beta(s'), u_\gamma(ss'^{-1})]$ puis $u_{\alpha+\beta}(r) = [u_\alpha(rr''^{-1}), u_\beta(r'')]$ et $u_{\beta+\gamma}(s) = [u_\beta(s''), u_\gamma(ss''^{-1})]$.

D'où : $[u_{\alpha+\beta}(r), u_{\beta+\gamma}(s)] = u_\alpha(rr'^{-1}).u_\beta(r').u_\alpha(-rr'^{-1}).u_\beta(-r').u_\beta(s').u_\gamma(ss'^{-1}).u_\beta(-s').u_\gamma(-ss'^{-1}).u_\alpha(-rr''^{-1}).u_\beta(r'').u_\alpha(rr''^{-1}).u_\beta(-r'').u_\beta(s'').u_\gamma(-ss''^{-1}).u_\beta(-s'').u_\gamma(ss''^{-1})$

On choisit alors $s' = r'$ et $s'' = r''$. On obtient :

$$\begin{aligned} & [u_{\alpha+\beta}(r), u_{\beta+\gamma}(s)] \\ &= u_\alpha(rr'^{-1}).u_\beta(r').u_\alpha(-rr'^{-1}).\underbrace{u_\beta(-r').u_\beta(r')}.u_\gamma(sr'^{-1}).u_\beta(-r').u_\gamma(-sr'^{-1}). \\ & \quad u_\alpha(-rr''^{-1}).u_\beta(r'').u_\alpha(rr''^{-1}).\underbrace{u_\beta(-r'').u_\beta(r'')}.u_\gamma(-sr''^{-1}).u_\beta(-r'').u_\gamma(sr''^{-1}) \\ &= u_\alpha(rr'^{-1}).u_\beta(r').\underbrace{u_\alpha(-rr'^{-1}).u_\gamma(sr'^{-1})}.u_\beta(-r')\underbrace{u_\gamma(-sr'^{-1}).u_\alpha(-rr''^{-1})}.u_\beta(r'') \\ & \quad \underbrace{.u_\alpha(rr''^{-1}).u_\gamma(-sr''^{-1}).u_\beta(-r'').u_\gamma(sr''^{-1})} \\ &= u_\alpha(rr'^{-1}).u_\beta(r').u_\gamma(sr'^{-1}).\underbrace{u_\alpha(-rr'^{-1}).u_\beta(-r').u_\alpha(-rr''^{-1})} \\ & \quad \underbrace{.u_\gamma(-sr'^{-1}).u_\beta(r'').u_\gamma(-sr''^{-1})}.u_\alpha(rr''^{-1}).u_\beta(-r'').u_\gamma(sr''^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{u}_\alpha(rr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(r') \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'^2(r'+r'')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-r(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\beta(-r'r''(r'+r'')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(r'r''(r'+r'')^{-1})}_{\mathbf{u}_\beta(r'^2(r'+r'')^{-1})} \cdot \mathbf{u}_\alpha(rr''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'') \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr''^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_\alpha(rr'^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\beta(r') \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'^2(r'+r'')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-r(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1})}_{\mathbf{u}_\beta(-s(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1})} \cdot \mathbf{u}_\alpha(rr''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'') \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr''^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_\alpha(rr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-sr''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'r''(r'+r'')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(r''^2(r'+r'')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(rr''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'') \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr''^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_\alpha(rr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-sr''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'r''(r'+r'')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\alpha(-r(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1})}_{\mathbf{u}_\alpha(r(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1})} \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'') \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr''^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_\alpha(rr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-sr''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'r''(r'+r'')^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\gamma(s(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1})}_{\mathbf{u}_\alpha(-r(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1})} \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'') \cdot \mathbf{u}_\alpha(-rr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr''^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_\alpha(rr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-sr''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'r''(r'+r'')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r'r''(r'+r'')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-rr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr''^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_\alpha(rr'^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\gamma(-sr''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-rr'^{-1})}_{\mathbf{u}_\gamma(-s(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1})} \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr''^{-1}) \\
&= \underbrace{\mathbf{u}_\alpha(rr'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-rr'^{-1})}_{\mathbf{u}_\alpha(-s(r'+r'')r'^{-1}r''^{-1})} \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\gamma(-sr''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(sr''^{-1})}_{\mathbf{u}_\gamma(sr''^{-1})} = 1.
\end{aligned}$$

□

Lemme 7. \mathbf{u}_α et $\mathbf{u}_{\beta+\gamma}$ vérifient (T_3) .

Démonstration : Soit $(r, s, t, r', s', t') \in M_3$. Le cas où l'un des six paramètres est nul est trivial.

On suppose donc que ces six paramètres sont non nuls, ce qui entraîne $r + t = s' \neq 0$.

(Une accolade au dessus d'un groupe d'éléments indique l'introduction de ces éléments; on souligne la présence d'un commutateur que l'on écrit différemment.)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(s) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t) \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-r') \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(1) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-1) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t)}_{\mathbf{u}_\gamma(s)} \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\beta(rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(1) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-1) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s)}_{\mathbf{u}_\beta(rs'^{-1})} \cdot \mathbf{u}_\beta(rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(1) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-1) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t) \cdot \mathbf{u}_\beta(rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(1) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-r)}_{\mathbf{u}_\beta(-ts'^{-1})} \cdot \mathbf{u}_\beta(-ts'^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\alpha(s') \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s)}_{\mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1})} \cdot \mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(1) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-r) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-ts'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \mathbf{u}_\alpha(s') \cdot \mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(1) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-r) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\beta(-1) \cdot \mathbf{u}_\beta(1)}_{\mathbf{u}_\gamma(s)} \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-ts'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\beta(ts'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-ts'^{-1})}_{\mathbf{u}_\alpha(s') \cdot \mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1})} \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(1) \cdot \mathbf{u}_{\gamma+\beta}(sts'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta(-ts'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(s') \cdot \mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_{\gamma+\beta}(t') \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\beta(1) \cdot \mathbf{u}_\beta(-ts'^{-1})}_{\mathbf{u}_\alpha(s')} \cdot \mathbf{u}_\alpha(s') \cdot \mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_{\gamma+\beta}(t') \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(s') \cdot \mathbf{u}_\beta(-rs'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-s') \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') \\
&= \mathbf{u}_{\gamma+\beta}(t') \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(-r) \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-t') = 1.
\end{aligned}$$

□

On peut donc définir $\mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(rs) = [\mathbf{u}_\alpha(r), \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(s)]$, et de la même façon : $\mathbf{u}_{(\alpha+\beta)+\gamma}(rs) = [\mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r), \mathbf{u}_\gamma(s)]$.

Lemme 8. $\mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}$ et \mathbf{u}_β commutent.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Démonstration} : [\mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(r), \mathbf{u}_\beta(s)] &= \mathbf{u}_\beta(s) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(-s) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(-r) \\
&= \mathbf{u}_\beta(s) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(-s) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(-r) \\
&= \mathbf{u}_\beta(s) \cdot [\mathbf{u}_\alpha(1), \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(r)] \cdot \mathbf{u}_\beta(-s) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(r) \\
&= [\mathbf{u}_\beta(s) \cdot \mathbf{u}_\alpha(1) \cdot \mathbf{u}_\beta(-s), \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(r)] \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(r) \\
&= [\mathbf{u}_\alpha(1) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(-r), \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(r)] \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(-r) \\
&= [\mathbf{u}_\alpha(1), \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(r)] \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(-r) \quad \text{car } \mathbf{u}_{\alpha+\beta} \text{ commute avec } \mathbf{u}_{\beta+\gamma} \text{ et } \mathbf{u}_\alpha \\
&= \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(r) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(-r) = 1.
\end{aligned}$$

□

Lemme 9. $\mathbf{u}_{(\alpha+\beta)+\gamma} = \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Démonstration} : \mathbf{u}_{(\alpha+\beta)+\gamma}(rs) &= [\mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r), \mathbf{u}_\gamma(s)] \\
&= \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-1) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\alpha(1) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s)}_{\mathbf{u}_\alpha(-1) \cdot \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(1)} \cdot \mathbf{u}_\alpha(-1) \cdot \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(1) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-1) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\alpha(1) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-1)}_{\mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(1)} \cdot \overbrace{\mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s)}^{\mathbf{u}_\beta(-r) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s)} \cdot \overbrace{\mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r)}^{\mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r)} \\
&= \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-1) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(1) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s)}_{\mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(1)} \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) \\
&= \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-1) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\beta(-r) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s)}_{\mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(1)} \cdot \mathbf{u}_\alpha(1) \cdot \mathbf{u}_\gamma(s) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) \cdot \mathbf{u}_\gamma(-s) \cdot \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) \\
&= \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-1) \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(-rs) \cdot \mathbf{u}_\alpha(1) \cdot \mathbf{u}_{\beta+\gamma}(rs) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) \\
&= \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(rs) \cdot \mathbf{u}_\beta(-r) = \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}(rs).
\end{aligned}$$

□

On pose donc $\mathbf{u}_{\alpha+\beta+\gamma} = \mathbf{u}_{(\alpha+\beta)+\gamma} = \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}$.

Lemme 10. $\mathbf{u}_{\alpha+\beta+\gamma}$ commute avec \mathbf{u}_α , \mathbf{u}_β , $\mathbf{u}_{\alpha+\beta}$ et $\mathbf{u}_{\beta+\gamma}$.

Démonstration : $\mathbf{u}_{\alpha+\beta+\gamma} = \mathbf{u}_{(\alpha+\beta)+\gamma}$ commute avec $\mathbf{u}_{\alpha+\beta}$ et \mathbf{u}_γ mais aussi avec \mathbf{u}_β d'après le lemme 8. Et $\mathbf{u}_{\alpha+\beta+\gamma} = \mathbf{u}_{\alpha+(\beta+\gamma)}$ commute avec $\mathbf{u}_{\beta+\gamma}$. □

On a ainsi défini dans $\mathbf{U}(3, k)$, des éléments $\mathbf{u}_\epsilon(t)$ pour toute racine positive ϵ , sous-groupes à un paramètre vérifiant toutes les formules de commutation. D'après la remarque 2, pour $k \neq \mathbb{F}_2$, $\mathbf{U}(3, k)$ est une présentation de $\mathbf{SL}^+(4, k)$. Le lemme 5 et les résultats du paragraphe précédent entraînent le résultat suivant.

Théorème 1. Pour $n \geq 2$ et $k \neq \mathbb{F}_2$, $\mathbf{U}(n, k)$ est une présentation de $\mathbf{SL}^+(n+1, k)$.

6 Présentation de $\mathbf{SL}(2, k)$

Comme on l'a fait au paragraphe précédent, on va d'abord énoncer une condition équivalente à la relation de tresses (T_1) .

Dans un premier temps, on travaille donc dans le monoïde libre sur $\mathbf{u}_\alpha(t)$ et $\mathbf{u}_{-\alpha}(t)$, $t \in k$.

Proposition 5. Si \mathbf{u}_α et $\mathbf{u}_{-\alpha}$ vérifient (T_0) et (T_1) alors ce sont des sous-groupes à un paramètre : $\mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t) = \mathbf{u}_\alpha(r+t)$ et $\mathbf{u}_{-\alpha}(r) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(t) = \mathbf{u}_{-\alpha}(r+t)$.

Démonstration : La démonstration est quasiment identique à celle de la proposition 2.

Puisque \mathbf{u}_α et $\mathbf{u}_{-\alpha}$ vérifient (T_1) :

$$\mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(s) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t) = \mathbf{u}_{-\alpha}(t') \cdot \mathbf{u}_\alpha(s') \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(r') \quad (**) \quad \iff \begin{cases} s' = r + t + rst \\ s'r' = rs \\ t's' = st \\ r' + t' + r's't' = s \end{cases}$$

On pose $s = 0$; alors $s' = r + t$ et ou bien $r' = t' = 0$ ou bien $s' = 0$.

Si $r' = t' = 0$ et la relation $(**)$ devient $\mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(0) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t) = \mathbf{u}_{-\alpha}(0) \cdot \mathbf{u}_\alpha(r+t) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(0)$ ce qui compte tenu de (T_0) : $\mathbf{u}_\alpha(0) = \mathbf{u}_{-\alpha}(0) = 1$ donne bien $\mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t) = \mathbf{u}_\alpha(r+t)$.

Si $s' = 0$ alors $r + t = 0$ donc la relation $(**)$ devient $\mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-r) = \mathbf{u}_{-\alpha}(-r') \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(r')$ ce qui n'est possible que si $\mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-r) = 1$ et $\mathbf{u}_{-\alpha}(-r') \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(r') = 1$. □

Le résultat suivant est évident.

Lemme 11. Si $r, s, t, u \in k$ vérifient $r + t + rst = 0$ alors $(1 + rs)(1 + st) = 1$.

Si, de plus, $s + u + stu = 0$ alors $rs = tu$.

Proposition 6. Si \mathbf{u}_α et $\mathbf{u}_{-\alpha}$ vérifient (T_0) et (T_1) alors l'élément $\mathbf{u}_\alpha(r) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(s) \cdot \mathbf{u}_\alpha(t) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(u)$ où r, s, t, u vérifient $r + t + rst = 0$ et $s + u + stu = 0$ ne dépend que du produit st , ou du produit rs ou du produit tu .

Remarque 3 : Si $r + t + rst = 0$ et $s + u + stu = 0$ alors $st \neq -1$, $rs \neq -1$ et $tu \neq -1$.

Démonstration : Soit $(s, t), (s', t') \in k^2$ tels que $s't' = st \neq -1$ et t, u, t' et u' des éléments de k tels que $r + t + rst = 0$, $s + u + stu = 0$, $r' + t' + r's't' = 0$ et $s' + u' + s't'u' = 0$.

Alors $r = -t(1 + st)^{-1}$ et $u = -s(1 + st)^{-1}$; de même avec r' et u' . D'où $r - r' = (t' - t)(1 + st)^{-1}$ et $u' - u = (s - s')(1 + st)^{-1}$.

D'après la proposition précédente, $u_\alpha(r) \cdot u_{-\alpha}(s) \cdot u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(u) = u_\alpha(r') \cdot u_{-\alpha}(s') \cdot u_\alpha(t') \cdot u_{-\alpha}(u')$ est équivalent à $u_\alpha(r - r') \cdot u_{-\alpha}(s) \cdot u_\alpha(t) = u_{-\alpha}(s') \cdot u_\alpha(t') \cdot u_{-\alpha}(u' - u)$.

Or $(s, t, s', t') \in P_2$ et la proposition 1(ii) permet de conclure que $(r - r', s, t, u' - u, s', t') \in M_1$.

D'après le lemme précédent $(1 + rs) = (1 + tu) = (1 + st)^{-1}$, donc $u_\alpha(r) \cdot u_{-\alpha}(s) \cdot u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(u)$ ne dépend que du produit rs , ou tu . \square

Cette démonstration permet même d'obtenir le résultat suivant, semblable à la proposition 4.

Proposition 7. Dans le monoïde libre sur $u_\alpha(t)$ et $u_{-\alpha}(t)$, $t \in k$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u_α et $u_{-\alpha}$ vérifient (T_0) et (T_1) ;
- (ii) $u_\alpha(r), u_\beta(s)$ sont des sous-groupes à un paramètre (i.e. vérifient (A)) et $u_\alpha(r) \cdot u_{-\alpha}(s) \cdot u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(u)$ où r, s, t, u vérifient $r + t + rst = 0$ et $s + u + stu = 0$ ne dépend que du produit rs .

Dans la suite du paragraphe, on travaille dans $G(1, k)$; on suppose donc que $u_\alpha(t)$ et $u_{-\alpha}(t)$ vérifient (T_0) et (T_1) . D'après la proposition 5, $G(1, k)$ est un groupe, et d'après le résultat précédent, on peut définir, pour $r + t + rst = 0$ et $s + u + stu = 0$:

$$h_\alpha(1 + rs) = u_\alpha(r) \cdot u_{-\alpha}(s) \cdot u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(u).$$

Cela revient, pour $rs \neq -1$ à : $h_\alpha(1 + rs) = u_\alpha(r) \cdot u_{-\alpha}(s) \cdot u_\alpha(-r(1 + rs)^{-1}) \cdot u_{-\alpha}(-s(1 + rs)^{-1})$.

Si les images de $u_\alpha(t)$ et $u_{-\alpha}(t)$ par ϕ dans $SL(2, k)$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, celle de $h_\alpha(t)$ est bien sûr $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$.

En particulier, si $rs = 0$ on obtient $h_\alpha(1) = 1$ et, d'après le lemme précédent, si $r + s + rst = 0$, $h_\alpha(1 + rs) = h_\alpha((1 + st)^{-1})$.

On pose, pour $t \in k^*$, $n_\alpha(t) = u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot u_\alpha(t)$, élément dont l'image par ϕ dans $SL(2, k)$ est $\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Lemme 12. $n_\alpha(t) \cdot u_\alpha(r) \cdot n_\alpha(-t) = u_{-\alpha}(-rt^{-2})$ et $n_\alpha(t) = n_{-\alpha}(-t^{-1})$.

$h_\alpha(-st^{-1}) = n_\alpha(s) \cdot n_\alpha(t)^{-1} = n_\alpha(-t)$; en particulier $n_\alpha(1) \cdot n_\alpha(-1) = 1$.

$h_\alpha(r) \cdot h_\alpha(s) = h_\alpha(rs)$; en particulier $h_\alpha(t)^{-1} = h_\alpha(t^{-1})$.

Démonstration : $n_\alpha(t) \cdot u_\alpha(r) \cdot n_\alpha(-t) = u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot u_\alpha(t) \cdot u_\alpha(r) \cdot u_\alpha(-t) \cdot u_{-\alpha}(t^{-1}) \cdot u_\alpha(-t)$

$$= u_\alpha(t) \cdot \underbrace{u_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot u_\alpha(r) \cdot u_{-\alpha}(t^{-1})}_{u_{-\alpha}(-rt^{-2})} \cdot u_\alpha(-t) = \underbrace{u_\alpha(t) \cdot u_\alpha(-t)}_{u_\alpha(t) \cdot u_\alpha(-t)} \cdot u_{-\alpha}(-rt^{-2}) \cdot \underbrace{u_\alpha(t) \cdot u_\alpha(-t)}_{u_\alpha(t) \cdot u_\alpha(-t)} = u_{-\alpha}(-rt^{-2}).$$

$$n_\alpha(t) = \underbrace{u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot u_\alpha(t)}_{u_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1})} = n_{-\alpha}(-t^{-1}).$$

Si $s + t \neq 0$, $n_\alpha(s) \cdot n_\alpha(t) = n_\alpha(s) \cdot n_{-\alpha}(-t^{-1})$

$$= u_\alpha(s) \cdot \underbrace{u_{-\alpha}(-s^{-1}) \cdot u_\alpha(s) \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1})}_{u_{-\alpha}(-s^{-1}) \cdot u_\alpha(s) \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1})} \cdot u_\alpha(t) \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1})$$

$$= \underbrace{u_\alpha(s) \cdot u_\alpha(s^2 t^{-1})}_{u_\alpha(st^{-1}(s+t))} \cdot u_{-\alpha}(-s^{-1}) \cdot \underbrace{u_\alpha(s) \cdot u_\alpha(t)}_{u_\alpha(s+t)} \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1})$$

$$= u_\alpha(st^{-1}(s+t)) \cdot u_{-\alpha}(-s^{-1}) \cdot u_\alpha(s+t) \cdot u_{-\alpha}(-t^{-1})$$

$$= h_\alpha((1 - s^{-1}(s+t))^{-1}) = h_\alpha(-(s^{-1}t)^{-1}) = h_\alpha(-st^{-1}).$$

Si $s \neq 0$, $n_\alpha(s) \cdot n_\alpha(-s) = n_\alpha(s) \cdot n_{-\alpha}(s^{-1})$

$$= u_\alpha(s) \cdot \underbrace{u_{-\alpha}(-s^{-1}) \cdot u_\alpha(s) \cdot u_{-\alpha}(s^{-1})}_{u_{-\alpha}(-s^{-1}) \cdot u_\alpha(s) \cdot u_{-\alpha}(s^{-1})} \cdot u_\alpha(-s) \cdot u_{-\alpha}(s^{-1}) = \underbrace{u_\alpha(s) \cdot u_\alpha(-s)}_{u_\alpha(s) \cdot u_\alpha(-s)} \cdot u_{-\alpha}(-s^{-1}) \cdot \underbrace{u_\alpha(s) \cdot u_\alpha(-s)}_{u_\alpha(s) \cdot u_\alpha(-s)} \cdot u_{-\alpha}(s^{-1})$$

$$= u_{-\alpha}(-s^{-1}) \cdot u_{-\alpha}(s^{-1}) = 1.$$

D'où $n_\alpha(1) \cdot n_\alpha(-1) = 1$.

Enfin $h_\alpha(r) \cdot h_\alpha(s) = n_\alpha(r) \cdot \underbrace{n_\alpha(-1) \cdot n_\alpha(1)}_{n_\alpha(-s^{-1})} \cdot n_\alpha(-s^{-1}) = n_\alpha(r) \cdot n_\alpha(-s^{-1}) = h_\alpha(rs)$.

$h_\alpha(t)^{-1} = h_\alpha(t^{-1})$ est alors évident puisque $h_\alpha(1) = 1$. \square

Remarque 4 : Si $k = \mathbb{F}_2$, l'élément h_α n'est pas défini, mais le groupe $G(1, k)$ est d'ordre 6, et bien isomorphe à $SL(2, \mathbb{F}_2)$.

On peut alors, puisque l'on a les relations (A), (B') et (C) de la présentation de Steinberg dans le cas $n = 1$, énoncer le résultat suivant.

Théorème 2. Pour tout corps commutatif k , $G(1, k)$ est une présentation de $SL(2, k)$.

7 Le groupe $G(1, \mathbb{Z})$

Comme nous l'avons déjà remarqué, les relations de tresses gardent un sens sur un anneau commutatif quelconque Λ . Or le groupe de Steinberg $St(2, \Lambda)$ est défini par les générateurs $e_\alpha(t)$ et $e_{-\alpha}(t)$, $t \in \Lambda$ et les relations [10] :

$$e_{\pm\alpha}(t).e_{\pm\alpha}(t') = e_{\pm\alpha}(t+t') \quad \text{et} \quad w_\alpha(r).e_{-\alpha}(t).w_\alpha(-r) = e_\alpha(-r^2t)$$

où $t, t' \in \Lambda$ et r est un élément inversible de Λ , w_α étant défini par : $w_\alpha(r) = e_\alpha(r).e_{-\alpha}(-r^{-1}).e_\alpha(r)$.

De plus, pour $\Lambda = \mathbb{Z}$, le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ est présenté par les générateurs e_α et $e_{-\alpha}$, et les relations :

$$e_\alpha.e_{-\alpha}^{-1}.e_\alpha = e_{-\alpha}^{-1}.e_\alpha.e_{-\alpha}^{-1} \quad \text{et} \quad (e_\alpha.e_{-\alpha}^{-1}.e_\alpha)^4 = 1.$$

Théorème 3. (i) $St(2, \mathbb{Z})$ est présenté par les générateurs $u_\alpha(t)$ et $u_{-\alpha}(t)$ et les relations :

$$(T_0) : u_\alpha(0) = u_{-\alpha}(0) = 1$$

$$(T_1(-1)) : u_\alpha(r).u_{-\alpha}(s).u_\alpha(t) = u_{-\alpha}(t').u_\alpha(s').u_{-\alpha}(r') \iff \begin{cases} s' = r + t + rst \\ s'r' = rs \\ t's' = st \\ r' + t' + t's'r' = s \end{cases} = 0 \text{ ou } -1$$

(ii) $G(1, \mathbb{Z})$ est une présentation de $SL(2, \mathbb{Z})$.

Démonstration : (i) Dans $St(2, \mathbb{Z})$, la relation $w_\alpha(r).e_{-\alpha}(t).w_\alpha(-r) = e_{\pm\alpha}(-r^2t)$ est équivalente à :

$$e_\alpha(r).e_{-\alpha}(-r^{-1}).e_\alpha(r).e_{-\alpha}(t).e_\alpha(-r).e_{-\alpha}(r^{-1}).e_\alpha(-r) = e_\alpha(-r^2t)$$

ou encore : $e_{-\alpha}(-r^{-1}).e_\alpha(r).e_{-\alpha}(t).e_\alpha(-r).e_{-\alpha}(r^{-1}) = e_\alpha(-r).e_\alpha(-r^2t).e_\alpha(r)$
soit : $e_{-\alpha}(-r^{-1}).e_\alpha(r).e_{-\alpha}(t).e_\alpha(-r).e_{-\alpha}(r^{-1}) = e_\alpha(-r^2t)$
ou : $e_{-\alpha}(-r^{-1}).e_\alpha(r).e_{-\alpha}(t) = e_\alpha(-r^2t).e_{-\alpha}(-r^{-1}).e_\alpha(r)$

Sur \mathbb{Z} , $r = \pm 1$ et la relation précédente s'écrit :

$$e_{-\alpha}(-1).e_\alpha(1).e_{-\alpha}(t) = e_\alpha(-t).e_{-\alpha}(-1).e_\alpha(1) \text{ ou } e_{-\alpha}(1).e_\alpha(-1).e_{-\alpha}(t) = e_\alpha(-t).e_{-\alpha}(1).e_\alpha(-1)$$

ce qui correspond aux deux relations de présentation du groupe défini dans (i) lorsque $rs = -1$.

Quant à la relation $e_{\pm\alpha}(t).e_{\pm\alpha}(t') = e_{\pm\alpha}(t+t')$ elle correspond aux cas où $s = 0$ ou $s' = 0$.

On a donc un homomorphisme surjectif $e_{\pm\alpha}(t) \rightarrow u_{\pm\alpha}(t)$ de $St(2, \mathbb{Z})$ dans le groupe présenté dans (i).

La réciproque est évidente puisque l'on a un homomorphisme surjectif de $St(2, \mathbb{Z})$ dans $SL(2, \mathbb{Z})$.

(ii) Les deux relations de la présentation de $SL(2, \mathbb{Z})$ s'obtiennent aisément dans $G(1, \mathbb{Z})$ à l'aide de relations de tresses et les relations sont vraies dans $SL(2, \mathbb{Z})$. \square

Sur \mathbb{Z} , on peut donc écrire la condition $T_1(-1)$ dans le cas $rs = s'r' = -1$ sous la forme :

$$u_\alpha(1).u_{-\alpha}(-1).u_\alpha(t) = u_{-\alpha}(-t).u_\alpha(1).u_{-\alpha}(-1)$$

pour tout $t \in \mathbb{Z}$; en posant $a = u_\alpha(1)$ et $b = u_{-\alpha}(-1)$, on reconnaît là une présentation du groupe des tresses à trois brins, la relation $aba^t = b^t ab$ étant équivalente à la forme classique $aba = bab$.

Le lien entre $St(2, \mathbb{Z})$ et ce groupe des tresses est connu [10], mais l'on voit que l'on peut obtenir $St(2, \mathbb{Z})$ comme extension de $SL(2, \mathbb{Z})$ en imposant une nouvelle condition aux paramètres de la présentation de $SL(2, \mathbb{Z})$, condition qui consiste à « restreindre les mouvements dans la variété M_1 ».

8 Présentation du groupe monomial

Dans $SL(n+1, k)$, le sous-groupe N des matrices monomiales est engendré par les éléments n_{α_i} pour $i = 1, \dots, n$; le groupe diagonal H est un sous-groupe distingué de N et le quotient N/H est isomorphe au groupe de Weyl W .

Comme on l'a fait précédemment, on va d'abord énoncer une condition équivalente à la relation de tresses (N_3). On travaille donc pour l'instant dans le monoïde libre sur $n_{\alpha}(t)$ et $n_{\beta}(t)$, $t \in k^*$.

Si $n_{\alpha}(t)$ vérifie (N_0) et (N_1) on a immédiatement $n_{\alpha}(t)^{-1} = n_{\alpha}(-t)$.

Si $n_{\alpha}(t)$ et $n_{\beta}(t)$ vérifient (N_3), l'élément $n_{\alpha}(r).n_{\beta}(s).n_{\alpha}(-r)$ ne dépend que du produit rs . Et, toujours d'après (N_3), il est identique à $n_{\beta}(-r').n_{\alpha}(s').n_{\beta}(r')$ si $r's' = rs$.

Réciproquement, on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 8. Si n_{α} et n_{β} vérifient (N_0) et (N_1) alors il y a équivalence entre les assertions :

- (i) $n_{\alpha}(r).n_{\beta}(s).n_{\alpha}(-r) = n_{\beta}(-r').n_{\alpha}(s').n_{\beta}(r') \iff (r, s, r', s') \in P_2^*$;
- (ii) n_{α} et n_{β} vérifient (N_3).

Démonstration : Soit $(r, s, t, r', s', t') \in P_3$.

$$\begin{aligned} \text{Alors : } & \underbrace{n_{\alpha}(r).n_{\beta}(s).n_{\alpha}(t)} = n_{\beta}(t').n_{\alpha}(-rst'^{-1}).n_{\beta}(-t').\underbrace{n_{\alpha}(r).n_{\alpha}(t)} \\ & = n_{\beta}(t').\underbrace{n_{\alpha}(-rst'^{-1}).n_{\beta}(-t').n_{\alpha}(rst'^{-1})}.n_{\alpha}(s') = n_{\beta}(t').n_{\beta}(r').\underbrace{n_{\alpha}(-s').n_{\beta}(-r').n_{\alpha}(s')} \\ & = n_{\beta}(t').\underbrace{n_{\beta}(r').n_{\beta}(-r')}.n_{\alpha}(s').n_{\beta}(r') = n_{\beta}(t').n_{\alpha}(s').n_{\beta}(r'). \end{aligned}$$

□

Plaçons-nous maintenant dans $N(2, k)$: $m_{\alpha, \beta} = 3$ et n_{α} et n_{β} vérifient (N_0), (N_1) et (N_3).

Le résultat ci-dessus permet de noter $n_{\alpha+\beta}(\sigma(\alpha, \beta)rs)$ l'élément $n_{\alpha}(r).n_{\beta}(s).n_{\alpha}(-r)$ où σ est défini comme au paragraphe 5.1. On voit immédiatement que $n_{\alpha+\beta}$ vérifie (N_0) et (N_1).

Posons $h_{\alpha}(t) = n_{\alpha}(t).n_{\alpha}(-1)$ et $h_{\beta}(t) = n_{\beta}(t).n_{\beta}(-1)$ pour $t \in k^*$.

La relation (N_1) est équivalente à $h_{\alpha}(-rs^{-1}) = n_{\alpha}(r).n_{\alpha}(s), \forall r, s \in k^*$ et (N_0) à $h_{\alpha}(1) = 1$.

Lemme 13. $h_{\alpha}(r).h_{\alpha}(s) = h_{\alpha}(rs)$ et $h_{\alpha}(r).h_{\beta}(s) = h_{\beta}(s).h_{\alpha}(r)$.

Démonstration : La première relation découle immédiatement de (N_0) et (N_1).

Pour la seconde, (N_3) et (N_0) permettent d'écrire : $n_{\alpha}(-1).n_{\beta}(s) = n_{\beta}(-1).n_{\alpha}(s).n_{\beta}(-1).n_{\alpha}(1)$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } & h_{\alpha}(r).h_{\beta}(s) = n_{\alpha}(r).\underbrace{n_{\alpha}(-1).n_{\beta}(s).n_{\beta}(-1)} = n_{\alpha}(r).\underbrace{n_{\beta}(-1).n_{\alpha}(s).n_{\beta}(-1).n_{\alpha}(1)} \\ & = n_{\beta}(s).\underbrace{n_{\alpha}(-1).n_{\beta}(r).n_{\alpha}(-1).n_{\beta}(1)}.n_{\alpha}(-1) = n_{\beta}(s).n_{\beta}(-1).n_{\alpha}(r).n_{\alpha}(-1) = h_{\beta}(s).h_{\alpha}(r). \end{aligned}$$

□

Au rang n , soit $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ les racines simples telles que $m_{\alpha_i, \alpha_j} = 2$ si $|i - j| > 1$ et $m_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 3$. $N(n, k)$ est donc le groupe engendré par des éléments $n_{\alpha_i}(t)$, $\alpha_i \in \Pi$, $t \in k^*$ soumis aux relations : $n_{\alpha_i}(t)$ vérifient (N_0) et, pour $1 \leq i, j \leq n$, n_{α_i} et n_{α_j} vérifient ($N_{m_{\alpha_i, \alpha_j}}$) (y compris (N_1) lorsque $\alpha_i = \alpha_j$).

Pour $1 \leq i \leq n$ et $t \in k^*$, on pose $h_{\alpha_i}(t) = n_{\alpha_i}(t).n_{\alpha_i}(-1)$ et on note H le sous-groupe de $N(n, k)$ engendré par les éléments h_{α_i} pour toute racine $\alpha_i \in \Pi$.

Les relations définissant $N(n, k)$ étant identiques à celles définissant W (les paramètres en moins) l'application $\psi : N(n, k) \rightarrow W$ qui associe à $n_{\alpha_i}(t)$ la réflexion w_{α_i} est un homomorphisme dont le noyau contient H .

Pour $n = 3$, notons $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_2$ et $\gamma = \alpha_3$; la démonstration du lemme suivant est évidente.

Lemme 14. (i) si $m_{\alpha, \beta} = m_{\beta, \gamma} = 3$ et $m_{\alpha, \gamma} = 2$ alors $n_{\alpha+\beta}$ et n_{γ} vérifient (N_2);

on note $n_{(\alpha+\beta)+\gamma}(rs) = n_{\alpha+\beta}(r).n_{\gamma}(s).n_{\alpha+\beta}(-r)$;

(ii) $n_{(\alpha+\beta)+\gamma} = n_{\alpha+(\beta+\gamma)}$ élément que l'on note $n_{\alpha+\beta+\gamma}$;

(iii) $n_{\alpha+\beta+\gamma}$ et n_{β} commutent.

On définit ainsi n_{ϵ} pour toute racine positive ϵ . De plus, d'après ce qui a été dit pour le rang 2, n_{ϵ} vérifie (N_0) et (N_1), on peut donc aussi définir $h_{\epsilon}(t) = n_{\epsilon}(t).n_{\epsilon}(-1)$ pour toute racine positive ϵ et c'est un sous-groupe à un paramètre multiplicatif.

Proposition 9. Tous les h_ϵ appartiennent à H .

De façon plus précise, si $\epsilon = \alpha + \beta \in R$ avec $m_{\alpha,\beta} = 3$, $h_\epsilon(r) = h_\alpha(r).h_\beta(r)$.

H est un sous-groupe commutatif, distingué dans $N(n, k)$.

Tout élément h de H s'écrit de manière unique : $h = \prod_{1 \leq i \leq n} h_{\alpha_i}(t_i)$.

$$\begin{aligned} \text{Démonstration : } h_\epsilon(r) &= h_{\alpha+\beta}(r) = n_{\alpha+\beta}(r).n_{\alpha+\beta}(-1) \\ &= n_\alpha(1). \underbrace{n_\beta(r).n_\alpha(-1).n_\beta(1).n_\alpha(-1).n_\beta(-1)}_{= n_\alpha(1).n_\alpha(-r^{-1}).n_\beta(r).n_\alpha(1).n_\alpha(-1).n_\beta(-1)} \\ &= n_\alpha(1).n_\alpha(-r^{-1}).n_\beta(r).n_\beta(-1) = h_\alpha(r).h_\beta(r). \end{aligned}$$

Que le groupe H soit commutatif provient du fait que les h_α sont des sous-groupes à un paramètre et de la commutativité du corps k^* .

$n_\alpha(s).n_{\alpha+\beta}(r).n_\alpha(-s) = n_\beta(-r)$ entraîne $n_\alpha(s).h_{\alpha+\beta}(r).n_\alpha(-s) = h_\beta(r)$; donc $H \triangleleft N(n, k)$.

L'existence de l'écriture d'un élément de H provient immédiatement de ce qui précède; l'unicité du fait que h_{α_i} ne s'écrit pas comme produit des h_{α_j} , $j \neq i$. \square

Proposition 10. $N(n, k)/H$ est isomorphe à W .

Démonstration : H étant distingué dans N , on a $n_\alpha(1).H.n_\alpha(1).H = n_\alpha(1)^2.H = H$.

L'application de W dans $N(n, k)/H$ qui à w_α associe $n_\alpha(1)H$ est donc un homomorphisme de groupes, inverse de l'homomorphisme ψ . \square

La dernière partie de la proposition 9 montre que H est isomorphe à H ; d'où la résultat suivant.

Théorème 4. $N(n, k)$ est est une présentation de N .

Remarque 5 : Le produit semi-direct de W et H admet une présentation où la relation (N_0) est remplacée par $n_\alpha(1).n_\alpha(1) = 1$. Les matrices $\tilde{n}_\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tilde{n}_\beta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ qui engendrent ce produit semi-direct vérifient également (N_3) .

9 Le groupe $G(2, k)$

9.1 Relations dans $G(2, k)$

On suppose dans ce paragraphe que $k \neq \mathbb{F}_2$ et l'on travaille dans $G(2, k)$; on dispose des sous-groupes à un paramètre additifs $u_{\pm\alpha}$, $u_{\pm\beta}$, et, d'après ce qui précède, des sous-groupes additifs $u_{\alpha+\beta}$ et $u_{-\alpha-\beta}$ et multiplicatifs h_α , h_β , ainsi que des représentants n_α , n_β des générateurs du groupe de Weyl. On cherche à établir les formules de commutateurs entre racines de signes contraires. On obtient quelques résultats.

Lemme 15. $u_{-\alpha}$ et $u_{\alpha+\beta}$ vérifient (T_3) .

Les calculs suivants sont longs et l'on propose en fin de démonstration une solution permettant de les simplifier. Il nous a paru cependant intéressant de les présenter tels quels : on cherche à réduire un mot dans le groupe $G(2, k)$. Certaines restrictions sur les valeurs des paramètres apparaissent lors de cette réduction, mais on trouve, à chaque fois, un chemin permettant la réduction.

Démonstration : Soit $(r, s, t, r', s', t') \in M_3$; les cas où l'un de ces nombres est nul étant faciles, on envisage la situation où ces six nombres sont non nuls.

$$\begin{aligned} &\text{Alors } u_{-\alpha}(r).u_{\alpha+\beta}(s).u_{-\alpha}(t).u_{\alpha+\beta}(-r').u_{-\alpha}(-s').u_{\alpha+\beta}(-t') \\ &= u_{-\alpha}(r).u_\alpha(u).u_\beta(su^{-1}).u_\alpha(-u). \underbrace{u_\beta(-su^{-1}).u_{-\alpha}(t)}_{= u_\alpha(-v).u_\beta(r'v^{-1}).u_\alpha(v).u_\beta(-r'v^{-1}).u_{-\alpha}(-s')}.u_\alpha(-w).u_\beta(t'w^{-1}).u_\alpha(w).u_\beta(-t'w^{-1}) \\ &= u_{-\alpha}(r).u_\alpha(u).u_\beta(su^{-1}).u_\alpha(-u).u_{-\alpha}(t). \underbrace{u_\beta(-su^{-1}).u_\alpha(-v).u_\beta(r'v^{-1})}_{= u_{-\alpha}(-s').u_\beta(-r'v^{-1}).u_\alpha(-w).u_\beta(t'w^{-1})}.u_\alpha(w).u_\beta(-t'w^{-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{u}_{-\alpha}(r) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(u) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(su^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-u) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(vrk^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-sk(avs')^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\alpha}(-v^2sk^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(v)} \\
&\quad \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-s') \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(wtvk'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-sk'(vs'w)^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\alpha}(-rw^2k'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(w)} \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-t'w^{-1}) \\
&\quad \text{où } k = rv + tv - ru \text{ et } k' = rw - tv \\
&= \mathbf{u}_{-\alpha}(r) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(u) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(su^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\alpha}(-u) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(vrk^{-1})} \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-sk(avs')^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\alpha}(-vrk^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-s') \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(wtvk'^{-1})} \\
&\quad \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-sk'(vs'w)^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-wtvk'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-t'w^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_{-\alpha}(r) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(u) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\beta}(su^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-tvrk''^{-1})} \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-uk''k^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{-\alpha}(tkk''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-sk(avs')^{-1})} \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-s'wtkk''^{-1}) \\
&\quad \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(vk''k''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(rus'k'k''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-sk'(vs'w)^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-wtvk'^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-t'w^{-1}) \\
&\quad \text{où } k'' = -ru + tv + rtv \text{ et } k''' = -r^2uw + rtv + wtv + wt^2v - wtv + vr^2uwt + vrwuwt^2 \\
&= \underbrace{\mathbf{u}_{-\alpha}(r) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(u) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-tvrk''^{-1})} \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\beta}(su^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-uk''k^{-1})} \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-sk(avs')^{-1}) \\
&\quad \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{-\alpha}(t^2kruv(k''k''^{-1})^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(vk''(kk')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(rus'k'k''^{-1})} \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\beta}(-sk'(vs'w)^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-wtvk'^{-1})} \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-t'w^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_{\alpha}(tvr^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-r^2uk''^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\alpha}(-k''r^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(k''r^{-1})} \cdot \mathbf{u}_{\beta}(r'v^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\alpha}(-k''vs'(kr)^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(k''vs'(kr)^{-1})} \\
&\quad \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(r^2uk''^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\alpha}(t^2v^2(rk')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-t^2v^2(rk')^{-1})} \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-r'v^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-tvr^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_{\alpha}(tvr^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-r^2uk''^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\beta}(r'v^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(r^2uk''^{-1})} \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-r'v^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-tvr^{-1}) \\
&= \mathbf{u}_{\alpha}(tvr^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{-\alpha}(-r^2uk''^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(r^2uk''^{-1})} \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\beta}(r'v^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-r'v^{-1})} \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-tvr^{-1}) = \underbrace{\mathbf{u}_{\alpha}(tvr^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-tvr^{-1})} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ces calculs ne sont valables que si u, v, w, k, k', k'' et k''' sont non nuls. Un tel choix est possible ; il suffit de prendre $u = r^{-1}$, $v = t^{-1}$ et $w = -v$, ce qui entraîne $k = 1$, $k' = -s't^{-1}$, $k'' = -rt^{-1}$ et $k''' = rt^{-1}$, tous non nuls. \square

On peut donc définir le sous-groupe à un paramètre $\mathbf{u}_{-\alpha+(\alpha+\beta)}$ et obtenir le résultat suivant.

Lemme 16. $\mathbf{n}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}(-t) = \mathbf{u}_{-\alpha+(\alpha+\beta)}(-rt^{-1})$ et $\mathbf{h}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r) \cdot \mathbf{h}_{\alpha}(t^{-1}) = \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(rt)$.

Démonstration : $\mathbf{n}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}(-t) = \mathbf{u}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot \underbrace{\mathbf{u}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-t)} \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(t^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-t)$

$= \mathbf{u}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(t^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-t) = \mathbf{u}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(t^{-1}) \cdot [\mathbf{u}_{\alpha}(u), \mathbf{u}_{\beta}(ru^{-1})] \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-t)$.

Par ailleurs : $\mathbf{u}_{-\alpha+(\alpha+\beta)}(-rt^{-1}) = [\mathbf{u}_{-\alpha}(-r), [\mathbf{u}_{\alpha}(vt^{-1}), \mathbf{u}_{\beta}(v^{-1})]]$.

La proposition est alors équivalente à :

$$\mathbf{u}_{-\alpha}(r) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(t^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(u) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(ru^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-u) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-ru^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-t^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-t) \\
\cdot \mathbf{u}_{\alpha}(vt^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(v^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-vt^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-v^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-r) = \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(t^{-1}).$$

En posant $u = rt^2$ et $v = t^2$, une succession de relation de tresses sur le membre de gauche, et le fait que $\mathbf{u}_{\alpha+\beta} = \mathbf{u}_{\beta+\alpha}$ permettent d'obtenir la première relation.

La seconde s'en déduit aisément puisque $\mathbf{h}_{\alpha}(t) = \mathbf{n}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}(-1)$ et $\mathbf{h}_{\alpha}(t^{-1}) = \mathbf{n}_{\alpha}(1) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}(-t)$. \square

Mais, comme on va le voir plus loin, $\mathbf{u}_{-\alpha+(\alpha+\beta)}(t)$ n'est pas égal à $\mathbf{u}_{\beta}(t)$.

Ainsi on ne peut établir toutes les formules de commutateurs et ce problème est équivalent, comme le montre le lemme ci-dessous, à établir l'action du groupe de Weyl sur les racines.

Lemme 17. Pour $k \neq \mathbb{F}_2$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathbf{u}_{-\alpha+(\alpha+\beta)}(s) = \mathbf{u}_{\beta}(s)$, $\forall s \in k$;
- (ii) $\mathbf{n}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(r) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}(-t) = \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(rt)$, $\forall r \in k, t \in k^*$;
- (iii) $\mathbf{u}_{-\alpha}((u-u')(uu')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(u) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(v) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-u) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-(u-u')(uu')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(u') \cdot \mathbf{u}_{\beta}(-v') \cdot \mathbf{u}_{\alpha}(-u') = 1$,
 $\forall u, u', v, v' \in k^*$ tels que $(u, v, u', v') \in P_2^*$.
- (iv) $\mathbf{n}_{\alpha}(u) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(v) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}(-u) = \mathbf{n}_{\alpha}(u') \cdot \mathbf{u}_{\beta}(v') \cdot \mathbf{n}_{\alpha}(-u')$ si, et seulement si $(u, v, u', v') \in P_2^*$;
- (v) $\mathbf{h}_{\alpha}(t) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(r) \cdot \mathbf{h}_{\alpha}(t^{-1}) = \mathbf{u}_{\beta}(rt^{-1})$, $\forall r \in k, t \in k^*$;
- (vi) $\mathbf{n}_{\alpha}(r) \cdot \mathbf{u}_{\beta}(s) \cdot \mathbf{n}_{\alpha}(t) = \mathbf{n}_{\alpha}(r') \cdot \mathbf{u}_{\beta}(s') \cdot \mathbf{n}_{\alpha}(t')$ si, et seulement si $(r, s, t, r', s', t') \in P_3^*$.

Démonstration : Soit $r, t \in k^*$ et s tel que $s + t \in k^*$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{-\alpha+(\alpha+\beta)}(s) &= \mathbf{u}_\beta(s) \text{ est équivalent à } [\mathbf{u}_{-\alpha}((u-u')(uu')^{-1}), \mathbf{u}_{\alpha+\beta}((suu')(u-u')^{-1})] = \mathbf{u}_\beta(s) \\ \text{soit } \mathbf{u}_{-\alpha}((u-u')(uu')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(u) \cdot \mathbf{u}_\beta((u's)(u-u')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-u) \\ &\quad \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\beta(-(u's)(u-u')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-(u-u')(uu')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\beta((u's)(u-u')^{-1})}_{\mathbf{u}_\alpha(u) \cdot \mathbf{u}_\beta(-(u's)(u-u')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-u) \cdot \mathbf{u}_\beta(-s)} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } \mathbf{u}_{-\alpha}((u-u')(uu')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(u) \cdot \mathbf{u}_\beta((u's)(u-u')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-u) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-(u-u')(uu')^{-1}) \\ \cdot \underbrace{\mathbf{u}_\alpha(u) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-(u-u')) \cdot \mathbf{u}_\beta(-(su)/(u-u'))}_{\mathbf{u}_\alpha(u) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-(u-u')) \cdot \mathbf{u}_\beta(-(su)/(u-u'))} \cdot \mathbf{u}_\alpha(-u') = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } \mathbf{u}_{-\alpha}((u-u')(uu')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(u) \cdot \mathbf{u}_\beta((u's)(u-u')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-u) \\ \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-(u-u')(uu')^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(u') \cdot \mathbf{u}_\beta(-(su)/(u-u')) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-u') = 1 \end{aligned}$$

Donc (i) est équivalent à (iii) en posant $v = (u's)/(u-u')$ et $v' = (su)/(u-u')$ (ce qui entraîne $uv = u'v'$).

Le même type d'opérations montre que (ii) est équivalent à (iii).

Comme $\mathbf{n}_\alpha(u) = \mathbf{u}_\alpha(u) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-u^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(u) = \mathbf{u}_{-\alpha}(-u^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\alpha(u) \cdot \mathbf{u}_{-\alpha}(-u^{-1})$, (iv) implique (iii).

Enfin (ii) implique (iv) et (iv), (v) et (vi) sont équivalentes car $\mathbf{n}_\alpha(-r) \cdot \mathbf{n}_\alpha(r') = \mathbf{h}_\alpha(rr'^{-1})$. \square

Définition : Pour $(u, v, u', v') \in P_2^*$, on notera $c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v')$ le terme de gauche de la relation (iii).

On rappelle que $\phi : \mathbf{G}(2, k) \rightarrow \mathbf{SL}(3, k)$ est l'homomorphisme associant à chaque générateur $\mathbf{u}_\alpha(t)$ la matrice correspondante.

Nous allons montrer à présent que $\mathbf{K}_{\mathbf{YB}}(n, k) = \ker \phi$ n'est pas trivial et qu'il est engendré par les $c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v')$ et les $c_{\beta,\alpha}(u, v, u', v')$.

Remarque 6 : On peut immédiatement remarquer qu'aucune relation de tresses ne peut être appliquée directement pour réduire $c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v')$ et que la relation $c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v') = 1$ ne peut être déduite des seules relations de tresses entre \mathbf{u}_α , \mathbf{u}_β et $\mathbf{u}_{-\alpha}$; en effet celles-ci ne modifient pas la somme des paramètres attachés à \mathbf{u}_β alors que cette somme n'est pas nulle dans (iii) lorsque $v \neq v'$. Mais la relation (T_1) entre \mathbf{u}_β et $\mathbf{u}_{-\beta}$ pourrait, *a priori*, modifier cette somme.

Commentaires aux sujets des relations manquantes

- Les relations de tresses dans $\mathbf{G}(n, k)$ correspondent, en termes de groupes, aux relations données par Serre comme présentation de l'algèbre de Lie; or la relation de Serre $[H_i, X_j] = n_{i,j}X_j$ qui se traduit par l'identité (v) du lemme 17 : $\mathbf{h}_\alpha(t)^{-1} \cdot \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{h}_\alpha(t) = \mathbf{u}_\beta(rt)$ fait bien partie de la présentation de Serre [12].
- Puisque la présentation est établie pour le groupe unipotent, lorsque l'on ajoute les sous-groupes $\mathbf{u}_{-\alpha_i}(t)$ on obtient, en quelque sorte, les paraboliques minimaux (si ce n'est que l'on n'a pas H en entier). Or un groupe G avec une paire BN n'est pas somme amalgamée de ses sous-groupes paraboliques minimaux; il faut bien ajouter N pour obtenir G [13].
- Suivant l'argument de Milnor [10], si toutes les relations des tresses se relevaient dans le revêtement universel de $\mathbf{SL}(3, \mathbb{R})$ il existerait un homomorphisme, non trivial, de $\ker \phi$ dans $\pi_1(\mathbf{SL}(3, \mathbb{R})) = \{\pm 1\}$. Mais la relation de tresses (T_1) ne se relève pas dans $\widetilde{\mathbf{SL}(3, \mathbb{R})}$.

9.2 $\mathbf{G}(2, k)$ n'est pas $\mathbf{SL}(3, k)$

Rappelons la définition de $\mathbf{G}(2, k)$:

$$\mathbf{G}(2, k) = \langle \mathbf{u}_{\pm\alpha}(t), \mathbf{u}_{\pm\beta}(t), t \in k; \mathbf{u}_{\pm\alpha} \text{ et } \mathbf{u}_{\pm\beta} \text{ vérifient } (T_0) \text{ et } (T_{m_{\pm\alpha, \pm\beta}}) \rangle.$$

Pour $\alpha \in \pm\Pi$, soit $\mathbf{G}_\alpha(2, k)$ le quotient de $\mathbf{G}(2, k)$ par la relation $\mathbf{u}_\alpha(t) = 1, \forall t \in k$:

$$\mathbf{G}_\alpha(2, k) = \mathbf{G}(2, k) / \langle \mathbf{u}_\alpha \rangle$$

où $\langle \mathbf{u}_\alpha \rangle$ est le sous-groupe distingué engendré par \mathbf{u}_α .

Lemme 18. (i) $\mathbf{G}_\alpha(2, k) = \mathbf{G}_{-\alpha}(2, k)$;

(ii) $\mathbf{G}_\alpha(2, k)$ est isomorphe à $\mathbf{G}(1, k)$;

(iii) l'image dans $\mathbf{G}(1, k)$ de $c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v')$ pour $v' \neq v$ n'est pas 1.

Démonstration : On notera temporairement $\dot{\mathbf{u}}_{\pm\alpha}$ et $\dot{\mathbf{u}}_{\pm\beta}$ les images respectives des sous-groupes à un paramètre $\mathbf{u}_{\pm\alpha}$ et $\mathbf{u}_{\pm\beta}$ dans $\mathbf{G}_\alpha(2, k)$. On a donc $\dot{\mathbf{u}}_\alpha(t) = 1, \forall t \in k$.

- (i) Montrons que dans $G_\alpha(2, k)$, on a $\dot{u}_{-\alpha}(t) = 1$ pour tout $t \in k$.
 La relation (T_1) entre u_α et $u_{-\alpha}$ se réduit dans $G_\alpha(2, k)$ à $\dot{u}_{-\alpha}(r).\dot{u}_{-\alpha}(t) = \dot{u}_{-\alpha}(s')$ où $s' = r+t+rst$,
 $\forall r, s, t \in k$.
 Or $\dot{u}_{-\alpha}$, image de $u_{-\alpha}$, est un sous-groupe à un paramètre.
 On a donc $\dot{u}_{-\alpha}(r+t) = \dot{u}_{-\alpha}(r+t+rst)$ ce qui revient à $\dot{u}_{-\alpha}(rst) = 1 \forall r, s, t \in k$.
- (ii) La relation (T_3) entre u_α et u_β se réduit dans $G_\alpha(2, k)$ à $\dot{u}_\beta(r).\dot{u}_\beta(t) = \dot{u}_\beta(r+t)$, $\forall r, t \in k$.
 Or \dot{u}_β et $\dot{u}_{-\beta}$ vérifiant (T_1) , on sait déjà que \dot{u}_β est un sous-groupe à un paramètre. De sorte que
 la relation précédente peut être supprimée de la présentation de $G_\alpha(2, k)$. De même pour l'image
 de la relation (T_3) entre $u_{-\alpha}$ et $u_{-\beta}$.
 Les images des autres relations (relations (T_2)) entre $u_{\pm\alpha}$ et $u_{\mp\beta}$ sont triviales, de sorte qu'elles
 peuvent également être supprimées de la présentation de $G_\alpha(2, k)$.
 On a ainsi supprimé de la présentation de $G_\alpha(2, k)$ les générateurs u_α et $u_{-\alpha}$ (d'après (i)) ainsi que
 les relations où ils apparaissaient.
 La présentation ainsi obtenue est bien celle de $G(1, k) = \langle u_{\pm\beta}(t), t \in k; u_\beta \text{ et } u_{-\beta} \text{ vérifient } (T_0) \text{ et } (T_1) \rangle$.
- (iii) L'image de $c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v') \in G(2, k)$ dans $G_\alpha(2, k)$ est $\dot{u}_\beta(v).\dot{u}_\beta(-v')$ qui n'est certainement pas
 triviale si $v' \neq v$. □

On définit $\overline{G}(2, k)$, quotient de $G(2, k)$ par la relation :

$$(R_3) : n_\alpha(u).u_{\pm\beta}(v).n_\alpha(-u) = n_\alpha(u').u_{\pm\beta}(v').n_\alpha(-u') \text{ pour } (u, v, u', v') \in P_2^*$$

et par celle obtenue en échangeant α et β où l'on rappelle que pour $t \in k^*$, $n_\alpha(t)$ est défini par
 $u_\alpha(t).u_{-\alpha}(-t^{-1}).u_\alpha(t)$.

D'après le lemme 17, cela revient à imposer les relations $c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v') = 1$ et $c_{\beta,\alpha}(u, v, u', v') = 1$ pour
 $(u, v, u', v') \in P_2^*$ où l'on rappelle que :

$$c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v') = u_{-\alpha}((u-u')(uu')^{-1}).u_\alpha(u).u_\beta(v).u_\alpha(-u).u_{-\alpha}(-(u-u')(uu')^{-1}).u_\alpha(u').u_\beta(-v').u_\alpha(-u').$$

Cela revient aussi à ajouter les relations $n_\alpha(t).u_{\pm\beta}(r).n_\alpha(-t) = u_{w_\alpha(\beta)}(\sigma(\alpha, \beta)rt^{\pm 1})$ et celles obtenues en
 échangeant α et β (en ayant défini σ de façon adéquate sur les racines négatives comme sur les positives).
 Cela revient enfin, comme on l'a vu, à ajouter toutes les formules de commutateurs qui manquaient à
 la présentation de Steinberg pour le rang 2. Et les autres formules attendues peuvent maintenant être
 établies dans $\overline{G}(2, k)$ (on gardera les mêmes notations pour désigner les éléments de $G(2, k)$ et leur image
 dans $\overline{G}(2, k)$).

Remarque 7 : Si $k = \mathbb{F}_2$, l'ajout de ces formules permet d'obtenir la relation $u_{\alpha+\beta} = u_{\beta+\alpha}$ qui
 manquait au groupe $U(2, k)$. En effet la relation $n_\alpha.u_\beta.n_\alpha = u_\alpha.u_\beta.u_\alpha.u_\beta$ (on omet les paramètres qui
 valent tous 1) entraîne facilement $n_\alpha.u_\beta.n_\alpha = u_\beta.u_\alpha.u_\beta.u_\alpha$, d'où $u_{\alpha+\beta} = u_{\beta+\alpha}$.

Les résultats qui suivent sont donc aussi valables si $k = \mathbb{F}_2$.

Lemme 19. Dans $\overline{G}(2, k)$, $u_{-\alpha-\beta}(t)$ et $u_{\alpha+\beta}(t)$ vérifient (T_1) .

Démonstration : $u_{\alpha+\beta}(t) = n_\alpha(1).u_\beta(t).n_\alpha(-1)$ et $u_{-\alpha-\beta}(t) = n_\alpha(1).u_{-\beta}(t).n_\alpha(-1)$.

D'où $u_{\alpha+\beta}(r).u_{-\alpha-\beta}(s).u_{\alpha+\beta}(t) = n_\alpha(1).u_\beta(r).u_{-\beta}(s).u_\beta(t).n_\alpha(-1)$

et $u_{-\alpha-\beta}(t').u_{\alpha+\beta}(s').u_{-\alpha-\beta}(r') = n_\alpha(1).u_{-\beta}(t').u_\beta(s').u_{-\beta}(r').n_\alpha(-1)$.

Ces deux expressions sont bien identiques si $(r, s, t, r', s', t') \in M_1$. □

On définit donc $n_{\alpha+\beta}(t) = u_{\alpha+\beta}(t).u_{-\alpha-\beta}(-t^{-1}).u_{\alpha+\beta}(t)$; cet élément peut aussi être défini à partir de
 n_α et n_β . On vérifie l'équivalence des deux définitions.

Lemme 20. Dans $\overline{G}(2, k)$, n_α et n_β vérifient (N_3) ;

$$n_\alpha(t).n_\beta(r).n_\alpha(-t) = n_{\alpha+\beta}(rt) = n_\beta(t).n_\alpha(-r).n_\beta(-t);$$

$$n_\alpha(t).u_{\alpha+\beta}(r).n_\alpha(-t) = u_\beta(-rt^{-1}) \text{ et } n_\alpha(t).u_{-\alpha-\beta}(r).n_\alpha(-t) = u_{-\beta}(-rt).$$

Démonstration : $n_\alpha(t).n_\beta(r).n_\alpha(-t) = n_\alpha(t).u_\beta(r).u_{-\beta}(r^{-1}).u_\beta(r).n_\alpha(-t)$

$$= u_{\alpha+\beta}(rt).u_{-\alpha-\beta}(-rt^{-1}).u_{\alpha+\beta}(rt) = n_{\alpha+\beta}(rt)$$

De même $n_\beta(t).n_\alpha(-r).n_\beta(-t) = n_{\alpha+\beta}(rt)$.

Ainsi $n_\alpha(t).n_\beta(r).n_\alpha(-t) = n_\beta(t).n_\alpha(-r).n_\beta(-t)$ et cet élément ne dépend que du produit rt . Donc,
 d'après la proposition 8, n_α et n_β vérifient (N_3) .

Les relations $n_\alpha(t).u_{\alpha+\beta}(r).n_\alpha(-t) = u_\beta(-rt^{-1})$ et $n_\alpha(t).u_{-\alpha-\beta}(r).n_\alpha(-t) = u_{-\beta}(-rt)$ sont immédiates. □

En posant enfin $h_{\alpha+\beta}(t) = n_{\alpha+\beta}(t) \cdot n_{\alpha+\beta}(-1)$, le lemme 12 montre que $h_{\alpha+\beta}(t) \cdot h_{\alpha+\beta}(t') = h_{\alpha+\beta}(tt')$. On a ainsi toutes les relations de la présentation de Steinberg du groupe $SL(3, k)$ ce qui permet de conclure que $\overline{G}(2, k)$ est une présentation de $SL(3, k)$ et que le noyau de $\phi : G(2, k) \rightarrow SL(3, k)$ est engendré par les $c_{\alpha, \beta}(u, v, u', v')$ et les $c_{\beta, \alpha}(u, v, u', v')$.

Théorème 5. Pour tout corps commutatif k , les éléments $c_{\alpha, \beta}(u, v, u', v')$ et les $c_{\beta, \alpha}(u, v, u', v')$ pour $(u, v, u', v') \in P_2^*$, sont non-nuls pour $v \neq v'$ et ils engendrent $K_{\text{YB}}(2, k) = \ker \phi$. Ainsi $\overline{G}(2, k)$ est une présentation de $SL(3, k)$.

Remarque 8 : Avant de traiter le cas $n > 2$, on peut résumer certaines formules qui décrivent les relations de commutation des générateurs avec les autres éléments définis dans $\overline{G}(2, k)$:

- $u_{\pm\alpha}(t) \cdot n_{\alpha}(r) = n_{\alpha}(r) \cdot u_{\mp\alpha}(-tr^{\mp 2})$;
- $u_{\pm\alpha}(t) \cdot h_{\alpha}(r) = h_{\alpha}(r) \cdot u_{\pm\alpha}(tr^{\mp 2})$;
- $u_{\pm\alpha}(t) \cdot n_{\beta}(r) = n_{\beta}(r) \cdot u_{\pm(\alpha+\beta)}(tr^{\pm 1})$;
- $u_{\pm\alpha}(t) \cdot h_{\beta}(r) = h_{\beta}(r) \cdot u_{\pm\alpha}(tr^{\pm 1})$;
- $u_{\pm\alpha}(r) \cdot u_{\pm\alpha}(t) = u_{\pm\alpha}(r+t)$;
- $u_{\pm\alpha}(t) \cdot u_{\mp\beta}(r) = u_{\mp\beta}(r) \cdot u_{\pm\alpha}(t)$;
- $u_{\pm\alpha}(t) \cdot u_{\pm\beta}(r) = u_{\pm(\alpha+\beta)}(\pm\sigma(\alpha, \beta)rt) \cdot u_{\pm\beta}(r) \cdot u_{\pm\alpha}(t)$;
- $u_{\pm\alpha}(t) \cdot u_{\mp\alpha}(r) = h_{\alpha}((1+rt)^{\pm 1}) \cdot u_{\mp\alpha}(r(1+rt)) \cdot u_{\pm\alpha}(t(1+rt)^{-1})$ si $rt+1 \neq 0$;
- $u_{\pm\alpha}(t) \cdot u_{\mp\alpha}(-t^{-1}) = n_{\alpha}(\pm t^{\pm 1}) \cdot u_{\pm\alpha}(-t)$.

En définissant alors les sous-groupes unipotent U et monomial N dans $\overline{G}(2, k)$ comme ceux engendrés respectivement par les $u_{\epsilon}(t)$ et les $n_{\epsilon}(t)$ pour $\epsilon \in R^+$, les relations énumérées ci-dessus permettent de voir, par récurrence sur le nombre de générateurs $u_{\mp\alpha}, u_{\pm\beta}$ nécessaires pour écrire un élément, que tout élément de $\overline{G}(2, k)$ s'écrit de manière unique $u'hn_wu$ (on utilise les notations de Carter [7]) où $h \in h, u' \in U, (n_w, w \in W)$ est un système de représentants de N/W tel que $n_1 = 1$ et u appartient au sous-groupe U_w de U engendré par les u_{ϵ} tels que $\epsilon \in R^+$ et $w(\epsilon) \in R^-$.

L'existence de la même forme canonique dans $SL(3, k)$ permet également de conclure que ces groupes sont isomorphes.

10 Une présentation de $SL(n, k)$

Au rang $n > 2$, soit $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ les racines simples de telle sorte que $m_{\alpha_i, \alpha_j} = 2$ si $|i-j| > 1$ et $m_{\alpha_i, \alpha_{i+1}} = 3$. On rappelle que $G(n, k)$ est défini de la façon suivante :

$$G(n, k) = \langle u_{\pm\alpha_i}(t), 1 \leq i \leq n, t \in k; u_{\alpha} \text{ vérifie } (T_0), u_{\alpha} \text{ et } u_{\beta} \text{ vérifient } (T_{m_{\alpha, \beta}}), \forall \alpha \neq \beta \in \pm\Pi \rangle$$

et que $\phi : G(n, k) \rightarrow SL(n+1, k)$ est l'homomorphisme associant à chaque générateur $u_{\alpha}(t)$ la matrice correspondante.

On définit dans $G(n, k)$ les éléments $c_{\alpha_i, \alpha_j}(u, v, u', v')$ pour $|i-j| = 1$ et $(u, v, u', v') \in P_2^*$ comme on l'a fait au rang 2 (cf. lemme 17 et la définition qui suit).

Pour $\alpha \in \pm\Pi$, on peut définir comme on l'a fait au rang 2, le quotient $G_{\alpha}(n, k)$ de $G(n, k)$ par la relation $u_{\alpha}(t) = 1, \forall t \in k$:

$$G_{\alpha}(n, k) = G(n, k) / \langle u_{\alpha} \rangle.$$

La même démonstration que celle du lemme 18 permet alors d'établir que :

- $G_{\alpha}(n, k) = G_{-\alpha}(n, k)$;
- $G_{\alpha_1}(n, k)$ et $G_{\alpha_n}(n, k)$ sont isomorphes à $G(n-1, k)$;
- $c_{\alpha_i, \alpha_j}(u, v, u', v') \neq 1$ pour $|i-j| = 1$ et $(u, v, u', v') \in P_2^*$.

De plus, il est facile de voir que pour $1 < i < n$, $G_{\alpha_i}(n, k)$ est isomorphe à $G(i-1, k) \times G(n-i, k)$.

Remarque 9 : Pour $J \subset \Pi$ on peut également définir le quotient $G_J(n, k)$ de $G(n, k)$ par les relations $u_{\alpha_j}(t) = 1, \forall j \in J, \forall t \in k$. En particulier, si $J = \Pi \setminus \{\alpha_i\}$, $G_J(n, k)$ est isomorphe à $G(1, k)$. Cela permet de donner une condition pour qu'un mot soit trivial dans $G(n, k)$.

Soit $\overline{G}(n, k)$ le quotient de $G(n, k)$ par les relations (R_3) pour $|i-j| = 1$, relations qui traduisent l'action des n_{α_i} sur les $u_{\pm\alpha_j}$ lorsque $m_{\alpha_i, \alpha_j} = 3$. D'après le lemme 17 :

$$\overline{G}(n, k) = G(n, k) / \langle c_{\alpha_i, \alpha_j}(u, v, u', v') \text{ pour } |i-j| = 1 \rangle.$$

En notant de façon identique les éléments de $\mathbb{G}(n, k)$ et leurs images dans $\overline{\mathbb{G}}(n, k)$, les u_ϵ pour ϵ non simple sont définis dans $\overline{\mathbb{G}}(n, k)$ à partir des u_{α_i} ou des $u_{-\alpha_i}$ selon le signe de ϵ . Les éléments n_ϵ sont définis soit à partir des $u_{\pm\epsilon}$, soit à partir des n_{α_i} , les résultats du paragraphe précédent assurant l'équivalence des deux définitions.

Il suffit alors de suivre la démonstration de Steinberg (voir Carter [7] p.190). La seule relation non évidente est la suivante :

Lemme 21. Pour tout couple (ϵ, ϵ') de racines, $n_\epsilon(t).u_{\epsilon'}(r).n_\epsilon(-t) = u_{w_\epsilon(\epsilon')}(t^{-n(\epsilon, \epsilon')}r)$.

Démonstration : Puisque n_ϵ est produit de n_{α_i} , il suffit de prouver le résultat pour $\epsilon = \alpha \in \Pi$.

Si $\epsilon' \in \pm\Pi$, il s'agit d'une des relations (R) ajoutées.

Sinon $\epsilon' = \epsilon_1 + \epsilon_2$ avec ϵ_1 et ϵ_2 de même signe. Quitte à changer n_α en $n_{-\alpha}$, on peut même supposer que α a le même signe que ϵ_1 et ϵ_2 .

Si $\epsilon_1 = \alpha$ ou $\epsilon_2 = \alpha$, le système de racines engendré par α , ϵ_1 et ϵ_2 est de rang 2 et le résultat a donc été établi au paragraphe précédent.

Si $\epsilon_1 \neq \alpha$ et $\epsilon_2 \neq \alpha$, $n_\alpha(t)u_{\epsilon_1+\epsilon_2}(r).n_\alpha(-t) = [n_\alpha(t).u_{\epsilon_1}.n_\alpha(-t), n_\alpha(t).u_{\epsilon_2}.n_\alpha(-t)]$.

Une récurrence sur la hauteur de la racine ϵ' permet alors de conclure, le cas où (α, ϵ') forme un système de type A_2 ayant été traité précédemment, et le cas d'un système de type $A_1 \times A_1$ étant évident. \square

Cette relation étant équivalente, d'après le lemme 17, à la formule de commutateur entre $u_{w_\epsilon(\epsilon')}$ et u_ϵ , on a ainsi, avec les relations $h_\epsilon(t).h_\epsilon(t') = h_\epsilon(tt')$ établies au paragraphe précédent, toutes les formules de la présentation de Steinberg de $\text{SL}(n+1, k)$.

On peut, si l'on préfère, établir l'existence dans $\overline{\mathbb{G}}(n, k)$ d'une forme canonique (voir la remarque 8), ce qui établit l'isomorphisme avec $\text{SL}(n+1, k)$.

Théorème 6. Pour tout corps commutatif k , $\overline{\mathbb{G}}(n, k)$ est une présentation de $\text{SL}(n+1, k)$.

Le noyau $K_{\text{YB}}(n, k)$ de $\phi : \mathbb{G}(n, k) \rightarrow \text{SL}(n+1, k)$ est engendré par les $c_{\alpha_i, \alpha_j}(u, v, u', v')$ pour $|i - j| = 1$ et $(u, v, u', v') \in P_2^*$, tous non-nuls si $v \neq v'$.

11 Une autre présentation de $\text{SL}(n, k)$

Si α et β sont deux racines simples non liées, n_α et $u_{\pm\beta}$ commutent dans $\text{SL}(n, k)$.

Pour le cas où $m_{\alpha, \beta} = 2$, on introduit donc les relations de commutation :

$$(R_2) : n_\alpha(u).u_{\pm\beta}(v) = u_{\pm\beta}(v).n_\alpha(u) \quad \text{pour } \forall u \in k^*, v \in k.$$

On vérifie également dans $\text{SL}(n, k)$ les relations de tresses suivantes :

$$(R_1) : n_\alpha(r).u_\alpha(s).n_\alpha(t) = u_\alpha(t').n_\alpha(s').u_\alpha(r') \iff \begin{cases} s's = -rt \\ s'r = t't \\ s't = r'r \\ s'^2 = r't' \end{cases}$$

On suppose $n \geq 1$. Les résultats obtenus pour le groupe unipotent $\text{SL}^+(n+1, k)$ et pour le groupe monomial permettent d'envisager une présentation de $\text{SL}(n+1, k)$, comme groupe possédant une BN-paire.

On considère donc le groupe engendré par les $u_\alpha(t)$, $t \in k$ et les $n_\alpha(t)$, $t \in k^*$ pour tous les $\alpha_i \in \Pi$ et soumis aux relations ci-dessous ($\forall \alpha \neq \beta \in \Pi$) :

- (i) u_α vérifie (T_0) ;
- (ii) n_α vérifie (N_0) et (N_1) ;
- (iii) n_α et u_α vérifient (R_1) ;
- (iv) u_α et u_β vérifient $(T_{m_{\alpha, \beta}})$;
- (v) n_α et n_β vérifient $(N_{m_{\alpha, \beta}})$;
- (vi) n_α et u_β vérifient $(R_{m_{\alpha, \beta}})$.

On note U le sous-groupe engendré par les u_α et N celui engendré par les n_α . Les sous-groupes à un paramètre u_ϵ correspondants à des racines ϵ positives seront définis par des formules de commutateurs comme au paragraphe 5. Il est aisé de voir que la dernière relation est équivalente à la relation (T_1) entre u_α et $u_{-\alpha}$, où l'on définit $u_{-\alpha}(t)$ par $n_\alpha(-1).u_\alpha(-t).n_\alpha(1)$. Les éléments $u_{-\alpha}$ et $u_{-\beta}$ vérifient alors

$(T_{m_{\alpha,\beta}})$ et l'on peut définir des éléments u_ϵ pour toute racine ϵ négative puis vérifier l'action du groupe N sur les racines négatives : $n_\alpha(t).u_\epsilon(r).n_\alpha(-t) = u_{w_\alpha(\epsilon)}(\sigma(\alpha, -\epsilon)rt^{-1})$, formule équivalente à la formule des commutateurs entre u_α et u_ϵ . Le groupe $B = \langle U, H \rangle$ où H est le sous-groupe de N engendré par les $h_\alpha(t) = n_\alpha(t).n_\alpha(-1)$, forme avec N , une BN-paire dans ce groupe.

Théorème 7. Pour tout corps commutatif k , les générateurs et relations ci-dessus font une présentation de $SL(n+1, k)$.

Remarque 10 : Cette présentation est proche de celle donnée par C.Kassel et C.Reutenauer [8] et généralisée à des systèmes de racines autres que A_n par JL.Loday et M.Stein [9]; l'action du groupe symétrique a été remplacée ici par celle du groupe monomial, ce qui supprime la présence du produit semi-direct.

12 Rappels et résumé des principaux résultats

On résume ici la définition des groupes $U(n, k)$, $N(n, k)$, $G(n, k)$, $\overline{G}(n, k)$ et leurs liens avec les sous-groupes de $SL(n, k)$.

A chaque racine simple $\alpha \in \Pi$ d'un système de racines de type A_n et chaque élément t du corps k ou du groupe des unités k^* on associe des symboles $u_\alpha(t)$, $n_\alpha(t)$ ou $u_{-\alpha}(t)$ et on considère le quotient du monoïde libre sur ces symboles par des relations de tresses. Ces monoïdes sont alors des groupes.

Les relations de tresses (T_i) et (N_i) pour $i = 0, \dots, 3$ sont données au paragraphe 2, page 2. La relation (R_3) est définie au § 9.2, page 16; les relations (R_1) et (R_2) sont données page 18.

On rappelle également les définitions des différents sous-groupes à un paramètre utilisés pour établir les présentations. En général, ces éléments sont $u_\epsilon(t)$ ou $n_\epsilon(t)$ où ϵ n'est pas une racine simple et ils sont définis par récurrence sur la hauteur de ϵ à partir des racines simples ou leurs opposées. Ainsi, dans ce qui suit, ϵ, ϵ' et ϵ'' désignent trois racines de même signe telles que $\epsilon = \epsilon' + \epsilon''$.

Enfin on rappelle qu'à tout couple de racines distinctes, la fonction σ associe la valeur $+1$ ou -1 selon un ordre imposé à l'ensemble des racines de même signe (§ 5.2).

Le groupe $U(n, k)$ (§§ 5.1 et 5.3) est le quotient du monoïde libre sur les symboles $u_\alpha(t)$ pour $\alpha \in \Pi$, $t \in k$, par les relations $(\forall \alpha \neq \beta \in \Pi)$:

- u_α vérifie (T_0) : $u_\alpha(0) = 1$;
- u_α et u_β vérifient (T_2) ou (T_3) selon que $m_{\alpha,\beta} = 2$ ou 3 .

On définit : $u_\epsilon(\sigma(\epsilon', \epsilon'')rs) := [u_{\epsilon'}(r), u_{\epsilon''}(s)]$.

$U(n, k)$ est une présentation du groupe $SL^+(n+1, k)$ des matrices triangulaires supérieures strictes.

Le groupe $N(n, k)$ (§ 8) est le quotient du monoïde libre sur les symboles $n_\alpha(t)$ pour $\alpha \in \Pi$, $t \in k^*$, par les relations $(\forall \alpha \neq \beta \in \Pi)$:

- n_α vérifie (N_0) : $n_\alpha(1).n_\alpha(-1) = 1$;
- n_α vérifie (N_1) : $n_\alpha(r).n_\alpha(s) = n_\alpha(r').n_\alpha(s') = 1$, où $r's = rs'$;
- n_α et n_β vérifient (N_2) ou (N_3) selon que $m_{\alpha,\beta} = 2$ ou 3 .

On définit : $n_\epsilon(\sigma(\epsilon', \epsilon'')rs) := n_{\epsilon'}(r).n_{\epsilon''}(s).n_{\epsilon'}(-r)$ et $h_\epsilon(t) := n_\epsilon(t).n_\epsilon(1)$.

$H := \langle h_\alpha(t), \alpha \in \Pi, t \in k^* \rangle \triangleleft N(n, k)$ et $N(n, k)/H \simeq W$ (où W est le groupe de Weyl).

$N(n, k)$ est une présentation du sous-groupe N de $SL(n+1, k)$ des matrices monomiales.

Le groupe $G(n, k)$ (§ 6) est le quotient du monoïde libre sur les symboles $u_\alpha(t)$ et $u_{-\alpha}(t)$ pour $\alpha \in \Pi$, $t \in k$, par les relations $(\forall \alpha \neq \beta \in \Pi)$:

- u_α vérifie (T_0) : $u_\alpha(0) = 1$;
- u_α et $u_{-\alpha}$ vérifient (T_1) ;
- u_α et u_β vérifient (T_2) ou (T_3) selon que $m_{\alpha,\beta} = 2$ ou 3 .

On définit pour toute racine simple α et tout $t \in k^*$:

$$\begin{aligned} h_\alpha(t) &:= u_\alpha(r).u_{-\alpha}(s).u_\alpha(t).u_{-\alpha}(u) \text{ où } t = 1 + rs = 1 + tu ; \\ n_\alpha(t) &:= n_\alpha(t) = u_\alpha(t).u_{-\alpha}(-t^{-1}).u_\alpha(t) ; \text{ alors } h_\alpha(t) := n_\alpha(t).n_\alpha(1). \end{aligned}$$

Au rang 1, $G(1, k)$ est une présentation du groupe unimodulaire $SL(2, k)$.

Au rang $n \geq 2$, on définit $u_\epsilon(\sigma(\epsilon', \epsilon'')rs) := [u_{\epsilon'}(r), u_{\epsilon''}(s)]$.

Mais l'extension $G(n, k) \xrightarrow{\phi} SL(n+1, k) \rightarrow 1$ est non triviale (lemme 18). Les éléments

$c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v') := u_{-\alpha}((u-u')(uu')^{-1}).u_\alpha(u).u_\beta(v).u_\alpha(-u).u_{-\alpha}(-(u-u')(uu')^{-1}).u_\alpha(u').u_\beta(-v').u_\alpha(-u')$ où $uv = u'v'$ engendrent $K_{\text{YB}}(n, k) := \ker \phi$ (théorème 6).

Le groupe $\overline{\mathbf{G}}(n, k)$ (§ 10) est le quotient de $\mathbf{G}(n, k)$ par les relations de tresses ($\forall \alpha \neq \beta \in \Pi$) :

$$- (R_3) : \mathbf{n}_\alpha(u) \cdot \mathbf{u}_{\pm\beta}(v) \cdot \mathbf{n}_\alpha(-u) = \mathbf{n}_\alpha(u') \cdot \mathbf{u}_{\pm\beta}(v') \cdot \mathbf{n}_\alpha(-u') \text{ où } uv = u'v'.$$

On définit : $\mathbf{u}_\epsilon(\sigma(\epsilon', \epsilon'')rs) := [\mathbf{u}_{\epsilon'}(r), \mathbf{u}_{\epsilon''}(s)]$.

D'après le lemme essentiel 17 (page 14), on a les équivalences :

$$(R_3) \iff c_{\alpha,\beta}(u, v, u', v') = 1 \iff \mathbf{n}_\alpha(t) \cdot \mathbf{u}_\beta(r) \cdot \mathbf{n}_\alpha(-t) = \mathbf{u}_{\alpha+\beta}(rt) \iff [\mathbf{u}_{\alpha+\beta}(r), \mathbf{u}_{-\alpha}(t)] = \mathbf{u}_\beta(rt).$$

On définit : $\mathbf{n}_\epsilon(t) := \mathbf{u}_\epsilon(t) \cdot \mathbf{u}_{-\epsilon}(-t^{-1}) \cdot \mathbf{u}_\epsilon(t) = \mathbf{n}_{\epsilon'}(r) \cdot \mathbf{n}_{\epsilon''}(s) \cdot \mathbf{n}_{\epsilon'}(-r)$ où $rs = \pm t$.

$$\mathbf{h}_\epsilon(t) := \mathbf{n}_\epsilon(t) \cdot \mathbf{n}_\epsilon(1) = \mathbf{u}_\epsilon(r) \cdot \mathbf{u}_{-\epsilon}(s) \cdot \mathbf{u}_\epsilon(t) \cdot \mathbf{u}_{-\epsilon}(u) \text{ où } t = 1 + rs = 1 + tu.$$

$\overline{\mathbf{G}}(n, k)$ est une présentation de $\mathrm{SL}(n+1, k)$.

Le groupe considéré au § 11 est le quotient du monoïde libre sur les symboles $\mathbf{u}_\alpha(t)$ pour $\alpha \in \Pi$, $t \in k$ et les symboles $\mathbf{n}_\alpha(t)$ pour $\alpha \in \Pi$, $t \in k^*$, par les relations ($\forall \alpha \neq \beta \in \Pi$) :

- \mathbf{u}_α vérifie (T_0) et \mathbf{n}_α vérifie (N_0) ;
- \mathbf{u}_α vérifie (T_1) et \mathbf{n}_α vérifie (N_1) ;
- \mathbf{u}_α et \mathbf{n}_α vérifient (R_1) ;
- \mathbf{u}_α et \mathbf{u}_β vérifient (T_2) ou (T_3) selon que $m_{\alpha,\beta} = 2$ ou 3 ;
- \mathbf{n}_α et \mathbf{n}_β vérifient (N_2) ou (N_3) selon que $m_{\alpha,\beta} = 2$ ou 3 ;
- \mathbf{n}_α et \mathbf{u}_β vérifient (R_2) ou (R_3) selon que $m_{\alpha,\beta} = 2$ ou 3 .

On définit : $\mathbf{u}_{-\alpha}(t) := \mathbf{n}_\alpha(-1) \cdot \mathbf{u}_\alpha(-t) \cdot \mathbf{n}_\alpha(1)$.

$$\mathbf{u}_\epsilon(\pm rs) := [\mathbf{u}_{\epsilon'}(r), \mathbf{u}_{\epsilon''}(s)].$$

Ce groupe est une présentation de $\mathrm{SL}(n+1, k)$.

Remerciements : Je remercie Daniel Bennequin de m'avoir confié, il y a de nombreuses années maintenant, ce sujet, et de m'avoir toujours aidé et conseillé.

Références

- [1] R. J. BAXTER – *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, 1982.
- [2] R. BONIS – « Groupes d'Artin et formes réelles des relations de Yang-Baxter », *C.R.A.S* **329** (1999), p. 663–666.
- [3] — , « Groupes de Chevalley et relations de Yang-Baxter ; présentation des groupes unipotents », *C.R.A.S* **329** (1999), p. 563–566.
- [4] — , « Présentation des groupes réels orthogonaux et unitaires et relation de Yang-Baxter », *C.R.A.S* **329** (1999), p. 763–766.
- [5] — , « Relations Yang-Baxter dans les groupes de Lie », Thèse, Paris 7, 1999.
- [6] N. BOURBAKI – *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, 1968.
- [7] C. CARTER – *Simple group of Lie type*, John Wiley, 1972.
- [8] C. KASSEL et C. REUTENAUER – « Une variante à la Coxeter du groupe de Steinberg », *K-Theory* **14** (1998), p. 305–318.
- [9] J. L. LODAY et M. R. STEIN – « Parametrized braid groups of Chevalley groups », *Doc. Mathematica* **10** (2005), p. 391–318.
- [10] J. MILNOR – *Introduction to algebraic k-theory*, Princeton University Press, 1971.
- [11] U. REHMANN – « Linear algebraic groups and k-theory », *ICTP Lecture Notes Series* **23** (2008).
- [12] J. P. SERRE – *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, New York, 1966.
- [13] — , *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque n° 46, 1977.
- [14] R. STEINBERG – « Lectures on Chevalley groups », *Yale University Notes* (1967).
- [15] J. TITS – « Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées », *Bull.Soc.Math.Belg* **A.38** (1986), p. 367–387.