



HAL
open science

Sur l'application des périodes d'une variation de structure de Hodge attachée aux familles d'hypersurfaces à singularités simples.

Philippe Eyssidieux, Damien Mégy

► **To cite this version:**

Philippe Eyssidieux, Damien Mégy. Sur l'application des périodes d'une variation de structure de Hodge attachée aux familles d'hypersurfaces à singularités simples.. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 2015, 90 (4), pp.731-759. hal-00823242

HAL Id: hal-00823242

<https://hal.science/hal-00823242v1>

Submitted on 16 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR L'APPLICATION DES PÉRIODES D'UNE VARIATION DE STRUCTURE DE HODGE ATTACHÉE AUX FAMILLES D'HYPERSURFACES À SINGULARITÉS SIMPLES.

PHILIPPE EYSSIDIEUX, DAMIEN MÉGY

RÉSUMÉ. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier positif pair et d un entier positif. Pour toute famille complète Z d'hypersurfaces de \mathbb{P}^{n+1} de degré d à singularités isolées de type A-D-E, nous construisons d'après une idée de Carlson et Toledo reprise dans [Sim93, Mé12] un champ de Deligne-Mumford \bar{Z} d'espace de modules Z auquel la représentation de monodromie de la famille se prolonge. Nous étudions l'application de périodes associée et montrons un théorème de Torelli infinitésimal le long des strates isosingulières de Z sous des hypothèses de transversalité. Enfin, nous appliquons ce résultat à l'étude du revêtement universel de \bar{Z} .

Dans [Sim93] est décrite une classe de surfaces projectives algébriques S munies de \mathbb{Q} -Variations de Structure de Hodge \mathbb{V}_S qui sont intéressantes du point de vue de la théorie de Hodge non-abélienne : (S, \mathbb{V}_S) ne peut pas s'exprimer par tiré en arrière à partir de systèmes locaux sur des courbes, variétés abéliennes ou espaces localement symétriques hermitiens. Ce sont des exemples particulièrement intéressants pour l'uniformisation en plusieurs variables complexes (voir [Eys11] pour un survey récent) et l'un de nous a généralisé cette construction jusqu'en dimension 6 et a entamé l'étude cohomologique de ces exemples [Mé12]. La conjecture de Toledo stipulant que $H^2(\pi_1(S), \mathbb{Q}) \neq 0$ n'est décidée dans cette classe d'exemples que dans certains cas [Mé12]. La motivation initiale de ce travail est d'étudier pour cette classe d'exemples l'autre problème ouvert général de l'uniformisation en plusieurs variables complexes, c'est à dire la conjecture de Shafarevich prédisant que le revêtement universel d'une variété projective algébrique complexe est holomorphiquement convexe (cf. [Eys11] pour la définition de la convexité holomorphe et une discussion du problème).

Décrivons la construction de [Sim93, Mé12] qui reprend une idée de Carlson et Toledo. Dans ce qui suit X désigne une variété projective complexe connexe de dimension $n + 1$, $n \geq 1$, L un faisceau inversible tel que $|L|$ n'a pas de point base. Soient $\mathcal{X} \subset |L| \times X$ l'hypersurface universelle et $p_1 : \mathcal{X} \rightarrow |L|$ la projection sur le premier facteur. Si $f \in H^0(X, L) - \{0\}$, on note $X_f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ et $[f] \in |L|$ le point correspondant. Définissons l'ouvert de Zariski $U(0) := U(X, L)(0)$ comme le lieu des $[f] \in |L|$ tels que X_f est une hypersurface lisse et notons $D := |L| - U(0)$ le lieu discriminant. On pose $\mathcal{X}(0) = p_1^{-1}(U(0))$. Sur $U(0)$, on construit le système local de monodromie $R^n p_{1*} \mathbb{Q}_{\mathcal{X}(0)}$ ¹. On désigne par $\mathbb{V}_{U(0)}$ le conoyau

Date: 16 Mai 2013.

1. Pour tout espace T et tout groupe A , A_T désigne le faisceau des fonctions localement constantes sur T à valeurs dans A . Plus généralement si \mathbb{W}_T est un système local sur T et $\phi : T' \rightarrow T$ une application continue, on note $\mathbb{W}_{T'} = \phi^* \mathbb{W}_T$. De même, pour $X \rightarrow T$ une application continue, on note $X_{T'} = X \times_T T'$.

du morphisme $H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_{U(0)} \rightarrow R^n p_{1*} \mathbb{Q}_{\mathcal{X}(0)}$. On a, par le théorème de semi-simplicité, un isomorphisme $R^n p_{1*} \mathbb{Q}_{\mathcal{X}(0)} \simeq \mathbb{V}_{U(0)} \oplus H^n(X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_{U(0)}$. Fixons une fois pour toute un élément général $f_{gen} \in H^0(X, L)$ et prenons $\eta := [f_{gen}] \in U(0)$ comme point base.

Supposons désormais que n est pair. Le système local $\mathbb{V}_{U(0)}$ est le produit tensoriel par \mathbb{Q} d'un système sous jacent à une \mathbb{Z} -Variation de Structures de Hodge de poids n dont la polarisation est orthogonale et la fibre en η est $H_{ev}^n(X_\eta, \mathbb{Q}) := \ker(H^n(X_\eta, \mathbb{Q}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{Q}))$. On note par

$$\rho : \pi_1(U(0), \eta) \rightarrow O(H_{ev}^n(X_\eta, \mathbb{Q}), \int_{X_\eta} - \cup -)$$

la représentation d'holonomie du système local $\mathbb{V}_{U(0)}$.

Introduisons $U := U(X, L) \subset |L|$ l'ouvert de Zariski formé des hypersurfaces n'ayant que de singularités isolées et de type A-D-E. Évidemment, $U(0) \subset U$. Nous construisons un champ algébrique de Deligne-Mumford $\tilde{U} := \tilde{U}(X, L)$ séparé et propre sur son espace de module U contenant $U(0)$ comme un ouvert de Zariski de sorte que, le morphisme surjectif $\pi_1(U(0), \eta) \rightarrow \pi_1(\tilde{U}, \eta)$ (voir [Noo04, Noo05] pour les groupes d'homotopie des champs topologiques) associé à l'inclusion de $U(0)$ dans U a un noyau contenu dans celui de ρ . La représentation ρ descend alors à une représentation

$$\bar{\rho} : \pi_1(\tilde{U}, \eta) \rightarrow O := O(H_{ev}^n(X_\eta, \mathbb{Q}), \int_{X_\eta} - \cup -).$$

apparaissant comme l'holonomie d'une \mathbb{Q} -Variation de Structures de Hodge polarisée de poids n $(\mathbb{V}_{\tilde{U}}, \mathcal{F}, S)$ sur \tilde{U} . L'image Γ de ρ est la même que celle de $\bar{\rho}$ et par un théorème classique de Beauville [Bea86], c'est un sous-groupe arithmétique du groupe orthogonal $\mathbf{G} = O(H_{ev}^n(X_\eta, \mathbb{R}), \int_{X_\eta} - \cup -)$.

On note par $\mathcal{D} := \mathbf{G}/\mathbf{U}$ le domaine de Griffiths attaché à $(\mathbb{V}_{\tilde{U}}, \mathcal{F}, S)$ [Gri73], \mathbf{U} étant le sous-groupe qui stabilise la structure de Hodge sur $H_{ev}^n(X_\eta, \mathbb{Q})$. On rappelle que \mathcal{D} a une structure naturelle de variété complexe homogène naturelle et porte une distribution holomorphe horizontale \mathbf{G} -équivariante. L'action de Γ sur \mathcal{D} est proprement discontinue et le champ quotient $[\Gamma \backslash \mathcal{D}]$ est un orbifold complexe. L'application des périodes de $(\mathbb{V}_{\tilde{U}}, \mathcal{F}, S)$ définit une application holomorphe horizontale de champs complexes analytiques $p : \tilde{U} \rightarrow [\Gamma \backslash \mathcal{D}]$.

Pour toute variété Z propre sur U (ce qui existe avec $\dim(Z) < c$), on peut construire un revêtement Galoisien fini $Z' \rightarrow Z$ de groupe G étale au dessus de $U(1) \cap Z$ et un morphisme $[G \backslash Z'] \rightarrow \tilde{U}$ ce qui fournit un système local G -équivariant $\mathbb{V}_{Z'}$ qui est sous jacent à une \mathbb{Q} -VSH G -équivariante sur Z' . Plus généralement pour tout morphisme $F : Y \rightarrow \tilde{U}$ avec Y projective-algébrique $\mathbb{V}_Y := F^*(\mathbb{V}_{\tilde{U}}, \mathcal{F}, S)$ est une \mathbb{Q} -VSH d'application de périodes $p \circ F$. Pour plus de détails sur ces exemples, diverses généralisations et une étude cohomologique de $\mathbb{V}_{\mathbb{P}^r}$ si $\mathbb{P} \subset |L|$ est un espace linéaire générique de dimension ≤ 6 voir [Mé12].

Soit $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $U(k) \subset |L| = \mathbb{P}H^0(X, L)$ des hypersurfaces $X_f := \{f = 0\}$ à singularités simples de nombre de Tjurina total $\tau(f)$ inférieur ou égal à k est un ouvert dont le complémentaire a codimension $c \geq \min(7, k)$ dès que L est k -ample. On a $U(0) \subset U(k) \subset U$ et on note $\widetilde{U}(k) = \tilde{U} \times_U U(k)$. C'est un sous champ de \tilde{U} d'espace de modules $U(k)$

Le principal résultat de cet article est un théorème de Torelli infinitésimal. Pour l'énoncer, nous avons besoin d'une définition. Si $\mathcal{I} \subset O_X$ est un idéal cohérent, on note $p_X(\mathcal{I}) = \min\{m, h^1(X, \mathcal{I}(m)) = 0\}$. D'autre part, on note H_k l'ensemble des idéaux cohérents dont le cosupport est un sous schéma artinien de longueur $\leq k$, et qui sont localement des idéaux jacobiens de singularités isolées simples. Alors $\sup_{\mathcal{I} \in H_k} p_X(\mathcal{I}) < \infty$. On note $s_k(X)$ ce supremum.

Théorème 1. *Si $X = \mathbb{P}^{n+1}$, $n \geq 2$ pair, et $L = O_X(d)$ et $k \in \mathbb{N}$ vérifie $d \geq n + 3 + s_k(\mathbb{P}^{n+1})$, l'action de $PGL(n+2)$ sur $|L|$ se relève à \widetilde{U} en préservant les $\widetilde{U}(k)$ et la différentielle de la restriction de l'application de périodes de $\mathbb{V}_{\widetilde{U}}$ à chaque strate $\widetilde{U}(k) - \widetilde{U}(k-1)$ a pour noyau le tangent de l'orbite de $PGL(n+2)$.*

On a $s_0(\mathbb{P}^{n+1}) = s_1(\mathbb{P}^{n+1}) = 0$, $s_2(\mathbb{P}^{n+1}) = 2$. Nos bornes ne sont pas optimales. Si les surfaces quintiques avec un nœud sont obtenues par notre théorème, ce dernier est vide pour les surfaces quartiques à singularités simples alors que Torelli infinitésimal est bien connu dans ce cas. L'obtention de bornes optimales nécessiterait des arguments nettement plus fins non développés ici.

Corollaire 2. *Sous les hypothèses précédentes $p : [PGL(n+2) \backslash \widetilde{U}(k)] \rightarrow [\Gamma \backslash D]$ est finie.*

Le résultat avec $k = 0$ est un résultat classique de Griffiths [Gri69]. La preuve du théorème 1 repose sur le calcul de la différentielle de l'application de périodes pour des hypersurfaces nodales issue du travail fondamental [DimSa06] et de l'étude de leur filtration de Hodge dans [DiSaWo09]. Nous étendons une partie des résultats de ces articles aux hypersurfaces à singularités simples. Cette extension effectuée, l'énoncé de type Torelli infinitésimal repose sur une variante donnée au lemme 3.2.1 du théorème de Macaulay pour des hypersurfaces à singularités isolées quasi-homogènes, exactement comme dans [Voi02]. Techniquement, nos résultats sont complémentaires de ceux de [DimSt11, Dim12] qui ne considèrent pas la question de Torelli infinitésimal.²

Une généralisation du théorème de Griffiths sur les intégrales rationnelles donnant une interprétation de la différentielle de l'application de périodes comme opérateur de multiplication pour les directions transverses aux strates isosingulières ne semble pas avoir été considérée de façon systématique dans la littérature. De même il est probable que le théorème 1 se généralise pour X quelconque pourvu que L soit assez ample mais là encore nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature. Nous laissons ces questions pour de futures recherches.

L'application à la conjecture de Shafarevich est immédiate en utilisant une construction de [Eys97, Eys04] :

Corollaire 3. *Hypothèses et notations comme au théorème 1. Soit Z une variété projective lisse et $f : Z \rightarrow \widetilde{U}(k+1)$ un morphisme fini. Alors le revêtement universel de Z est une variété de Stein.*

Dans le cas où f est génériquement fini, l'étude de la conjecture de Shafarevich semble beaucoup plus délicate et nous ne savons pas non plus la décider dans tous les cas.

2. Alors que nous finissions de rédiger ce travail, A. Dimca nous a signalé que le lemme 3.2.1 résultait de [DimSa12] qui traite le cas plus général des singularités isolées quelconques, moyennant une traduction qui n'est pas si évidente pour nous. Notre preuve demandant moins de technologie et restant assez courte, nous avons donc préféré la conserver.

Nous tenons à remercier D. Barlet, N. Borne, M. Brion, A. Dimca, S. Druel, L. Gruson, C. Peters, C. Voisin, M. H. Saito et tout particulièrement A. Otwinowska pour d'utiles remarques sur les questions traitées ici.

1. STRUCTURE ORBIFOLD SUR $U(k)$ ET PROLONGEMENT DE LA REPRÉSENTATION DE MONODROMIE

Soit X une variété projective lisse complexe de dimension impaire $n + 1$, L un fibré en droites sans point base sur X , et $f \in H^0(X, L) - \{0\}$ telle que l'hypersurface $\{f = 0\} := X_f$ n'ait que des singularités isolées. Soit $\Sigma \subset X_f$ le sous schéma artинien de X de support X_f^{sing} défini par l'annulation du premier jet de f . La longueur de Σ , i.e. le nombre de Tjurina total $\tau(f)$, est défini par la relation

$$\tau(f) = \sum_{P \in |\Sigma|} \tau_P(f) = \sum_{P \in \Sigma} \dim(\mathcal{O}_{\Sigma, P}).$$

Choisisant des coordonnées locales et une trivialisatіon locale de L et notant f_P la fonction qui définit f dans ces coordonnées, on voit que $\mathcal{O}_{\Sigma, P}$ est isomorphe à l'algèbre de Tjurina $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0} / (f_P, \frac{\partial f_P}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_P}{\partial x_{n+1}})$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, et $U(k) \subset |L|$ l'ouvert de Zariski constitué des $[f] \in L$ tels que X_f n'ait que des singularités isolées, simples (autrement dit de type A-D-E), et telles que $\tau(f) \leq k$. On a $U(0) \subset U(1) \subset \dots \subset U = \bigcup_k U(k)$. Remarquons que U est non vide puisque l'ouvert $U(0)$ des $[f]$ tels que X_f soit lisse est non vide par Bertini.

Dans la suite de cette section, on introduit (1.1) un champ de Deligne-Mumford muni d'une variation de structure de Hodge. Dans certains cas (1.3), ce champ est également muni de l'action d'un groupe algébrique, et la variation de structure de Hodge descend au champ d'Artin quotient.

1.1. Compléments à la construction de [Mé12]. Cette construction peut se reformuler et s'étendre comme suit :

Proposition 1.1.1. *Soient X , L et U comme ci-dessus. Il existe un champ de Deligne-Mumford $\tilde{U} = \bigcup_k \tilde{U}(k)$ compactifiant $U(0)$ et fini sur son espace de modules U , tel que la représentation de monodromie de $\pi_1(U(0))$ se prolonge à $\bar{\rho} := \bar{\rho}_{(X, L)} : \pi_1(\tilde{U}, \eta) \rightarrow O(H^n(X_\eta, \mathbb{Q}))$ où $\eta \in U(0)$ est un point base arbitraire.*

Preuve:

Soit $f \in H^0(X, L)$ tel que l'hypersurface $X_f \subset X$ soit à singularités isolées. Tout voisinage de $[f]$ dans $\mathbb{P}H^0(X, L)$ induit une déformation de X_f et donc, pour chaque singulier $P \in |\Sigma|$, une déformation du germe singulier (X_f, P) . On en déduit un morphisme de germes

$$\lambda : (|L|, [f]) \rightarrow \prod_{P \in |\Sigma|} Def(X_f, P)$$

où $Def(X_f, P)$ est la base de « la » déformation miniverselle de la singularité isolée d'hypersurface (X_f, P) . Il est connu que dans ce cas, cette base $Def(X_f, P)$ est lisse, et naturellement isomorphe à un voisinage de 0 dans l'espace vectoriel $\mathcal{O}_{\Sigma, P}$. La déformation $(X \times |L|, P \times [f]) \supset (\mathcal{X}, P \times [f]) \rightarrow (|L|, [f])$ est induite par la déformation miniverselle [Loo84, Ch. 6]. En particulier les éléments de $|L|$ proches de $[f]$ singuliers près de P sont ceux que λ envoie dans le discriminant de

$Def(X_f, P)$. En choisissant une trivialisaton de L_P de façon adéquate, l'application λ a pour différentielle l'application d'évaluation des jets aux points singuliers de X_f :

$$ev_{[f]} = \bigoplus_{P \in |\Sigma|} ev_P : T_{[f]}|L| \rightarrow \bigoplus_{P \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma, P} \otimes_{\mathcal{O}_{\Sigma}} L$$

qui provient par quotient de l'application naturelle $H^0(X, L) \rightarrow H^0(X, L \otimes \mathcal{O}_{\Sigma})$.

Stratification par le nombre de Tjurina.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $Z(k) = U(k) - U(k-1)$ et supposons $[f] \in U(k)$. $Z(k)$ est localement fermé dans U . Pour $l \leq k$ le germe $(Z(k), [f])$ se laisse décrire comme l'image réciproque par λ de la réunion sur toutes les partitions de l

$$l = \sum_{P \in |\Sigma|} l_P$$

de $\prod_{P \in |\Sigma|} Z_u(l_P)$ où $Z_u(l_P) \subset Def(X_f, P)$ est le lieu des germes de nombre de Tjurina égal à l_P .

Si $ev_{[f]}$ est surjectif, λ est équivalent à la seconde projection du produit $(Z(k), [f]) \times \prod_{P \in |\Sigma|} Def(X_f, P)$ [Loo84, Ch. 6] et la stratification $U(k) = \bigcup_{l=0}^k Z(l)$ est de Whitney en $[f]$ puisque c'est le cas pour la stratification par les nombres de Tjurina de la déformation miniverselle d'un germe de singularité simple. La strate $Z(l)$ est alors de codimension l .

*Revêtement Galoisien neutralisant la monodromie locale à l'infini*³

Soit B un voisinage de $[f]$ suffisamment petit dans $|L|$. Notons ρ la représentation de monodromie de $R^n p_{1*} \mathbb{Q}_{\mathcal{X}(1)}$ et ρ_P la représentation de $\pi_1(Def(X, P) - \overline{Z(1)})$ définie par la monodromie de la fibre de Milnor de $P \in |\Sigma|$. Alors, $\rho|_{\pi_1(B - \overline{Z(1)})}$ se décompose comme somme directe d'un facteur trivial et du tiré en arrière par λ de $\bigoplus_P \rho_P$. Puisque, en dimension paire, la monodromie locale ρ_P est d'image finie, il suit que $\rho(\pi_1(B - \overline{Z(1)}))$ est fini.

Par un théorème de Selberg, il existe un sous-groupe normal sans torsion d'indice fini dans $\rho(\pi_1(|L| - \overline{Z(1)}))$. Le revêtement étale fini correspondant $\eta : U'(0) \rightarrow U - \overline{Z(1)}$ est galoisien de groupe G et se prolonge par le théorème de Grauert-Remmert en un revêtement Galoisien normal encore noté $\eta : |L'| \rightarrow |L|$. On note aussi $U'(k) = |L'| \times_{|L|} U(k)$ et $\eta : U'(k) \rightarrow U(k)$ la restriction à cet ouvert.

Orbifold $\widetilde{U}(k)$.

Considérons le champ quotient $\widetilde{U}(k) = [U'(k)/G]$. Si $ev_{[f]}$ est surjective pour tout $[f] \in U(k)$, $U'(k)$ est lisse (voir [Mé12]) donc $\widetilde{U}(k)$ est un champ de Deligne-Mumford lisse d'espace de modules $U(k)$ et l'isotropie en $[f]$ est le produit des groupes de monodromie locale des singularités. On note $\pi_1(\widetilde{U}(k))$ le groupe fondamental du champ topologique sous-jacent [Noo04, Noo05].

Par construction, toute composante connexe V de la préimage de $U - Z(1)$ dans $U'(k)$, vérifie $\rho(\pi_1(V)) = \{e\}$ et que $U'(k)$ soit lisse ou non, la représentation $\rho \circ \eta_*$

3. L'hypothèse $n \equiv 0[2]$ n'est utilisée qu'à partir de ce point.

est induite par une représentation $\rho' : \pi_1(U'(k), x) \rightarrow O(H^n(X_g, \mathbb{Q}))$ où $x \in U'(1)$ est un point base et $[g] = \eta(x)$. Le système local correspondant est G -équivalent et descend à un système local $\mathbb{V}_{\widetilde{U(k)}}$ sur $\widetilde{U(k)}$ et on notera $\bar{\rho} : \pi_1(\widetilde{U(k)}, x) \rightarrow O(H^n(X_g, \mathbb{Q}))$ sa monodromie. Si $\widetilde{U(k)}$ est lisse ce système local est sous jacent à une \mathbb{Q} -VSH par [Gri73]. \square

Notre discussion implique aussi la précision suivante sauf pour le dernier point pour lequel on renvoie à [Mé12].

Proposition 1.1.2. *Si, de plus, L est k -jet-ample, $\widetilde{U(k)}$ est lisse, $\text{codim}_{|L|} U(k)^c \geq \max(7, k)$ et la stratification $\widetilde{U(k)} = \cup_{l=0}^k \widetilde{Z(l)}$ (où l'on a posé $\widetilde{Z(l)} = \widetilde{U(l)} - U(l+1)$) est de Whitney.*

Notons que $\gamma : \widetilde{Z(k)} \rightarrow Z(k)$ est une gerbe de lien un schéma en groupes fini si, pour tout $[f] \in Z(k)$, $ev_{[f]}$ est surjectif. Ceci permet de définir un système local $\mathbb{V}_{Z(k)} := \gamma_* \mathbb{V}_{\widetilde{Z(k)}}$ qui est sous jacent à une VSH polarisée sur $Z(k)$.

1.2. Une question ouverte. Dans le cas $X = \mathbb{P}^3$, $L = O_{\mathbb{P}^3}(4)$ on sait que $\bar{\rho}$ est un isomorphisme sur son image grâce au théorème de Torelli pour les surfaces K3. Une conjecture de Carlson-Toledo prédit que les seuls réseaux de groupes algébriques réels semisimples apparaissant comme groupes kählériens sont ceux des groupes de type hermitiens symétriques. Cette conjecture implique que $\bar{\rho}$ n'est pas injective pour $d \geq 5$. Ceci motive :

Conjecture 1. *Pour $d \geq 5$ le noyau de $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{(\mathbb{P}^3, O_{\mathbb{P}^3}(d))}$ est un groupe infini.*

La méthode de [CaTo99] pour prouver le fait analogue dans le cas de ρ ne s'applique malheureusement pas ici. Nous ne voyons pas comment construire d'autres représentations linéaires de $\pi_1(\widetilde{U}(\mathbb{P}^3, O_{\mathbb{P}^3}(d)), \eta)$. Ceci motive la :

Question 2. *Le groupe $\pi_1(\widetilde{U}(\mathbb{P}^3, O_{\mathbb{P}^3}(d)), \eta)$ admet-il d'autres représentations complexes que les représentations de la forme $\alpha \circ \bar{\rho}$ où α est une représentation rationnelle de $O(H^n(X_g, \mathbb{R}))$?*

Pour $d = 4$ la réponse à cette question est négative par le théorème de super-rigidité de Margulis.

1.3. Relèvement de l'action de $PAut(X, L)$. Le groupe $Aut(X, L)$ des automorphismes du couple (X, L) agit sur $|L|$ à travers $PAut(X, L) = Aut(X, L)/\mathbb{C}^*$ en préservant les $U(k)$.

Proposition 1.3.1. *Si le groupe $PAut(X, L)$ est semisimple, son action sur U se relève à une action sur \widetilde{U} .*

Preuve: L'algèbre de Lie $\mathfrak{paut}(X, L)^{op} \subset H^0(\Theta_{|L|})$ est une algèbre de Lie de champs de vecteurs holomorphes qui sont tangents à chaque $Z(k)$. Or $\overline{Z(1)}$ est le lieu de ramification de $|L'| \rightarrow |L|$. Donc ces champs de vecteurs se relèvent à des champs de vecteurs sur $|L'|$ car tout champ de vecteurs tangent au lieu de ramification de $Z \rightarrow Y$ avec Y lisse et Z normal se relève à Z .

En effet, le relèvement a lieu en codimension un car un germe de champ de vecteurs de la forme $a(z, (w_j))z \frac{\partial}{\partial z} + b_i(z, (w_j)) \frac{\partial}{\partial w_i}$, $a, b \in \mathbb{C}\{z, w_1, \dots, w_n\}$ se relève bien à un germe de champ de vecteurs holomorphes par un morphisme de la forme

$(z, (w_j) \rightarrow (z^e, (w_j))$. Ce relèvement en codimension un se prolonge à Y tout entier car le faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur l'espace normal Y est réflexif.

On dispose donc d'un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{paut}(X, L)^{op} \rightarrow H^0(\Theta_{U'})^G$ qui s'exponentie en un morphisme de groupes de Lie complexes du revêtement universel topologique \tilde{P} de $PAut(X, L)$ vers le centralisateur $C(G, Aut(U'))$ de G dans $Aut(U')$.

Si $PAut(X, L)$ est semisimple, le groupe \tilde{P} est un groupe algébrique affine semisimple et le morphisme correspondant est un morphisme de groupes algébriques. Le noyau N du morphisme $\tilde{P} \rightarrow Aut'(U)$ est contenu dans le noyau N' de $\tilde{P} \rightarrow PAut(X, L)$ car l'action de \tilde{P} redescend à une action de \tilde{P} sur U factorisant via $PAut(X, L)$. Mais N'/N commute à G et préserve η . Comme η est Galoisien de groupe G on déduit que $N'/N \subset Z(G)$ et que donc, en divisant U' par N'/N , on obtient une action de $PAut(X, L)$ sur $U'' := U'/(N'/N)$ qui commute à $Gal(U''/U) = G/(N'/N) := G'$ et descend à une action de $PAut(X, L)$ sur $\tilde{U} \simeq [U''/G']$. \square

Corollaire 1.3.2. *L'application des périodes $\mathcal{P} : \tilde{U} \rightarrow [\Gamma \backslash \mathcal{D}]$ attachée à $\bar{\rho}$ descend à une application définie sur le champ quotient $[PAut(X, L) \backslash \tilde{U}] \rightarrow [\Gamma \backslash \mathcal{D}]$.*

2. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA REPRÉSENTATION DE MONODROMIE PROLONGÉE

Avec les notations de 1.1, soit $[f] \in U$ et $X_f \subset X$ l'hypersurface de X à singularités isolées simples définie par f et $ev_{[f]}$ la flèche d'évaluation des jets aux points singuliers de X_f .

Proposition 2.0.3. *Supposons $ev_{[f]}$ surjectif pour tout $X_f \in Z(k)$. Les sous faisceaux de $\Theta_{Z(k)}$ définis par les noyaux des $Gr_F(\nabla)$ pour les VSH sous-jacentes aux systèmes locaux $Gr_W^{n+2}R^{n+1}(p_1)_*\mathbb{Q}_{(Z(k) \times X - \mathcal{X}_{Z(k)})}$ et $\mathbb{V}_{Z(k)}$ sont égaux.*

Remarquons que l'hypothèse de la proposition est satisfaite si par exemple L est le produit tensoriel d'au moins $\tau(f)$ fibrés très amples.

Pour montrer la proposition, on compare la cohomologie de X_f à celle de son complémentaire (2.1) ainsi qu'à la structure limite (2.2), d'abord ponctuellement puis en famille (2.3), ce qui donne le résultat. Une preuve alternative et plus constructive est donnée dans le cas de familles de surfaces en (2.4).

2.1. Relation entre les structures de Hodge de X_f et de $X - X_f$. Une singularité simple a une forme d'intersection définie négative, en particulier non dégénérée, donc X_f est une variété d'homologie rationnelle [Di92, prop. 4.7]. Le groupe $H^n(X_f, \mathbb{Q})$ coïncide donc avec le groupe de cohomologie d'intersection $IH^n(X_f, \mathbb{Q})$ et porte une structure de Hodge pure. Le groupe $H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Z})$ porte une structure de Hodge mixte [Del71-75] de poids $n + 1$ et $n + 2$, entrant dans une suite exacte :

$$(2.1) \quad H^{n+1}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{X_f}^{n+2}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+2}(X, \mathbb{Z})$$

Toujours parce que X_f est une variété d'homologie rationnelle, on a un isomorphisme de structure de Hodge $H^n(X_f, \mathbb{Q})(1) \rightarrow H_{X_f}^{n+2}(X, \mathbb{Q})$. Ainsi $Gr_W^{n+2}H^{n+1}(X -$

X_f, \mathbb{Z}) est une sous structure de Hodge pure de poids $n + 2$ de $H_{X_f}^{n+2}(X, \mathbb{Z})$ et sa filtration de Hodge vérifie

$$0 = F^{n+2} \subset F^{n+1} \subset \dots \subset F^1 = F^0 = Gr_W^{n+2} H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Z})$$

On note que si $H^{n+1}(X, \mathbb{Z}) = 0$, ce qui est le cas si $X = \mathbb{P}^{n+1}$ puisque n est pair, alors $H^{n+1}(X - X_f, \mathbb{Z})$ est pure de poids $n + 2$.

2.2. Structure de Hodge de X_f et structure de Hodge limite. Soit $i : \Delta \rightarrow U$ un disque analytique tel que $i(0) = [f]$ et $i(\Delta^*) \subset U(0)$. On pose $\mathcal{X}_\Delta = \mathcal{X} \times_U \Delta$. Alors $t : \mathcal{X}_\Delta \rightarrow \Delta$ est un morphisme projectif plat lisse hors de $\{t = 0\}$ et $(\mathcal{X}_\Delta)_0 = X_f$. Si la monodromie de $\mathcal{X}_\Delta \rightarrow \Delta^*$ est unipotente, c'est à dire triviale puisque les groupes de monodromie locale près de $[f]$ sont finis, ceci permet de définir la structure de Hodge limite $H_{lim}^n(X_f, \mathbb{Q})$ au sens de [Ste76].

Grâce à [Saito90], on a un isomorphisme de structures de Hodge pures

$$H_{lim}^n(X_f, \mathbb{Q}) = \mathbb{H}^0(X_f, \psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}[n]))$$

L'objet $\phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}[n])$ est concentré aux points singuliers de X_f . Le Module de Hodge Mixte $\psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}[n]) = \psi_t(IC_{\mathcal{X}_\Delta}(\mathbb{Q}))$ est un module de Hodge polarisable pur car $IC_{\mathcal{X}_\Delta}(\mathbb{Q})$ est un module de Hodge polarisable et que le logarithme de la monodromie vérifie $N = 0$, en vertu de [Saito88, (0.7), p. 852].

La première flèche a du triangle distingué canonique

$$\mathbb{Q}_{X_f}[n] \rightarrow \psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}) \xrightarrow{can} \phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}) \xrightarrow{+1}$$

est donc un morphisme de Modules de Hodge Polarisables de même poids. La catégorie des modules de Hodge Polarisables de poids donné étant abélienne et semi-simple [Saito88, Lemme 5, p. 854] il suit que $\psi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}) \simeq \mathbb{Q}_{X_f}[n] \oplus \text{Coker}(a)$ où $\text{Coker}(a)$ a même poids que $\mathbb{Q}_{X_f}[n]$. Il suit que $\phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta})$ est isomorphe à $\text{Coker}(a)$.

Ceci fournit une suite exacte scindée de structures de Hodge pures :

$$(2.2) \quad 0 \rightarrow H^n(X_f, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{lim}^n(X_f, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{x \in |\Sigma|} \mathcal{H}^n(\phi_t(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta}))_x \rightarrow 0$$

2.3. Comparaison avec la variation de structure de Hodge des variétés singulières. Soit avec les notations du paragraphe 1.1 un germe de disque analytique $j : (\Delta, 0) \rightarrow \prod_{p \in |\Sigma|} Def(X_f, p)$ tel que $j(\Delta^*) \subset \prod_{p \in |\Sigma|} Def(X_f, p)(0)$ et dont la monodromie est nulle.

On définit un germe $T := (|L|, [f]) \times_{\lambda, j} \Delta$ muni de la famille d'hypersurfaces $X \times T \supset \mathcal{X}_T \xrightarrow{\pi} T$.

La projection naturelle $t : T \rightarrow \Delta$ définit une fonction holomorphe et $S := \{t = 0\}$ est exactement le germe en $[f]$ de la strate isosingulière $Z(k)$ de X_f . Notons enfin g la composée $\mathcal{X}_T \xrightarrow{\pi} T \xrightarrow{t} \Delta$.

On a sur \mathcal{X}_S un triangle distingué

$$\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S}[n] \xrightarrow{sp} \psi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}) \xrightarrow{can} \phi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}) \xrightarrow{+1}.$$

Le dernier terme est supporté sur le lieu singulier de g qui est une union finie de multisections étales de $\mathcal{X}_S \rightarrow S$ qui décrivent les points singuliers des X_s pour $s \in S$. Comme ces singularités sont de type ADE donc rigides, le dernier terme est donc une somme directe, de tirés en arrière de faisceaux gratte-ciel sur la déformation universelle locale de chaque singularité.

En appliquant π_* , et en utilisant l'isomorphisme naturel $\pi_*\psi_g \simeq \psi_t\pi_*$, on obtient sur S le triangle

$$\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S} \rightarrow \psi_t(\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}) \rightarrow \pi_*\phi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_T}) \xrightarrow{+1}.$$

Ce dernier donne en cohomologie une suite exacte sur S

$$0 \rightarrow R^n\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S} \rightarrow \mathbb{V}_S \oplus H^n(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \bigoplus_{x \in |\Sigma|} \mathcal{R}^n\pi_*\phi_g(\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_\Delta})_x.$$

La suite exacte (2.2) implique que les tiges des termes de cette suite exacte sont des structures de Hodge pures de même poids et donc que cette suite exacte est une suite exacte de Modules de Hodge polarisables purs qui est scindée toujours par [Saito88, Lemme5, p. 854].

Finalement, en tout point de S le noyau de $Gr_F(\nabla)$ pour la \mathbb{Q} -Variation de Structures de Hodge $R^n\pi_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}_S}$ et celui de \mathbb{V}_S sont les mêmes.

Compte tenu de la suite exacte (2.1), ceci établit la proposition 2.0.3. \square

2.4. Interprétation dans le cas $n = 2$. Donnons un argument alternatif permettant de démontrer la proposition 2.0.3 dans le cas $n = 2$.

Si on applique le théorème de résolution simultanée des singularités DuVal [Art74] [Bri70], cf. [KoMo98, p. 135] à la famille universelle $p_1 : \mathcal{X} \rightarrow U$ on trouve un revêtement ramifié $r : U^* \rightarrow U$ et une application holomorphe propre et lisse $\bar{u} : \mathcal{X}^* \rightarrow U^*$ avec un morphisme $\pi : \mathcal{X}^* \rightarrow \mathcal{X} \times_U U^*$ qui soit une résolution simultanée, c'est à dire que pour tout $s \in U^*$ $\pi_s : \mathcal{X}_s^* \rightarrow \mathcal{X}_s$ soit une résolution. De plus, ces résolutions peuvent être supposées minimales. Le morphisme r factorise par un morphisme fini $r' : U^* \rightarrow \tilde{U}$. L'existence globale de r n'est pas évidente et il n'est pas clair pour nous que r puisse être choisi de façon à ce que r' soit étale. Toutefois, cf [BuWa74], c'est le cas si on restreint u à un petit voisinage d'un point de U . Ceci implique que $\mathbb{V}_{\tilde{U}, [f]} \simeq H^2(X'_f, \mathbb{Q})$ comme structures de Hodge où $X'_f \rightarrow X_f$ est la résolution minimale mais aussi que $r'^*\mathbb{V}_{\tilde{U}} \simeq R^2\bar{u}_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}^*}$ comme variations de structures de Hodge polarisables.

Notons $Z^*(k) = r^{-1}(Z(k) - Z(k+1))$ et appelons $\mathcal{X}^*(k)$, resp. $\mathcal{X}(k)$ la restriction de \mathcal{X}^* , resp. \mathcal{X} à $Z^*(k)$. $\mathcal{X}^*(k)$ est lisse sur $Z(k)$ et, quitte à faire un revêtement étale de $Z^0(k)$, on peut supposer que sur chaque composante connexe $Z^0(k)$ de $Z^*(k)$ l'ensemble singulier de $\mathcal{X}(k)$ est un produit de $Z^0(k)$ par un ensemble fini. L'ensemble exceptionnel de $\pi_k : \mathcal{X}^*(k) \rightarrow \mathcal{X}(k)$ est globalement un produit de $Z^0(k)$ par une réunion de configurations de courbes rationnelles du type A-D-E adéquat.

Ceci donne des suites exactes de Variation de Structure de Hodge :

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}(1)_{Z^0(k)}^{\oplus k} \rightarrow R^2\bar{u}_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}^*(k)}|_{Z^0(k)} \simeq (r')^*\mathbb{V}_{\tilde{U}}|_{Z^0(k)} \rightarrow R^2(p_1)_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}(k)} \rightarrow 0$$

Notons $v : U^* \times X - \mathcal{X}^* \rightarrow U^*$ la première projection. La suite exacte (2.1) implique que $R^2(p_1)_*\mathbb{Q}_{\mathcal{X}(k)}(1) \simeq Gr_W^4 R^3 v_*\mathbb{Q}_{(U^* \times X - \mathcal{X}^*)}|_{Z^0(k)}$, puis par le théorème de semisimplicité :

$$(r')^*\mathbb{V}_{\tilde{U}}|_{Z^0(k)} \simeq \mathbb{Q}(1)_{Z^0(k)}^{\oplus k} \oplus Gr_W^4 R^3 v_*\mathbb{Q}_{(U^* \times X - \mathcal{X}^*)}|_{Z^0(k)}$$

Ceci implique que sur $Z^0(k)$, les VSH $Gr_W^4 R^3 v_*\mathbb{Q}_{(U^* \times X - \mathcal{X}^*)}|_{Z^0(k)}$ et $\mathbb{V}_{\tilde{U}}|_{Z^0(k)}$ ne diffèrent que par un système local de monodromie finie donc d'application de périodes

constante. En particulier, Torelli infinitésimal pour $\mathbb{V}_{\tilde{U}}|_{Z^0(k)}$ équivaut à Torelli infinitésimal pour $Gr_{\mathbb{W}}^4 R^3 v_* \mathbb{Q}_{X \times U^* - \mathcal{X}}|_{Z^0(k)}$ ce qui équivaut à la proposition 2.0.3 dans ce cas.

3. THÉORÈME DE MACAULAY AVEC SINGULARITÉS MODÉRÉES

Claire Voisin nous a signalé qu'une variante du théorème de Macaulay autorisant un peu de singularités devrait suivre en adaptant [Voi02, pp. 427-428]. Mettons en oeuvre de cette suggestion : après quelques généralités sur le complexe de Koszul, nous obtenons la propriété d'injectivité 3.2.4 en corollaire du résultat de dualité 3.2.1. Cela est suffisant pour montrer l'injectivité de l'application des périodes de $\mathbb{V}_{\tilde{U}}$ sur certaines strates de \tilde{U} .

3.1. Un lemme sur le complexe de Koszul d'une presque-intersection complète. Soit $D \in \mathbb{N}^*$ un entier positif. Soit $G \subset H^0(X, L^D)$ un sous espace de dimension $n + 2$. Notons $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_X$ le faisceau d'idéaux engendré par G , et $\Sigma \subset X$ le sous schéma tel que $\mathcal{O}_\Sigma = \mathcal{O}_X / \mathcal{G}$.

Posons $A = A(X, L) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H^0(X, L^k)$. On appelle I l'idéal gradué de $A(X, L)$ défini en degré k par $I_k = H^0(\mathcal{G}(k))$. On a $(G) \subset I$.

Soit $K(G)_m^\bullet$ le complexe de Koszul en degré m :

$$H^0(L^{m-(n+2)D}) \otimes \Lambda^{n+2} G \rightarrow \dots \rightarrow H^0(L^{m-D}) \otimes G \rightarrow H^0(L^m)$$

où le premier terme du complexe est par convention en degré 0. Considérons également, avec la même convention, sa version faisceautique $\mathcal{K}(G)_m^\bullet$:

$$\mathcal{O}_X(L^{m-(n+2)D}) \otimes \Lambda^{n+2} G \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_X(L^{m-D}) \otimes G \rightarrow \mathcal{O}_X(L^m)$$

L'hypercohomologie de ce complexe de faisceaux est décrite par le lemme suivant.

Lemme 3.1.1. *Si $\Sigma \subset X$ est artinien et localement d'intersection complète, alors, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{H}^i(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) = 0$ pour $i \neq n + 2, n + 1$ et*

$$(1) \quad \mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \mathbb{H}^{n+1}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \bigoplus_{P \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma, P}.$$

Preuve: Le support $|\Sigma|$ de Σ consiste en un nombre fini de points de X et

$$\mathcal{O}_\Sigma = \bigoplus_{P \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma, P}$$

est une somme de faisceaux gratte-ciel. Par abus de langage on identifie $\mathcal{O}_{\Sigma, P}$ et l'algèbre artinienne locale de Σ en P . Ensuite, pour tout $P \in |\Sigma|$, désignant par $\mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{X, P}$ l'idéal maximal, on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G}_P / \mathfrak{m}_P \mathcal{G}_P = n + 1$ et toute famille (g_0, \dots, g_n) dans \mathcal{G}_P induisant une base de $\mathcal{G}_P / \mathfrak{m}_P \mathcal{G}_P$ est une suite régulière dans $\mathcal{O}_{X, P}$ engendrant \mathcal{G}_P voir par exemple [Kap70, Thm 129]. On peut donc choisir une base $(g_1, \dots, g_n, g_{n+1})$ de G de sorte que (g_1, \dots, g_n) est une suite régulière engendrant \mathcal{G}_P . Dans la catégorie dérivée $D^b(\text{Mod}(\mathcal{O}_{X, P}))$ on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(G)_{0, P}^\bullet &= \mathcal{K}(g_{1, P}, \dots, g_{n+1, P})_0^\bullet \otimes \mathcal{K}(g_{n+2, P})_0^\bullet \\ &\simeq \mathcal{O}_{\Sigma, P}[-n-1] \otimes^L \mathcal{K}(g_{n+2, P})^\bullet \\ &\simeq (\mathcal{O}_{\Sigma, P}[-n-1] \xrightarrow{0} \mathcal{O}_{\Sigma, P}[-n-2]) \end{aligned}$$

puis $H^{n+1}(\mathcal{K}(G)_{0, P}^\bullet) \simeq H^{n+2}(\mathcal{K}(G)_{0, P}^\bullet) \simeq \mathcal{O}_{\Sigma, P}$ comme $\mathcal{O}_{X, P}$ -modules, les autres faisceaux de cohomologie étant nuls. Par suite, les faisceaux de cohomologie non nuls

de $\mathcal{K}(G)_m^\bullet$ sont les grattes-ciels $H^{n+1}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq H^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \bigoplus_{P \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma, P}$ puisque $\mathcal{K}(G)_0^\bullet$ est acyclique hors de $|\Sigma|$. La suite spectrale d'hypercohomologie de $\mathcal{K}(G)_m^\bullet$ n'a donc qu'un seul terme non nul en E_1 qui est $d_1 : H^0(H^{n+1}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet)) \rightarrow H^0(H^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet))$ et $d_1 = 0$ car c'est le cas après localisation. Donc, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{H}^i(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) = 0$ pour $i \neq n+2, n+1$ et

$$(2) \quad \mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \mathbb{H}^{n+1}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \simeq \bigoplus_{P \in |\Sigma|} \mathcal{O}_{\Sigma, P}.$$

□

Par ailleurs, on a la filtration bête de $\mathcal{K}(G)_0$ définie par

$$\sigma_{\geq p} \mathcal{K}(G)^\bullet = \mathcal{O}_X(L^{-pD}) \otimes \Lambda^{n+1-p} G \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Cette filtration décroissante induit une filtration sur $\mathbb{H}^*(\mathcal{K}(G)_m^\bullet)$ et la suite spectrale correspondante a un terme $E_1^{p,q} = H^q(Gr_p^p(\mathcal{K}(G)^\bullet))$. Elle dégénère en E_{n+3} . On remarque également que $(E_1^{\bullet,0}, d_1) = K(G)_m^\bullet$, de sorte que $E_2^{p,0} = H^p(K(G)_m^\bullet)$. Notamment, $E_2^{n+2,0} = H^{n+2}(K(G)_m^\bullet) = (R/(G))_m$ et une variation légère de la preuve du lemme 3.1.1 permet de voir que G a une suite régulière de longueur $n+1$ et donc que $E_2^{p,0} = H^p(K(G)_m^\bullet) = 0$ pour $p \leq n$.

3.2. Dualité de Macaulay pour des hypersurfaces de \mathbb{P}^{n+1} à singularités isolées quasihomogènes. On se place dans le cas particulier suivant. Soit $f \in H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d)) - \{0\}$ telle que l'hypersurface $X_f := \{f = 0\}$ n'aie que des singularités isolées quasi-homogènes. On considère $G \subset H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(d-1))$ le sous espace vectoriel engendré par les dérivées partielles de f , et $(G) = J$ est alors l'idéal jacobien de f . Avec les notations précédentes, $D = d-1$, et $\Sigma \subset X_f$ s'identifie au sous schéma artinien de X de support X_f^{sing} défini par l'annulation du premier jet de f , I à l'idéal de A s'annulant sur Σ et $\mathcal{G} = \mathcal{J}_\Sigma$ s'identifie, après introduction de coordonnées locales, à l'idéal de Tjurina de la fonction correspondant à f . Puisque les singularités de X_f sont quasi-homogènes, les idéaux de Milnor et de Tjurina coïncident donc Σ est intersection complète locale.

Si $l \in \mathbb{Z}$, on note

$$\text{ev}_l : H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(l)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}_\Sigma(l))$$

la flèche induite par la surjection de faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma$.

On note enfin $\sigma = (n+2)(d-2)$.

Sur l'espace projectif \mathbb{P}^{n+1} , les faisceaux inversibles n'ont de cohomologie qu'en degré 0 ou $n+1$, on en déduit l'annulation de la plupart des termes de la suite spectrale introduite en 3.1 : on a $E_r^{p,q} = 0$ sauf si $q = 0$ ou $q = n+1$, et donc les seules flèches d_r non nulles sont les flèches d_1 et la flèche $d_{n+2} : E_{n+2}^{0,n+1} \rightarrow E_{n+2}^{n+2,0}$. Les deux propositions suivantes précisent son image et sa coimage.

Lemme 3.2.1. *La flèche $d_{n+2} : E_{n+2}^{0,n+1} \rightarrow E_{n+2}^{n+2,0}$ induit un isomorphisme entre $(I/(G))_{\sigma-m}^\vee$ et $(I/(G))_m$.*

Preuve: Cette flèche induit un isomorphisme entre sa coimage et son image. Il suffit de calculer ces deux espaces.

Première étape : l'image de d_{n+2} dans $E_{n+2}^{n+2,0} = R/(G)_m$ est $(I/(G))_m$.

On a

$$\begin{aligned}
\text{Im}d_{n+2} &= \ker \left(E_{n+2}^{n+2,0} \rightarrow E_{n+3}^{n+2,0} \right) \\
&= \frac{\ker \left(E_1^{n+2,0} \rightarrow E_{n+3}^{n+2,0} \right)}{\ker \left(E_1^{n+2,0} \rightarrow E_{n+2}^{n+2,0} \right)} \\
&= \frac{\ker \left(E_1^{n+2,0} \rightarrow E_{n+3}^{n+2,0} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet) \right)}{\ker \left(E_1^{n+2,0} \rightarrow E_{n+2}^{n+2,0} \right)}
\end{aligned}$$

Or, la flèche composée

$$E_1^{n+2,0} \rightarrow E_2^{n+2,0} = E_{n+2}^{n+2,0} \rightarrow E_{n+3}^{n+2,0} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet)$$

apparaissant au numérateur coïncide avec $H^0(\mathcal{O}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}/\mathcal{G}(m))$. Son noyau est donc $H^0(\mathcal{G}(m)) = I_m$. D'autre part, au dénominateur, on a

$$\ker \left(E_1^{n+2,0} \rightarrow E_{n+2}^{n+2,0} \right) = \ker \left(E_1^{n+2,0} \rightarrow E_2^{n+2,0} \right) = \text{Im}d_1.$$

On en déduit

$$\text{Im}d_{n+2} = \frac{I_m}{\text{Im}d_1} = \frac{I_m}{(G)_m}.$$

Deuxième étape : la coimage de $d_{n+2} : E_{n+2}^{0,n+1} \rightarrow E_{n+2}^{n+2,0}$ s'identifie par dualité de Serre à $(I/(G))_{-m+(n+2)(d-2)}^\vee = (I/(G))_{\sigma-m}^\vee$.

La suite spectrale duale $((E_r^{p,q})^\vee, {}^t d_r)$ s'identifie par dualité de Serre à une renumérotation de la suite spectrale de la filtration bête de :

$$\omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(L^{-m}) \rightarrow \omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(L^{-m+d-1}) \otimes G^\vee \rightarrow \dots \rightarrow \omega_{\mathbb{P}^{n+1}}(L^{-m+(n+2)(d-1)}) \otimes \Lambda^{n+2}G^\vee$$

Le complexe obtenu en tensorisant par la droite complexe $\Lambda^{n+2}G \simeq \mathbb{C}$ s'identifie à $\mathcal{K}(G)_{-m+\sigma}^\bullet$ en utilisant $\omega_{\mathbb{P}^{n+1}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(n+2)$.

La première étape permet alors de conclure.

□

Lemme 3.2.2. *Si la flèche d'évaluation $ev_m : H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_\Sigma(m))$ est surjective, $H^{n+1}(K(G)_{\sigma-m}^\bullet) = 0$.*

Preuve: Au vu du lemme 3.1.1, reprenant les notations de la première étape de la preuve du lemme 3.2.1, on a aussi surjectivité de $E_{n+3}^{n+2,0} \rightarrow \mathbb{H}^{n+2}(\mathcal{K}(G)_m^\bullet)$. De ceci suit que $E_2^{1,n+1} = 0$. Or, par la seconde étape de la preuve du lemme 3.2.1, $E_2^{1,n+1} \simeq H^{n+1}(K(G)_{\sigma-m}^\bullet)^\vee$. □

Fixons m_0 tel que

$$ev_{m_0} : H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(m_0)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_\Sigma(m_0))$$

soit surjective.

Corollaire 3.2.3. *Pour tout $m \leq \sigma - m_0$, $H^{n+1}(K(G)_m^\bullet) = 0$.*

Preuve: Soit $m \leq \sigma - m_0$. La flèche $ev_{\sigma-m} : H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(\sigma - m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_\Sigma(\sigma - m))$ est surjective. On peut donc conclure avec le lemme 3.2.2. □

Plus généralement, on a $h^{n+1}(K(G)_m^\bullet) = h^1(\mathcal{J}_\Sigma(\sigma - m))$.

Corollaire 3.2.4. *Supposons que $d - (n + 2) > 0$. Supposons que $A/J_{\geq d-(n+2)}$ est engendré en degré $d - (n + 2)^4$ et que $I/J_{\geq d-(n+2)}$ est engendré en degré $d - (n + 2)$. Si $m_0 \leq d - (n + 2)$, l'application linéaire induite par la multiplication*

$$I/J_d \rightarrow \text{Hom}(A/J_{d-(n+2)}, I/J_{2d-(n+2)})$$

est injective.

Preuve: Soit P un élément du noyau. On a, pour tout $Q''' \in (A/J)_{d-n-2}$, $PQ''' = 0 \pmod{J}$. De là $PQ'''Q'' = 0 \pmod{J}$ pour tout $Q'' \in A/J_{\geq 0}$. Puisque $A/J_{\geq d-(n+2)}$ est engendré en degré $d - (n + 2) > 0$, il suit que $PQ' = 0 \pmod{J}$ pour tout $Q' \in A/J_{\geq d-(n+2)}$. Comme $\sigma - 2d + n + 2 = (n + 2)(d - 1) - 2d = nd - n - 2 \geq d - (n + 2)$ on a

$$\forall Q \in I/J_{d-n-2} \quad \forall Q' \in I/J_{\sigma-2d+n+2} \quad \langle Q; PQ' \rangle_{d-(n+2)} = 0$$

où $\langle -, - \rangle_d$ désigne l'accouplement de dualité défini par d_{n+1} entre I/J_d et $I/J_{\sigma-d}$ au lemme 3.2.1. Or on a, par functorialité de la dualité de Serre,

$$\langle Q; PQ' \rangle_{d-(n+2)} = \langle QQ'; P \rangle_{\sigma-d}.$$

Puisque $I/J_{\geq d-(n+2)}$ est engendré en degré $d - (n + 2)$, P est orthogonal à l'espace $I/J_{\sigma-d}$ entier. Donc $P = 0 \pmod{J}$. \square

Une preuve plus courte du corollaire 3.2.4 valable dans le cas d'une hypersurface avec un seul nœud nous a été communiquée par A. Otwinowska au moment où nous finissons la présente preuve.

4. THÉORÈME DE TORELLI LOCAL SUR LES STRATES ISOSINGULIÈRES

Soit n un entier pair strictement positif, et soit $X_f \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface de degré d à singularités isolées simples. Comme dans le cas où X_f est lisse, une déformation isosingulière de X_f fournit une variation de structure de Hodge dont la tige en X_f est $H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f)$. Rappelons que $H_f := H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f)$ est pur de poids $n + 2$ par la discussion de la section 2 et que sa filtration de Hodge vérifie

$$0 = F^{n+2} \subset F^{n+1} \subset \dots \subset F^1 = H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f, \mathbb{C}).$$

L'IVHS correspondante a été étudié par Dimca et Saito [DimSa06] et avec plus de détails dans le cas nodal par ces mêmes auteurs et Wotzlaw [DiSaWo09]. Dans cette section, nous extrayons de leur travail tous les renseignements dont nous aurons besoin en ajoutant quelques petits points supplémentaires. Ceci permet d'appliquer le résultat d'injectivité 3.2.4 et d'aboutir à la démonstration du théorème 1.

4.1. Formule de Dimca-Saito-Wotzlaw pour les deux premiers termes de la filtration de Hodge. Si y est un point singulier de X_f , on note comme [DiSaWo09, section 1.1] $\tilde{\alpha}_{X_f, y}$ le plus petit zéro de la b -fonction de la singularité. Dans notre cas, la singularité est quasihomogène et on note w_1, \dots, w_{n+1} les poids correspondants. Alors, il est connu que $\tilde{\alpha}_{X_f, y} = \sum_i w_i$. Par exemple, pour une singularité A_1 , on a $\tilde{\alpha}_{X_f, y} = (n + 1)/2$. Un examen des équations des singularités simples montre que l'on a toujours $\tilde{\alpha}_{X_f, y} > 1$. Plus précisément, si $n \geq 4$, alors $[\tilde{\alpha}_{X_f, y}] > 1$, et si $n = 2$, alors $[\tilde{\alpha}_{X_f, y}] = 1$.

4. Ce qui est garanti dès que $m_0 \leq d - (n + 2)$.

Lorsque $n = 2$ on définit un idéal homogène I' de l'anneau des polynômes de $n+2$ variables de la façon suivante. Définissons d'abord comme [DiSaWo09, (2.1.4)] le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}'_{(1)} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ cosupporté aux points singuliers y de X_f par

$$F_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3, y}(*X_f) = \mathcal{I}'_{(1)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2X_f),$$

où le membre de gauche désigne la filtration de Hodge du D -module $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(*X_f)$ correspondant au Module de Hodge Mixte sous jacent à $Rj_* \mathbb{Q}_{\mathbb{P}^3 - X_f}$. On pose alors $I'_k = \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}'_{(1)}(k))$ puis $I' = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I'_k$.

Par [DiSaWo09, Theorem 2.2], on a :

Proposition 4.1.1.

$$\begin{aligned} Gr_F^{n+1} H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f, \mathbb{C}) &= A/J_{d-n-2}, \\ Gr_F^n H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f, \mathbb{C}) &= \begin{cases} A/J_{2d-n-2} & \text{si } n \geq 4 \\ I'/J_{2d-n-2} & \text{si } n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans [DiSaWo09, Lemma 1.5] est énoncé que, pour les surfaces nodales, $\mathcal{I}'_{(1)}$ est l'idéal des fonctions qui s'annulent sur les points singuliers de X_f (avec structure réduite). Il est facile de généraliser :

Lemme 4.1.2. *L'idéal $\mathcal{I}'_{(1)}$ coïncide avec l'idéal de Tjurina : $\mathcal{I}'_{(1)} = \mathcal{I}_\Sigma$.*

Preuve: Il s'agit de voir que $F_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3, y}(*X_f) = (\frac{\partial h}{\partial x_1} \dots \frac{\partial h}{\partial x_n}) h^{-2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3, y}$ où h est une équation locale de X_f près de y Or, d'après [DiSaWo09, (1.3.2)] (qui réfère à [Saito09]), la filtration de Hodge sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3, y}(*X_f)$ est dans ce cas donnée par :

$$F_1 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3, y}(*X_f) = F_1 \mathcal{D}_{\mathbb{P}^3, y}(h^{-1} \mathcal{O}),$$

où $\mathcal{D}_{\mathbb{P}^3, y}$ est filtré par l'ordre de l'opérateur. En effet, suivant les notations de loc. cit. $k_0 = 0$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3, y}^{\geq 1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3, y}$. \square

Corollaire 4.1.3. *Avec les notations de la section 3.2, $I' = I$.*

4.2. Formule de Dimca-Saito pour le premier gradué de la connexion de Gauss-Manin de $\mathbb{P}^{n+1} - X_f$. Il y a également une seconde filtration sur $H^{n+1}(\mathbb{P}^{n+1} - X_f, \mathbb{C})$ la filtration par l'ordre du pôle notée P^\bullet et l'on a $F^i \subset P^i$ [DeDi90].

Le long de la strate isosingulière S de X_f dans l'espace projectif paramétrisant les hypersurfaces de degré d , la connexion de Gauss Manin vérifie $\nabla P^i \subset P^{i-1} \otimes \Omega_S^1$ du moins si $\dim P^i$ est localement constante près de $[X_f]$ ce qui est vrai sur un ouvert dense $S' \subset S$ et [DimSa06] donne une formule pour $Gr_P \nabla_\xi$ si $\xi \in T_{[X_f]} S = I/(f)_d$ en termes de la partie libre du module de Brieskorn.

Ceci est exploité dans [DiSaWo09, Remarks 3.9] dont nous tirons la proposition suivante :

Proposition 4.2.1. *Si $n \geq 4$ $Gr_F^n \nabla_\xi : Gr_F^{n+1} H_f \rightarrow Gr_F^n H_f$ s'identifie par l'isomorphisme de la proposition 4.1.1 à -1 fois la multiplication $I/(f)_d \otimes A/J_{d-n-2} \rightarrow A/J_{2d-n-2}$ et si $n = 2$, à -1 fois la multiplication $I/(f)_d \otimes A/J_{d-n-2} \rightarrow I/J_{2d-n-2}$.*

Preuve: En faisant attention au fait que la notation n ici correspond à ce qui est noté $n-1$ dans [DiSaWo09], cela résulte de [DimSa06] de la même façon que dans [DiSaWo09, Remarks 3.9] au moins sur l'ouvert S' . On conclut par passage à la limite. \square

4.3. Preuve du théorème 1. Le corollaire 3.2.4 signifie précisément que pour la famille isosingulière $(\mathbb{P}^{n+1} \times Z(l) - \mathcal{X}(k)_{Z(l)})/Z(l)$, le noyau de $Gr_F \nabla_\xi : Gr_F^{n+1} H_f \rightarrow Gr_F^n H_f$ s'identifie via la proposition 4.2.1 à $J_d \subset I_d$ qui est l'espace tangent de l'orbite de $[f]$ sous $PGL(n+2)$. Ceci établit le théorème 1 pour $d \gg k > n+2$ grâce aux résultats de la section 2.

Soyons maintenant plus précis sur les conditions que d doit satisfaire pour la condition suffisante d'engendrement de la proposition 4.2.1. Plaçons nous en $f \in Z(k)$ d'idéal Jacobien \mathcal{J}_Σ . Nous devons nous assurer que $H^0(\mathbb{P}^{n+1}, O(d-(n+2))) \rightarrow O(d-(n+2))/\mathcal{J}_\Sigma$ est surjectif⁵ et surtout que I/J est engendré sur l'anneau de polynômes A en degré $d-(n+2)$. Ce dernier point est garanti dès que I est engendré sur l'anneau de polynômes A en degré $d-(n+2)$, c'est à dire dès que $\mathcal{J}_\Sigma(d-(n+2))$ est engendré par ses sections globales.

Une condition suffisante est que $d-(n+2) \geq \text{Reg}(\mathcal{J}_\Sigma)$ où Reg est la régularité de Castelnuovo-Mumford. Or, puisqu'il définit un sous-schéma artinien, \mathcal{J}_Σ est m -régulier (pour $m \geq n+1$) si et seulement si $H^1(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{J}_\Sigma(m-1)) = 0$, c'est à dire si et seulement si $H^0(\mathbb{P}^{n+1}, O(m-1)) \rightarrow O(m-1)/\mathcal{J}_\Sigma$ est surjectif.

La condition suffisante obtenue est donc tout simplement la surjectivité de :

$$H^0(\mathbb{P}^{n+1}, O(d-(n+3))) \rightarrow O(d-(n+3))/\mathcal{J}_\Sigma.$$

De sorte que la proposition 4.2.1 s'applique dès que $d \geq n+3 + s_k(\mathbb{P}^{n+1})$, où s_k est la quantité apparaissant dans l'énoncé du théorème 1).

5. APPLICATION À LA CONJECTURE DE SHAFAREVICH SUR L'UNIFORMISATION

5.1. Variétés propres sur \tilde{U} . Dans ce paragraphe on reprend les notations de 1.1 et on ne suppose pas que $X = \mathbb{P}^{n+1}$.

Soit Z une variété connexe projective lisse, $f : Z \rightarrow \tilde{U}$ un morphisme et $z \in Z$ un point base. La représentation $\tilde{\rho} : \pi_1(\tilde{U}, x) \rightarrow O(H^n(X_g, \mathbb{Q}))$ construite à la proposition 1.1.1 induit une représentation $f^* \tilde{\rho} : \pi_1(Z, z) \rightarrow O(H^n(X_g, \mathbb{Q}))$. Notons $\tilde{Z}^{un} \rightarrow Z$ le revêtement universel de Z , et $\tilde{Z}^\rho := \ker(f^* \tilde{\rho}) \backslash \tilde{Z}^{un}$ le revêtement topologique de Z attaché à $f^* \tilde{\rho}$,

Proposition 5.1.1. *La variété \tilde{Z}^ρ est holomorphiquement convexe.*

Preuve: Ceci résulte des résultats de [Eys04] modulo le fait que $\{f^* \tilde{\rho}\}$ est constructible absolu. Le cas présent est particulièrement simple et il est facile de décrire la réduction de Cartan-Remmert en termes de l'application des périodes.

Notons que $f^* \tilde{\rho}$ est sous jacent à une VSH polarisable définie sur Z qui est $f^* \mathbb{V}_{\tilde{U}}$. Notons $\Gamma' = f^* \rho(\pi_1(Z, z))$. L'application des périodes attachée à $f^* \mathbb{V}_{\tilde{U}}$ se relève à une application Γ' -équivariante $\mathcal{P} : \tilde{Z}^\rho \rightarrow \mathcal{D}$. Comme Γ' agit proprement discontinûment sur \mathcal{D} puisque Γ' est discret, il suit que \mathcal{P} est propre. Considérons sa factorisation de Stein

$$\tilde{Z}^\rho \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} \mathcal{D},$$

où R est un espace complexe normal, α est propre surjective à fibres connexes, et β finie.

Comme il n'existe pas d'application holomorphe horizontale $M \rightarrow \mathcal{D}$ où M est compacte complexe ([Gri73]), les fibres de α sont les sous espaces analytiques

⁵ Ce qui, puisque $X = \mathbb{P}^{n+1}$ avec $n \geq 2$, implique que $H^0(\mathbb{P}^{n+1}, O(d')) \rightarrow O(d')/\mathcal{J}_\Sigma$ est surjectif pour $d' \geq d-(n+2)$ et donc que les résultats de de la section 2 s'appliquent en posant $d' = d$.

connexes fermés maximaux de \widetilde{Z}^ρ et donc que R n'a pas de sous-espace complexe analytique compact de dimension positive.

Pour montrer que R est de Stein, on utilise la solution de Narasimhan du problème de Levi. On peut construire des fonctions C^∞ positives et exhaustives sur \mathcal{D} dont le hessien complexe est défini positif le long de la distribution horizontale de \mathcal{D} et il est aisé de les modifier pour construire une fonction d'exhaustion strictement plurisousharmonique sur R , voir [Eys04] pour plus de détails.

□

Corollaire 5.1.2. \widetilde{Z}^{un} est de Stein si l'application \mathcal{P} est finie.

Preuve: En effet $\widetilde{Z}^\rho \simeq R$ est de Stein et tout revêtement topologique d'une variété de Stein est Stein.

□

La discussion peut être résumée ainsi : si $f : Z \rightarrow \widetilde{U}$ est finie, le revêtement universel de Z est de Stein sauf si Z contient une courbe C telle que \mathbb{V}_C a monodromie finie.

Notons $m : \widetilde{U} \rightarrow U$ resp. $m' : [\Gamma \backslash \mathcal{D}] \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}$ les applications canoniques vers les espace des modules des champs considérés. Notons qu'il existe une application holomorphe $p_{red} : U \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}$. Il est clair que, si $f : Z \rightarrow \widetilde{U}$ est finie, \mathcal{P} est finie si et seulement si p_{red} est finie sur $Z_r := m \circ f(Z)$.

Proposition 5.1.3. Si $f : Z \rightarrow \widetilde{U}$ est finie et si Z_r est un espace projectif ou plus généralement a la propriété que toute application holomorphe $Z_r \rightarrow M$ (avec M un espace complexe) est constante ou finie, \widetilde{Z}^{un} est de Stein.

5.2. **Cas où $X = \mathbb{P}^{n+1}$.** Le corollaire 3 résulte du théorème 1 car celui-ci implique que l'application des périodes $p \circ f : Z \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{D}$ est finie sur son image. En effet, par le théorème 1, une courbe $C \subset Z$ contractée par $p \circ f$ est nécessairement dans une orbite de $PGL(n+2)$. Or celles-ci sont affines car le groupe des automorphismes birationnels d'une variété de type général est fini et on déduit qu'elles ne peuvent pas contenir de courbe complète. Ceci implique que P est finie et le corollaire 5.1.2 permet de conclure.

RÉFÉRENCES

- [Art74] M. Artin *Algebraic construction of Brieskorn's resolutions* Journ. of Alg. **29** (1974), 330-348.
- [Bea86] A. Beauville *Le groupe de monodromie des familles universelles d'hypersurfaces et d'intersections complètes.* in *Complex analysis and Algebraic Geometry* Lect. Notes in Math. **1194** (1986), 8-18.
- [Bri70] E. Brieskorn *Singular elements of semi-simple algebraic groups* Actes, Congrès inter. Math. **2** (1970), 279-284.
- [BuWa74] D.M. Burns, J.M. Wahl *Local contributions to global deformations of surfaces*, Inv. Math. **26** (1974), 67-88.
- [CaTo99] J. Carlson, D. Toledo, *Discriminant complements and kernels of monodromy representations* Duke Math. J. **97** (1999), 621-648.
- [Del71-75] P. Deligne, *Théorie de Hodge, II*, Publ. Math. IHES **40** (1971), 5-58; *Théorie de Hodge, III*, Publ. Math. IHES **44** (1975), 6-77.
- [DeDi90] P. Deligne, A. Dimca *Filtration de Hodge et par l'ordre du pôle pour les hypersurfaces singulières*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **23** (1990), 645-656.
- [Di92] A. Dimca, *Singularities and Topology of Hypersurfaces*, Springer, 1992.

- [Dim12] A. Dimca *Syzygies of Jacobian ideals and defects of linear systems* arxiv :1210.1795.
- [DimSa06] A. Dimca, M. Saito *A generalization of Griffiths' theorem on rational integrals*, Duke Math. J. **135** (2006), 303–326.
- [DimSa12] A. Dimca, M. Saito *Graded duality of Koszul complexes associated with certain homogeneous polynomials*, arxiv :1212.1081.
- [DiSaWo09] A. Dimca, M. Saito, L. Wotzlaw *A generalization of Griffiths' theorem on rational integrals, II*, Michigan Math. J. **58** (2009), 603–625.
- [DimSt11] A. Dimca, G. Sticlaru *Koszul complexes and pole order filtrations*, arxiv :1108.3976v3.
- [Eys97] P. Eyssidieux *La caractéristique d'Euler du complexe de Gauss-Manin*, J. reine angew. Math **490** (1997), 155–212.
- [Eys04] P. Eyssidieux, *Sur la convexité holomorphe des revêtements linéaires réductifs d'une variété projective algébrique complexe*, Inv. Math. **156** (2004), 503–564.
- [Eys11] P. Eyssidieux *Lectures on the Shafarevich Conjecture on uniformization* dans *Uniformisation des variétés complexes*, M. Brunella, S. Dumitrescu, L. Meersseman, A. Glutsyuk, M. Nicolau, éditeurs. Panoramas et Synthèses **34-35**, Société Mathématique de France (2013), 101–148 (à paraître).
- [Gri69] P. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals, I, II* Annals of Math. **90** (1969), 460–541.
- [Gri73] P. Griffiths, *Periods of integrals on algebraic varieties, III*, Publ. Math. IHES **43** (1973), 125–180.
- [Kap70] I. Kaplansky *Commutative Rings*, 2nd ed., The University of Chicago Press (1974).
- [KoMo98] J. Kollár, S. Mori *Birational geometry of algebraic varieties* Cambridge Tracts in Math. **136** Cambridge Univ. Press (1998).
- [Loo84] E. Looijenga *Isolated singular points in complete intersection singularities* London Math. Soc. Lecture Notes Series **77** Cambridge University Press (1984).
- [Mé12] D. Mégy *Sections hyperplanes à singularités simples et exemples de Variations de Structure de Hodge*, Math. Ann. **353** (2012), pp 633–661
- [Noo04] B. Noohi *Fundamental groups of algebraic stacks* Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu **3** (2004), 69–103.
- [Noo05] B. Noohi *Foundations of topological stacks* Arxiv math/0503247 (2005).
- [Saito88] M. Saito *Modules de Hodge Polariables* Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto **24** (1988), 849–995.
- [Saito90] M. Saito *Mixed Hodge Modules* Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto **26**, 221–333.
- [Saito09] M. Saito *On the Hodge filtration of Hodge Modules* Moscow Math. J. **9** (2009), 151–181.
- [Sim93] C. Simpson *Some Families of Local Systems Over Smooth Projective Varieties* Annals of Math. **138** (1993), 337–425 .
- [Ste76] J. Steenbrink *Limits of Hodge Structures* Inv. Math. **31** (1976), 229–257.
- [Voi02] C. Voisin *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe* Cours Spécialisés **10**, Soc. Math. Fr. (2002).

Philippe Eyssidieux

Institut Universitaire de France. Université Grenoble I. Institut Fourier. 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France
 philippe.eyssidieux@ujf-grenoble.fr <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eyssi/>

Damien Mégy

Université de Lorraine. Institut Élie Cartan. B.P. 70239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France.
 Damien.Megy@univ-lorraine.fr <http://www.iecn.u-nancy.fr/~megy/>