

Approximation normale de la probabilité de défaillance d'un système

Yunhui Hou, Nikolaos Limnios et Walter Schön
 Université de Technologie de Compiègne
 Compiègne, France

Résumé—Dans cet article nous allons estimer la fiabilité d'un système binaire et obtenir son intervalle de confiance par l'approximation normale asymptotique. Cette méthode peut s'appliquer aux systèmes complexes et de grande taille réduisant la largeur de l'intervalle de confiance.

I. INTRODUCTION

Sachant les données sur la fiabilité des composants d'un grand système complexe, l'estimation de la fiabilité du système est souvent compliquée, notamment en précisant l'incertitude[1]. Nous proposons une approche sous hypothèse asymptotique qui produit l'estimation et son intervalle de confiance directement à partir des estimateurs de chaque composant du système. Nous sommes intéressés par l'estimation de la fiabilité des systèmes de grande taille. Pour cela, nous allons approcher la fiabilité d'un système par une loi normale qui nous permettra d'obtenir des intervalles de confiance. La variance de la loi normale est calculée de manière exacte mais aussi avec le calcul de borne. Les résultats numériques sont obtenus et on compare ensuite les différents cas.

II. MODÉLISATION

Considérons un système binaire avec d composants binaires indépendants $\{c_1, \dots, c_d\}$. Soit $x_i \in \{1, 0\}$, une variable représentant l'état de fonctionnement du composant c_i [2] :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le composant } c_i \text{ est en bon état} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En plus, nous définissons la fonction de structure : $\varphi : \{0, 1\}^d \rightarrow \{0, 1\}$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si le système est en bon état} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $x = (x_1, \dots, x_d) \in \{0, 1\}^d$, un vecteur décrivant conjointement les états binaires des composants du système.

Maintenant, on définit les variables aléatoires indépendantes $X_i, i = 1, \dots, d$ et le vecteur correspondant $X = (X_1, \dots, X_d)$ tels que

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le composant } c_i \text{ est en bon état} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Supposons que X_i suit une loi de Bernoulli $B(p_i)$ dont le paramètre p_i est la fiabilité du composant c_i . Alors la fiabilité du système p_s peut s'écrire en fonction de $p = (p_1, \dots, p_d)$:

$$p_s = \mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{P}(\varphi(X) = 1)$$

$$\begin{aligned} &= \varphi(\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_d)) \\ &= \varphi(p_1, \dots, p_d) \\ &= \varphi(p) \end{aligned}$$

III. HYPOTHÈSE ET ESTIMATION

Soient $\hat{p}_{i,n}$ et $\hat{\sigma}_{i,n}^2$ sont respectivement l'estimateur fortement convergent de la fiabilité p_i (par exemple la moyenne empirique) et celui de la variance σ_i^2 , à partir de n échantillons $(X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$ pour chaque composant du système de $X_i, i = 1, \dots, d$, i.e.,

$$\hat{p}_{i,n} \xrightarrow{p.s.} p_i, n \rightarrow \infty, i = 1, \dots, d \quad (1)$$

L'autre hypothèse est l'approche normale asymptotique de l'estimateur, i.e.,

$$\sqrt{n}(\hat{p}_{i,n} - p_i) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma_i^2), n \rightarrow \infty, i = 1, \dots, d \quad (2)$$

Nous obtenons alors l'estimateur de la fiabilité du système du type "plug-in"

$$\hat{p}_{s,n} = \varphi(\hat{p}_{1,n}, \dots, \hat{p}_{d,n}) \quad (3)$$

Sous les hypothèses ci-dessus, l'estimateur $\hat{p}_{s,n}$ possède les propriétés suivantes :

1) Convergence :

$$\hat{p}_{s,n} \xrightarrow{p.s.} p_s, n \rightarrow \infty \quad (4)$$

2) Normalité asymptotique :

$$\sqrt{n}(\hat{p}_{s,n} - p_s) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma_s^2), n \rightarrow \infty \quad (5)$$

où la variance de la fiabilité du système est donnée par

$$\sigma_s^2 = \sum_{i=1}^d [\varphi(p, 1_i) - \varphi(p, 0_i)]^2 \sigma_i^2 \quad (6)$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi(p, 1_i) &= \varphi(p_1, \dots, p_{i-1}, 1, p_{i+1}, \dots, p_d) \\ \varphi(p, 0_i) &= \varphi(p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_d) \end{aligned}$$

On propose l'estimateur de σ_s^2 du type "plug-in" :

$$\hat{\sigma}_{s,n}^2 = \sum_{i=1}^d [\varphi(\hat{p}_n, 1_i) - \varphi(\hat{p}_n, 0_i)]^2 \hat{\sigma}_{i,n}^2 \quad (7)$$

où $\hat{p}_n = (\hat{p}_{1,n}, \dots, \hat{p}_{d,n})$.
Comme $\varphi(x) \in [0, 1]$, on a

$$\hat{\sigma}_{s,n}^2 \leq \sum_{i=1}^d \hat{\sigma}_{i,n}^2 \quad (8)$$

La variance du système estimée est alors bornée et dépend de la précision de données des échantillons élémentaires. D'après l'équation (5), on peut donner un intervalle de confiance au niveau α :

$$\hat{p}_{s,n} - \frac{\hat{\sigma}_{s,n}}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq p_s \leq \hat{p}_{s,n} + \frac{\hat{\sigma}_{s,n}}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \quad (9)$$

IV. EXEMPLE

On applique notre méthode à un système de 15 composants (Figure 1) dont $p_i = 0,9$ pour tous les composants.

Nous avons réalisé des échantillons à l'aide de la simulation Monte-Carlo. Les deux estimateurs $\hat{p}_{i,n}$ et $\hat{\sigma}_{i,n}^2$ choisis pour chaque composant c_i sont des estimateurs empiriques sans biais.

$$\hat{p}_{i,n} = \frac{X_{i,1} + \dots + X_{i,n}}{n}, i = 1, \dots, d$$

$$\hat{\sigma}_{i,n}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{i,j} - \hat{p}_{i,n})^2, i = 1, \dots, d$$

En suite, on a calculé $\hat{p}_{s,n}$ et $\hat{\sigma}_{s,n}^2$ et l'intervalle de confiance avec un taux de confiance $\alpha = 0,05$.

On observe que les valeurs de $\hat{p}_{s,n}$ et $\hat{\sigma}_{s,n}^2$ (Table I) restent stables après un nombre d'échantillons suffisant ($n = 5000$). Ceci correspond bien au théorème de convergence (5). La taille de l'intervalle de confiance ne diminue que lorsque n augmente car les autres éléments de l'équation (9) convergent rapidement.

Quand le système est complexe et s'agrandit, la fonction de structure devient beaucoup plus difficile à calculer. Afin d'obtenir l'estimation de la variance σ_s^2 , il faut calculer $2d$ fois $\varphi(x)$ qui nous ajoute à la difficulté évidente sur la complexité de l'algorithme. Cependant $\hat{\sigma}_{s,n}^2$ est borné, nous espérons que les résultats des grands systèmes ont des intervalles de confiance de taille suffisamment petite partant directement de la somme des variances des composants. Pour l'exemple précédent (Table II), il existe un écart non négligeable entre la valeur de l'estimateur de variance et celle de sa borne supérieure $\sum_{i=1}^d \hat{\sigma}_{i,n}^2$. Mais cette situation est améliorée dans le cas du calcul des intervalles de confiance avec un grand n .

V. CONCLUSION

L'approximation normale asymptotique sur la fiabilité de système complexe de grande taille nous permet de calculer de manière plus facile l'intervalle de confiance pour traiter l'incertitude des données initiales. Un des inconvénients de la méthode proposée est la grande complexité de la fonction de structure lors de l'estimation de la variance. Un calcul intéressant et peu coûteux est le calcul de borne (8).

RÉFÉRENCES

- [1] Pagès, A., Gondran, M.,(1980) *Fiabilité des systèmes*, Eyrolles, Paris.
- [2] Limnios, N.,(2007) *Fault Trees*, iSTE Ltd, London

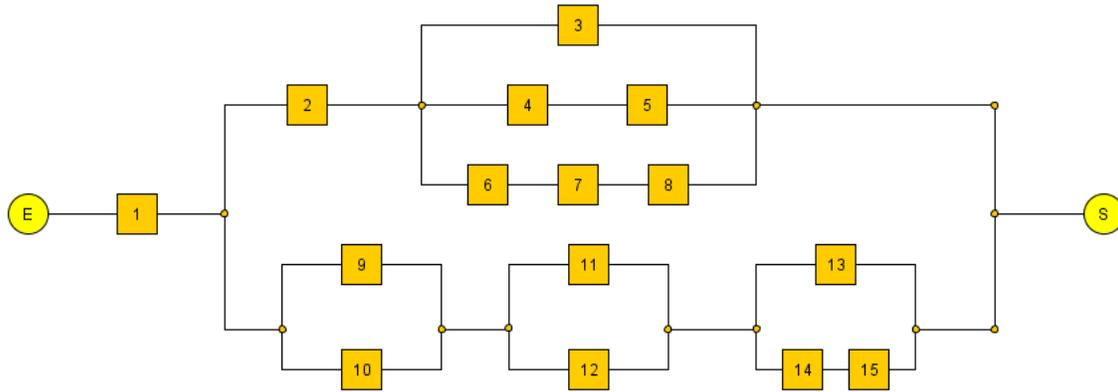


FIGURE 1. Système de 15 composants pour l'exemple

n	$\hat{p}_{s,n}$	$\hat{\sigma}_{s,n}^2$	Borne inférieur	Borne supérieur	Sup-Inf
50	0.855223563279791	0.121788973326934	0.758492252335503	0.95195487422408	0.193462621888577
100	0.897219459778006	0.0904663170575553	0.838268409606151	0.956170509949861	0.11790210034371
200	0.886616421647764	0.0978074880859762	0.843273403880319	0.929959439415209	0.0866860355348897
500	0.884780929990285	0.0990819867839558	0.857190374645996	0.912371485334574	0.0551811106885771
1000	0.889088622526981	0.0950102083200674	0.869984230288359	0.908193014765603	0.0382087844772434
2000	0.900237697412159	0.0862987503039333	0.88736304993019	0.913112344894128	0.0257492949639373
5000	0.900389474781223	0.0862867427857423	0.892247399257337	0.908531550305108	0.0162841510477705
50000	0.895910019808279	0.0898743135854044	0.893282288944296	0.898537750672262	0.00525546172796632

TABLE I

RÉSULTATS DE L'EXEMPLE AVEC $p_i = 0,9$ ET $\alpha = 0,05$ AVEC $\hat{\sigma}_{s,n}^2$ EXACTE. VALEURS THÉORIQUES : $p_s = 0,8963724$; $\sigma_s^2 = 0.08945361$

n	$\hat{p}_{s,n}$	$\sum_{i=1}^d \hat{\sigma}_{i,n}^2$	Borne inférieur	Borne supérieur	Sup-Inf
50	0.855223563279791	1.42367346938776	0.524497604009347	1	0.475502395990653
100	0.897219459778006	1.46727272727273	0.659806996740664	1	0.340193003259336
200	0.886616421647764	1.33113065326633	0.726718272979834	1	0.273281727020166
500	0.884780929990285	1.37042084168337	0.782170840521972	0.987391019458598	0.205220178936627
1000	0.889088622526981	1.37603303303303	0.816383916817438	0.961793328236524	0.145409411419086
2000	0.900237697412159	1.36882916458229	0.848962455490214	0.951512939334104	0.10255048384389
5000	0.900389474781223	1.34655427085417	0.868225106976722	0.932553842585724	0.0643287356090019
50000	0.895910019808279	1.34584962579252	0.885741415266525	0.906078624350032	0.020337209083507

TABLE II

RÉSULTATS DE L'EXEMPLE AVEC $p_i = 0,9$ ET $\alpha = 0,05$ AVEC BORNE SUPÉRIEURE DE $\hat{\sigma}_{s,n}^2$. VALEURS THÉORIQUES : $p_s = 0,8963724$; $\sum_{i=1}^d \sigma_i^2 = 1,35$