

Evaluation probabiliste de la fiabilité de l'observabilité structurelle des systèmes bilinéaires : Approche graphique

Manal Dakil, Christophe Simon et Taha Boukhobza

Université de Lorraine, Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039, Vandoeuvre-lès-Nancy, F-54506, France

CNRS, Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039, Vandoeuvre-lès-Nancy, F-54506, France

Email: {manal.dakil, christophe.simon, taha.boukhobza}@cran.univ-lorraine.fr

Résumé—Dans cet article, nous traitons de la fiabilité de l'observabilité structurelle des systèmes bilinéaires en utilisant une approche graphique. L'observabilité est une propriété nécessaire pour la commande, la supervision et le diagnostic des systèmes étudiés. Cette propriété peut être vérifiée graphiquement. Contrairement aux travaux usuels, notre étude se base sur les arcs des graphes représentant le système étudié. En mettant en relation l'état de validation des arcs avec l'état de fonctionnement des composants du système, il est possible d'exprimer la validité de l'observabilité sous forme d'équation booléenne. Cette expression booléenne nous permet de calculer la fiabilité de la propriété à partir de la fiabilité des composants du système. L'approche graphique ne considérant que la connaissance de la structure du système, l'étude peut alors s'effectuer dès la phase de conception du système.

Mots-clés: Observabilité structurelle, fiabilité, système bilinéaire, approche graphique.

I. INTRODUCTION

La classe des systèmes bilinéaires, représentant les systèmes non-linéaires dont la dynamique est conjointement linéaire pour les variables d'état et d'entrée, a été introduite dans l'automatique au cours des années 60. Dans [4], [5] et [13], les systèmes bilinéaires sont étudiés de manière géométrique et algébrique et les conditions nécessaires et suffisantes de l'observabilité ont été définies. Ces conditions requièrent la connaissance des valeurs numériques des paramètres du système. Or, ces valeurs ne sont pas toujours disponibles, notamment dans les phases amont du cycle de vie du système. Il s'est avéré que les propriétés les plus importantes dépendent de ce qu'on appelle "structure" du système plus que les valeurs de ses paramètres internes [12]. Une représentation générique appelée "modèle structurel" est alors proposée. Elle utilise des matrices contenant soit des éléments nuls fixes, soit des éléments non nuls symbolisés par des paramètres libres et supposés indépendants. Le modèle structurel peut

être représenté graphiquement. Lin [7] est le premier à aborder une propriété structurelle par approche graphique. Il s'agit de la commandabilité des systèmes linéaires. Depuis, plusieurs propriétés structurelles ont été étudiées par approche graphique. L'observabilité des systèmes bilinéaires par approche graphique a été traitée pour la première fois par Svaricek dans [11] ainsi que dans d'autres travaux comme [2] et [1].

Les travaux relatifs à l'étude de l'observabilité des SBLs fournissent les outils pour savoir si le système étudié satisfait ou non une propriété structurelle. En revanche, ils ne prennent pas en considération l'influence des défaillances de certains composants du système sur la validité d'une propriété structurelle.

Staroswiecki a étudié dans [10] l'observabilité structurelle par approche graphique en relation avec la fiabilité. Dans [8], les auteurs introduisent l'évaluation de la fiabilité d'une commandabilité structurelle pour un système linéaire qui est la propriété duale de l'observabilité. Toutefois, cette méthode est basée sur les sommets du graphe modélisant le système et considère que seuls les actionneurs peuvent tomber en panne et aucune défaillance des composants internes n'est considérée.

Le présent article traite de l'évaluation probabiliste de la fiabilité de l'observabilité structurelle des systèmes bilinéaires par une approche graphique. L'observabilité structurelle dépend bien évidemment de la structure du système qui elle-même dépend des composants du système. Dans cet article, les arcs des graphes modélisant le système sont liés par une fonction supposée connue aux composants internes ainsi qu'aux composants externes (capteurs et actionneurs) contrairement à d'autres travaux qui ne considèrent que les composants externes et représentent les défaillances par la disparition des sommets correspondants dans la représentation graphique (voir [8]). La validité de l'observabilité des systèmes bilinéaires est vérifiée à partir des conditions graphiques nécessaires et suffisantes, qui à leur tour dépendent de l'état (valide/invalidé) des arcs correspondants. Il s'agit donc d'exprimer la validité de l'observabilité structurelle des SBLs

sous forme d'une équation booléenne fonction de l'état de validité des arcs. L'expression obtenue sera utilisée pour calculer la fiabilité de l'observabilité connaissant la fiabilité des composants du système bilinéaire étudié.

La section II fournit l'énoncé du problème de l'observabilité des systèmes bilinéaires. La section III est consacrée à la représentation graphique des systèmes bilinéaires ainsi que les définitions et notations utiles pour la suite de l'article. Dans la section IV, nous présentons la méthode développée pour calculer la fiabilité de l'observabilité du système. Pour illustrer l'approche proposée, la Section V est dédiée à une étude de cas.

II. ENONCÉ DU PROBLÈME

Dans cet article nous considérons un SBLS de la forme suivante:

$$\Sigma_{\Lambda} : \begin{cases} \dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^m u_i A_i x \\ y = C_0 x + \sum_{i=1}^m u_i C_i x \end{cases} \quad (1)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ et $y = (y_1, \dots, y_p)^T \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. Pour $i = 0, \dots, m$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sont des matrices de dimensions appropriées. Elles ne contiennent que des paramètres nuls et des paramètres libres notés $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ et supposés indépendants.

L'observabilité des SBLS est vérifiable graphiquement. Elle nécessite des conditions nécessaires et suffisantes. La méthode proposée est basée sur les arcs des graphes représentant le système étudié. Ces arcs sont liés aux composants internes et externes du système. L'objet de cet article est d'exprimer la condition d'observabilité sous forme d'une expression booléenne, basée sur les composants du système, qui est "vrai" quand l'observabilité est vérifiée et "faux" dans le cas contraire. En se basant sur cette expression booléenne, nous pouvons calculer la fiabilité de l'observabilité pour le SBLS étudié sachant la fiabilité de ses composants.

III. REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DES SBLS

A. Graphe orienté et graphe biparti pour les SBLS

Cette section est consacrée aux représentations graphiques des SBLS Σ_{Λ} ayant la forme donnée par l'équation (1). Le graphe orienté est noté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Il est constitué d'un ensemble de sommets \mathcal{V} et d'un ensemble d'arcs \mathcal{E} . Plus précisément, l'ensemble des sommets est défini par $\mathcal{V} = X \cup Y$, avec $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ est l'ensemble des sommets associés aux composantes de l'état et $Y = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ est l'ensemble des sommets associés aux composantes de la sortie. L'ensemble des arcs est $\mathcal{E} = \bigcup_{i=0}^m A_i\text{-arcs} \cup \bigcup_{i=0}^m C_i\text{-arcs}$ avec pour

$i = 0, \dots, m$, $A_i\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_\ell) | A_i(\ell, j) \neq 0\}$ et $C_i\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_\ell) | C_i(\ell, j) \neq 0\}$.

La notation $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_\ell)$ indique un arc orienté du sommet $\mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vers le sommet $\mathbf{v}_\ell \in \mathcal{V}$. Notons que u_i est un indice associé à chaque A_i -arc pour $i = 0, \dots, m$ afin de préserver l'information sur l'appartenance des arcs à une matrice A_i dans le graphe de représentation. Les indices u_i sont associés aux entrées du système et représentent ses actionneurs. Dans la suite de l'article, nous utilisons pour les arcs appartenant aux graphes orientés la même notation que dans [6] : l'arc $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_\ell)$ ayant l'indice u_i est noté $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_\ell)_{u_i}$.

Le graphe biparti est noté $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$, c'est un type spécifique de graphe orienté. Il est composé de deux ensembles de sommets disjoints : $V^+ = X^+$ et $V^- = X^- \cup Y^-$ connectés par un ensemble d'arcs $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$. L'ensemble V^+ contient tous les sommets de X ayant des arcs sortants dans $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et l'ensemble V^- contient les sommets de X dans $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où chaque sommet $\mathbf{x}_h \in X$ est éclaté en i sommets notés $\mathbf{x}_{h,i}$ pour $i = 1, \dots, r$ avec r le nombre d'indices u_i associés aux arcs entrant dans \mathbf{x}_h , et les éléments de Y ayant des arcs entrants dans $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Les arcs $(\mathbf{v}_k^+, \mathbf{v}_\ell^-)$ appartenant aux graphes bipartis et ayant l'indice u_i sont notés $(\mathbf{v}_k^+, \mathbf{v}_\ell^-)_{u_i}$.

Illustrons la représentation graphique proposée à l'aide d'un exemple simple.

Exemple 1: Considérons le SBLS ayant la forme donnée par l'équation (1) et défini par:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & \lambda_8 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_9 & \lambda_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} \end{pmatrix}.$$

ou par le modèle d'état suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_6 u_2 x_1 & ; & y_1 = \lambda_9 x_3 + \lambda_{10} x_4 \\ \dot{x}_2 = 0 & ; & y_2 = \lambda_{11} x_5 \\ \dot{x}_3 = \lambda_2 x_1 \\ \dot{x}_4 = \lambda_4 u_1 x_2 + \lambda_7 u_2 x_2 \\ \dot{x}_5 = \lambda_3 x_2 + \lambda_5 u_1 x_2 + \lambda_8 u_1 x_4 \end{cases} \quad (2)$$

Ce système est associé à la représentation graphique de la figure (1).

Les relations entre les variables du modèle d'état sont représentées par des arcs et chaque arc appartenant à la matrice A_i est associé à un indice u_i . Par exemple, l'équation $\dot{x}_5 = \lambda_3 x_2 + \lambda_5 u_1 x_2 + \lambda_8 u_1 x_4$ est représentée dans le graphe orienté par les arcs $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_5)_{u_0}$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_5)_{u_1}$, et $(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5)_{u_1}$. Nous procédons de la même façon avec les arcs associés aux matrices C_i .

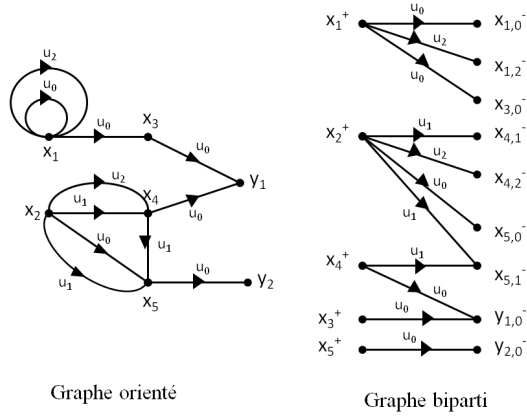


Figure 1. Représentation graphique associée à l'exemple 1

B. Définitions et notations

- Dans le graphe orienté, deux arcs $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{u_h}$ et $(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_t)_{u_\ell}$ sont dits disjoints si: $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_k$ et $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{v}_t$.
- Dans le graphe orienté, k arcs sont disjoints s'ils sont mutuellement disjoints.
- Un chemin p qui couvre les sommets $\mathbf{v}_{r_0}, \dots, \mathbf{v}_{r_i}$ est noté $p = \mathbf{v}_{r_0} \rightarrow \mathbf{v}_{r_1}, \dots, \rightarrow \mathbf{v}_{r_i}$ où pour $j = 0, 1, \dots, i-1$, $(\mathbf{v}_{r_j}, \mathbf{v}_{r_{j+1}}) \in \mathcal{E}$.
- Soient \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 deux sous-ensembles de sommets de \mathcal{V} . Un chemin p est dit "chemin $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ " si son sommet de début est dans \mathcal{V}_1 et son sommet de fin est dans \mathcal{V}_2 . De plus, si les seuls sommets de p appartenant à $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ sont ses sommets de début et de fin, alors p est dit "chemin direct $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$ ".
- Dans un graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, deux sommets \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j sont dit fortement connectés si il existe un chemin de \mathbf{v}_i à \mathbf{v}_j et un chemin de \mathbf{v}_j à \mathbf{v}_i . La relation "est fortement connecté à" est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence de cette relation est dite "composante fortement connexe" de $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ [9] et noté $Cl(\mathbf{v}_i)$.
- $Succ(\mathbf{v}_i)$ est l'ensemble de successeurs de \mathbf{v}_i , i.e. il existe un sommet \mathbf{v}_j tel qu'il y a un chemin $\{\mathbf{v}_i\} - \{\mathbf{v}_j\}$.
- $Pred(\mathcal{V}_1)$ est l'ensemble de prédécesseurs de $\forall \mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_1$, i.e. pour tout sommet $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_1$ il existe un chemin $\{\mathbf{v}_i\} - \{\mathbf{v}_j\}$.
- Dans un graphe biparti, $\theta(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ est le nombre maximal d'arcs disjoints dont les sommets de début sont dans \mathcal{V}_1 et les sommets de fin dans \mathcal{V}_2 .

Cette fonction est utilisée seulement pour les graphes bipartis.

- Un couplage dans un graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$ est un ensemble d'arcs $\mathcal{E}_M \subseteq \mathcal{E}_B$ tels que tous les arcs de \mathcal{E}_M sont disjoints. Un couplage est dit complet si sa cardinalité est maximale et égale à $\theta(X^+, X^- \cup Y^-) = card(X^+)$ pour le problème d'observabilité.
- Considérons un couplage complet $\mathcal{E}_M \subseteq \mathcal{E}_B$. Chaque couplage complet \mathcal{E}_M est associé à un graphe biparti non orienté noté $\mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}}_B)$ où $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \overline{\mathcal{E}}_B \Leftrightarrow$

$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) \in \mathcal{E}_B$ or $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) \in \mathcal{E}_M$. Notons par S_0^+ (resp. S_0^-) l'ensemble des sommets dans V^+ (resp. dans V^-) non couvert par les arcs appartenant à \mathcal{E}_M .

- Le graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$ peut être décomposé en composantes irréductibles et uniques partiellement ordonnés en utilisant la décomposition Dulmage-Mendelsohn [3], [9] décrite comme suit:

- ▷ Trouver un couplage complet dans $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$.
- ▷ Soit $V_0^+ = S_0^+ \cup \{\mathbf{v}^+ \in V^+ | \exists \text{ un chemin dans } \mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}}_B) \text{ de } S_0^+ \text{ vers } \mathbf{v}^+\}$
- ▷ $V_0^- = \{\mathbf{v}^- \in V^- | \exists \text{ un chemin dans } \mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}}_B) \text{ de } S_0^+ \text{ vers } \mathbf{v}^-\}$
- ▷ $V_0 = V_0^- \cup V_0^+$ (La partie sous déterminée)
- ▷ Let $V_\infty^+ = \{\mathbf{v}^+ \in V^+ | \exists \text{ un chemin dans } \mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}}_B) \text{ de } \mathbf{v}^+ \text{ vers } S_0^+\}$
- ▷ $V_\infty^- = S_0^- \cup \{\mathbf{v}^- \in V^- | \exists \text{ un chemin dans } \mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}}_B) \text{ de } \mathbf{v}^- \text{ vers } S_0^+\}$
- ▷ $V_\infty = V_\infty^+ \cup V_\infty^-$ (La partie surdéterminée)
- ▷ Pour $i = 1, \dots, r$, soit V_i les composantes fortement connexes du graphe obtenu de $\mathcal{B}_M(V^+, V^-, \overline{\mathcal{E}}_B)$ après l'élimination des sommets de V_0 et V_∞ .
L'union des composantes fortement connexes V_i forme la partie exactement déterminée.
- ▷ Pour $i = 1, \dots, r$, $V_i^+ = V^+ \cap V_i$ et $V_i^- = V^- \cap V_i$ où r est le nombre de composantes fortement connexes.

Il est important de noter que les sous-ensembles obtenus V_i^+ et V_i^- pour $i = 0, \dots, r, \infty$ sont les mêmes quelque soit le couplage complet \mathcal{E}_M choisi. Définissons \mathcal{E}^* l'ensemble d'arcs $(\mathbf{v}_k^+, \mathbf{v}_l^-)_{u_h}$ appartenant à la même composante fortement connexe où pour $i = 1, \dots, r$, $\mathbf{v}_k^+ \in V_i^+$ et $\mathbf{v}_l^- \in V_i^-$, i.e. \mathcal{E}^* est obtenu en éliminant de \mathcal{E}_B les arcs qui lient les différentes composantes DM.

- $\varphi_O : \mathcal{E}_\varphi \rightarrow \mathcal{F}(C)$ est une fonction définie de \mathcal{E}_φ dans $\mathcal{F}(C)$ où \mathcal{E}_φ est un ensemble d'états de validation des arcs $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{u_h}$ dans un graphe orienté \mathcal{G} et $\mathcal{F}(C)$ est un ensemble d'expressions booléennes basées sur les événements sur les composants du système étudié.
- $\varphi_B : \mathcal{E}_\varphi \rightarrow \mathcal{F}(C)$ est une fonction définie de \mathcal{E}_φ dans $\mathcal{F}(C)$ où \mathcal{E}_φ est un ensemble d'états de validation des arcs $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)_{u_h}$ dans un graphe biparti \mathcal{B} et $\mathcal{F}(C)$ est un ensemble d'expressions booléennes basées sur les événements sur les composants du système étudié.

Les deux expressions $\varphi_O((\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{u_h})$ et $\varphi_B((\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)_{u_h})$ sont équivalentes. Par exemple $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{u_h}$ (resp. $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)_{u_h}$) $\rightarrow \overline{C}_1 \wedge (\overline{C}_2 \vee \overline{C}_3) \wedge \overline{C}_{u_h}$ i.e. l'arc $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{u_h}$ (resp. $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)_{u_h}$) est valide quand ni c_1 ni c_{u_h} ni l'un des deux composants c_2 ou c_3 ne sont défaillants. Ces deux fonctions φ_O et φ_B sont utiles pour associer à chaque état d'arc dans une expression booléenne une autre expression basée sur les événements sur les composants du système étudié. Dans certains cas,

aucun événement sur les composants n'est affecté à un état d'arc (par exemple dans le cas de la dérivation, l'arc est toujours valide et $\varphi_O(arc) = 1$ ou $\varphi_B(arc) = 1$).

IV. PRINCIPAUX RÉSULTATS

Dans [1], les auteurs fournissent les deux conditions graphiques nécessaires et suffisantes pour vérifier l'observabilité d'un système bilinéaire. La première condition est une condition de connectivité et la deuxième est une condition de couplage complet.

A. Condition de connectivité

La condition de connectivité consiste à ce que tous les sommets $\mathbf{x}_i \in X$ dans le graphe orienté $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ soient connectés à au moins un sommet de Y par un chemin valide. La condition de connectivité entre l'ensemble X et l'ensemble Y est notée $CC(X, Y)$ et la condition de connectivité du sommet $\mathbf{x}_i \in X$ à Y est notée $Con(\mathbf{x}_i)$. \wedge (resp. \vee) représente l'opérateur logique "ET"(resp. "OU"). L'expression booléenne $CC(X, Y)$ s'écrit alors:

$$CC(X, Y) = \bigwedge_{\mathbf{x}_i \in X} Con(\mathbf{x}_i) \quad (3)$$

où $Con(\mathbf{x}_i)$ caractérise les possibilités de connectivité du sommet \mathbf{x}_i vers Y soit par une connectivité directe notée $Con_d(\mathbf{x}_i)$ soit à travers un sommet de la classe $Cl(\mathbf{x}_i)$.

$$Con(\mathbf{x}_i) = Con_d(\mathbf{x}_i) \vee \left(\bigvee_{\mathbf{x}_j \in Cl(\mathbf{x}_i) \setminus \{\mathbf{x}_i\}} \left(\bigvee_{p_j \in \text{chemins direct } \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j} \left(\bigwedge_{(\mathbf{x}_\ell, \mathbf{x}_k)_{u_r} \in p_j} (\mathbf{x}_\ell, \mathbf{x}_k)_{u_r} \right) \wedge Con_d(\mathbf{x}_j) \right) \right) \quad (4)$$

où $Con_d(\mathbf{x}_i)$ est la connectivité directe de \mathbf{x}_i vers Y sans passer par les sommets appartenant à $Cl(\mathbf{x}_i)$. $Con_d(\mathbf{x}_i)$ est donnée par l'équation suivante:

$$Con_d(\mathbf{x}_i) = \bigvee_{\mathbf{v}_t \in Succ_d(\mathbf{x}_i) \setminus Cl(\mathbf{x}_i)} (\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_t)_{u_r} \wedge Con(\mathbf{v}_t) \quad (5)$$

\mathbf{v}_t est un élément de l'ensemble \mathcal{V} , il peut être soit un élément $\mathbf{y}_t \in Y$ soit un élément $\mathbf{x}_t \in X$. $Con(\mathbf{x}_i) = 0$ ainsi que $Con_d(\mathbf{x}_i) = 0$ dans le cas où \mathbf{x}_i n'est pas un prédécesseur d'au moins un élément de Y i.e. $\mathbf{x}_i \notin Pred(Y)$.

Après avoir obtenu l'expression booléenne $CC(X, Y)$, nous pouvons appliquer la fonction φ_O sur chaque état d'arc de cette expression $CC(X, Y)$. Nous obtenons donc une expression booléenne basée sur les événements sur les composants du système notée $CC\varphi(X, Y)$.

B. Condition de couplage complet

La condition de couplage complet consiste à avoir n arcs disjoints dans le graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$ i.e. $\theta(X^+, X^- \cup Y^-) = card(X^+) = n$. La condition de couplage complet entre l'ensemble X^+ et l'ensemble $X^- \cup Y^-$ est noté $MC(X^+, X^- \cup Y^-)$.

Dans le graphe biparti $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$, \mathcal{E}^* est un ensemble d'arcs et ne contient que les arcs intra-classes après la DM décomposition de $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$. Seuls les arcs appartenant à \mathcal{E}^* peuvent être utilisés dans un couplage complet et donc $MC(X^+, X^- \cup Y^-)$ ne dépend que des arcs éléments de \mathcal{E}^* .

La condition de couplage complet peut donc s'écrire comme suit:

$$MC(X^+, X^- \cup Y^-) = Exp(X^+, \mathcal{E}^*) \quad (6)$$

Exp représente une expression booléenne. Son prototype $Exp(W, E)$ est donné par l'équation suivante:

$$Exp(W, E) = \bigvee_{(\mathbf{x}_i^+, \mathbf{v}_{i,r}^-) \in E} ((\mathbf{x}_i^+, \mathbf{v}_{i,r}^-) \wedge Exp(W \setminus \{\mathbf{x}_i^+\}, f(W \setminus \{\mathbf{x}_i^+\}, E \setminus \{(\mathbf{x}_i^+, \mathbf{v}_{k,h}^-) | \mathbf{v}_k^- \in Succ(\mathbf{x}_i^+)\} \cup \{(\mathbf{x}_\ell^+, \mathbf{v}_{\ell,r}^-) | \mathbf{x}_\ell^- \in Pred(\mathbf{v}_t^-)\})) \quad (7)$$

où W est un ensemble de sommets, E est un ensemble d'arcs et $f(W, E)$ est la fonction qui calcule la DM décomposition du graphe biparti $\mathcal{B}(X^+, X^- \cup Y^-, E)$ et qui retourne les ensembles d'arcs intra-classes. $\mathbf{v}_{k,h}^-$ et $\mathbf{v}_{i,r}^-$ sont des éléments de l'ensemble V^- , ils peuvent être soit des sommets de Y^- soit de X^- .

Quand l'ensemble W contient un seul sommet \mathbf{x}_i^+ , l'expression $Exp(W, E) = Exp(\{\mathbf{x}_i^+\}, E)$ est donnée par:

$$Exp(\{\mathbf{x}_i^+\}, E) = \bigvee_{(\mathbf{x}_i^+, \mathbf{v}_{i,r}^-) \in E} (\mathbf{x}_i^+, \mathbf{v}_{i,r}^-) \quad (8)$$

Après avoir obtenu l'expression booléenne $MC(X^+, X^- \cup Y^-)$, nous pouvons appliquer la fonction φ_B sur chaque état d'arc de cette expression $MC(X^+, X^- \cup Y^-)$. Nous obtenons donc une expression booléenne basée sur les événements sur les composants du système notée $MC\varphi(X^+, X^- \cup Y^-)$.

L'observabilité d'un système Σ_Λ nécessite la vérification des conditions de connectivité $CC\varphi(X, Y)$ et de couplage complet $MC\varphi(X^+, X^- \cup Y^-)$. La fiabilité de l'observabilité de Σ_Λ peut donc s'écrire comme suit:

$$Obs\varphi_{\Sigma_\Lambda} = CC\varphi(X, Y) \wedge MC\varphi(X^+, X^- \cup Y^-) \quad (9)$$

C. Fiabilité de l'observabilité d'un SBLs

La fiabilité est un paramètre important de la sûreté de fonctionnement utilisé pour l'étude des défaillances d'un système afin d'améliorer son fonctionnement. Elle est définie

par l'aptitude d'un système à rester opérationnel pendant un intervalle de temps donné $[0, T]$ et sous certaines conditions. La fiabilité noté $R(t)$ peut être exprimée par la probabilité P qu'une défaillance survienne après le temps de mission du système étudié, *i.e.* $R(t) = P(t > T)$.

Les propriétés structurelles ainsi que la fiabilité des systèmes dépendent de la structure du système et de ses composants. Dans cet article, la définition de fiabilité est étendue au maintien de la validité de l'observabilité structurelle d'un SBLs. Nous faisons l'hypothèse d'état binaire des composants et du système qui est une hypothèse classique de la fiabilité. Elle considère qu'un système ou un composant peut avoir deux états de fonctionnement possibles: l'état de bon fonctionnement "Up", et l'état de défaillance "Down". Ainsi, l'état de validité de l'observabilité peut être exprimé en fonction de l'état de fonctionnement de certains composants du système.

Pour un SBLs noté Σ_Λ ayant c_i composants (internes, capteurs ou actionneurs) pour $i = 1, \dots, N$, si les événements sur les composants c_i sont indépendants *i.e.* qu'ils peuvent tomber en panne indépendamment les uns des l'autres, alors la fiabilité $R_{\Sigma}(t)$ est donnée par l'Equation (10) avec C_i représente l'événement de défaillance sur le composant c_i . Afin de simplifier l'écriture, nous notons $R_{\Sigma}(t) = P_{\Sigma}(t > T) = P(\Sigma|t)$.

$$P(\Sigma|t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^N P(\overline{C}_i|t) & \text{for the relation } \wedge \\ 1 - \prod_{i=1}^N (1 - P(\overline{C}_i|t)) & \text{for the relation } \vee \end{cases} \quad (10)$$

Chaque composant c_i possède un taux de défaillance noté $\lambda_{c_i}(t)$ qui représente la limite du taux de la probabilité conditionnelle pour que l'instant T d'une défaillance soit compris dans un intervalle de temps donné $[t, t + \Delta t]$. Nous considérons dans cet article que $\lambda_{c_i}(t)$ suit une des deux lois suivantes : la loi exponentielle ou la loi de Weibull [6]. Quand le taux de défaillance est constant, la loi est exponentielle. Elle est donnée comme suit:

$$P(\overline{C}_i|t) = R_{c_i}(t) = e^{-\lambda_i t} \quad (11)$$

Quand le taux de défaillance est variable, la loi est de type Weibull. Elle est donnée par l'Equation (12) avec β le paramètre de forme, η le paramètre d'échelle et γ le décalage à l'origine.

$$P(\overline{C}_i|t) = R_i(t) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} & \text{If } t > \gamma \\ 0 & \text{If } t \leq \gamma \end{cases} \quad (12)$$

A partir des équations (9) et (10), nous pouvons calculer la fiabilité de l'observabilité d'un système Σ_Λ . Elle est notée $R_{Obs\varphi\Sigma_\Lambda}$.

V. ETUDE DE CAS

Considérons le SBLs noté Σ_1 et défini par son graphe orienté comme suit:

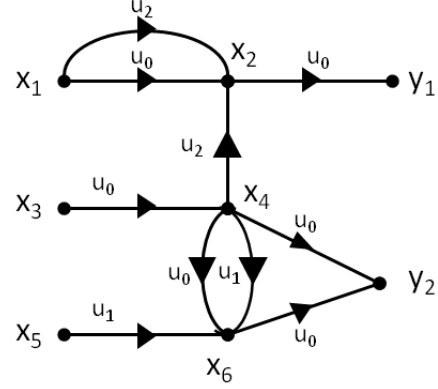


Figure 2. Graphe orienté du système Σ_1

Dans le raphe orienté de la Figure (2), chaque élément de $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ doit être connecté à au moins un élément de $Y = \{y_1, y_2\}$. Pour cet exemple, il n'y a aucune composante fortement connexe. Dans ce cas $Con(x_i) = Con_d(x_i)$. La connectivité de chaque élément $x_i \in X$ est donc donnée par :

- $Con(x_1) = Con_d(x_1) = ((x_1, x_2)_{u_0} \vee (x_1, x_2)_{u_2}) \wedge Con(x_2) = ((x_1, x_2)_{u_0} \vee (x_1, x_2)_{u_2}) \wedge (x_2, y_1)_{u_0}$;
- $Con(x_2) = Con_d(x_2) = (x_2, y_1)_{u_0}$;
- $Con(x_3) = Con_d(x_3) = (x_3, x_4)_{u_0} \wedge Con(x_4) = (x_3, x_4)_{u_0} \wedge ((x_4, y_2)_{u_0} \vee ((x_4, x_2)_{u_2} \wedge (x_2, y_1)_{u_0}) \vee ((x_4, x_6)_{u_0} \vee (x_4, x_6)_{u_1}) \wedge (x_6, y_2)_{u_0})$;
- $Con(x_4) = Con_d(x_4) = (x_4, y_2)_{u_0} \vee ((x_4, x_2)_{u_2} \wedge Con(x_2)) \vee ((x_4, x_6)_{u_0} \vee (x_4, x_6)_{u_1}) \wedge Con(x_6) = (x_4, y_2)_{u_0} \vee ((x_4, x_2)_{u_2} \wedge (x_2, y_1)_{u_0}) \vee ((x_4, x_6)_{u_0} \vee (x_4, x_6)_{u_1}) \wedge (x_6, y_2)_{u_0}$;
- $Con(x_5) = Con_d(x_5) = (x_5, x_6)_{u_1} \wedge (x_6, y_2)_{u_0}$;
- $Con(x_6) = Con_d(x_6) = (x_6, y_2)_{u_0}$.

A partir de l'Equation (3), la condition de connectivité basée sur les états des arcs du graphe orienté est donnée par:

$$CC(X, Y) = (x_2, y_1)_{u_0} \wedge (x_3, x_4)_{u_0} \wedge (x_5, x_6)_{u_1} \wedge (x_6, y_2)_{u_0} \wedge (((x_1, x_2)_{u_0} \vee (x_1, x_2)_{u_2}) \wedge ((x_4, y_2)_{u_0} \vee (x_4, x_2)_{u_2} \vee (x_4, x_6)_{u_0} \vee (x_4, x_6)_{u_1})) \quad (13)$$

Les fonctions φ_O et φ_B sont définies, pour le système Σ_1 par la table suivante:

$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)_{u_r}$	$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)_{r}$	$\mathcal{F}(C)$ correspondante
$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_{u_0}$	$(\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,0}^-)$	$c_1 \wedge c_2 \wedge c_{u_0}$
$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)_{u_2}$	$(\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,2}^-)$	$c_1 \wedge c_2 \wedge c_{u_2}$
$(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1)_{u_0}$	$(\mathbf{x}_2^+, \mathbf{y}_{1,0}^-)$	$c_3 \wedge c_{u_0}$
$(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_2)_{u_2}$	$(\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,2}^-)$	$(c_4 \vee c_5) \wedge c_{u_2}$
$(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)_{u_0}$	$(\mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_{4,0}^-)$	$c_6 \wedge c_{u_0}$
$(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6)_{u_1}$	$(\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_{6,1}^-)$	$c_6 \wedge c_7 \wedge c_{u_1}$
$(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6)_{u_0}$	$(\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{6,0}^-)$	$c_5 \wedge c_{u_0}$
$(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6)_{u_1}$	$(\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{6,1}^-)$	$c_5 \wedge c_{u_1}$
$(\mathbf{x}_6, \mathbf{y}_2)_{u_0}$	$(\mathbf{x}_6^+, \mathbf{y}_{2,0}^-)$	$c_8 \wedge c_{u_0}$
$(\mathbf{x}_4, \mathbf{y}_2)_{u_0}$	$(\mathbf{x}_4^+, \mathbf{y}_{2,0}^-)$	$c_1 \wedge c_5 \wedge c_{u_0}$

Table I
LES ÉTATS D'ARCS ET LES ÉVÉNEMENTS SUR LES COMPOSANTS
CORRESPONDANTS

Pour le système Σ_1 , les composants c_3 et c_8 sont des capteurs et les composants c_{u_0} , c_{u_1} et c_{u_2} sont des actionneurs. c_{u_0} correspond à un actionneur fictif, sa valeur booléenne est toujours "vrai".

A partir de l'équation (13) et la fonction φ_O dans la Table I, la condition de connectivité $CC\varphi(X, Y)$ peut s'écrire comme suit:

$$CC\varphi(X, Y) = \overline{c_{u_1}} \wedge \overline{c_1} \wedge \overline{c_2} \wedge \overline{c_3} \wedge \overline{c_6} \wedge \overline{c_7} \wedge \overline{c_8} \wedge (\overline{c_4} \vee \overline{c_5}) \quad (14)$$

Dans le graphe biparti donné par la Figure (3), la condition de couplage complet de l'observabilité du système Σ_1 consiste à avoir un nombre maximal d'arcs disjoints $\theta(X^+, X^- \cup Y^-) = \text{card}(X^+) = 6$ avec $X^+ = \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+\}$, $X^- = \{\mathbf{x}_{2,0}^-, \mathbf{x}_{2,2}^-, \mathbf{x}_{4,0}^-, \mathbf{x}_{6,0}^-, \mathbf{x}_{6,1}^-\}$ et $Y^- = \{\mathbf{y}_{1,0}^-, \mathbf{y}_{2,0}^-\}$.

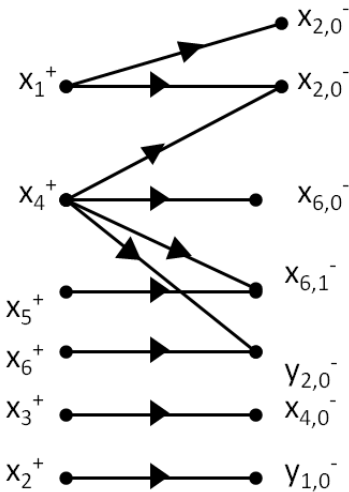


Figure 3. Graphe biparti correspondant au système Σ_1

Après la DM décomposition de $\mathcal{B}(V^+, V^-, \mathcal{E}_B)$, nous avons

$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_B$. Donc $MC(X^+, X^- \cup Y^-) = \text{Exp}(X^+, \mathcal{E}_B)$.

Pour calculer $\text{Exp}(X^+, \mathcal{E}^*)$, commençons par exemple par \mathbf{x}_1^+ :

$$\begin{aligned} \text{Exp}(V^+, \mathcal{E}^*) &= \text{Exp}(\{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+\}, \mathcal{E}^*) \\ &= ((\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,0}^-) \wedge \text{Exp}(\{\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+\}, \mathcal{E}_1^*)) \\ &\quad \vee ((\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,2}^-) \wedge \text{Exp}(\{\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+\}, \mathcal{E}_2^*)) \end{aligned}$$

avec :

- $\mathcal{E}_1^* = f(\{\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+\}, \mathcal{E}^* \setminus \{(\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,2}^-)\})$.

et

- $\mathcal{E}_2^* = f(\{\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+\}, \mathcal{E}^* \setminus \{(\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,0}^-), (\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,2}^-)_{u_2}, (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,2}^-)_{u_2}\})$.

Et ainsi de suite pour le calcul de $\text{Exp}(\{\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+\}, \mathcal{E}_1^*)$ et $\text{Exp}(\{\mathbf{x}_2^+, \mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_6^+\}, \mathcal{E}_2^*)$.

La condition de couplage complet $MC(X^+, X^- \cup Y^-)$ est donc exprimée comme suit:

$$\begin{aligned} MC(X^+, X^- \cup Y^-) &= (\mathbf{x}_2^+, \mathbf{y}_{1,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_3^+, \mathbf{x}_{4,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_6^+, \mathbf{y}_{2,0}^-) \wedge (\mathbf{x}_5^+, \mathbf{x}_{6,1}^-) \\ &\quad \wedge ((\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,0}^-) \vee (\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_{2,2}^-)) \wedge ((\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{6,0}^-) \vee (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{6,1}^-)) \\ &\quad \vee ((\mathbf{x}_2^+, \mathbf{y}_{1,0}^-) \vee (\mathbf{x}_4^+, \mathbf{x}_{2,2}^-)) \end{aligned} \quad (15)$$

A partir de l'équation (15) et la fonction φ_B dans la Table I, la condition de couplage complet $MC\varphi(X^+, X^- \cup Y^-)$ peut s'écrire sous la forme:

$$MC\varphi(X^+, X^- \cup Y^-) = \overline{c_{u_1}} \wedge \overline{c_1} \wedge \overline{c_2} \wedge \overline{c_3} \wedge \overline{c_6} \wedge \overline{c_7} \wedge \overline{c_8} \wedge ((\overline{c_4} \wedge \overline{c_{u_2}}) \vee \overline{c_5}) \quad (16)$$

Un SBLS est génériquement observable ssi les conditions de connectivité et de couplage complet sont vérifiées. Donc, à partir des équations (9), (14) et (16), la condition d'observabilité $Obs_{\Sigma_1\varphi}$ peut s'exprimer comme suit:

$$Obs_{\Sigma_1\varphi} = \overline{c_{u_1}} \wedge \overline{c_1} \wedge \overline{c_2} \wedge \overline{c_3} \wedge \overline{c_6} \wedge \overline{c_7} \wedge \overline{c_8} \wedge ((\overline{c_4} \wedge \overline{c_{u_2}}) \vee \overline{c_5}) \quad (17)$$

A partir de l'expression booléenne $Obs_{\Sigma_1\varphi}$, nous pouvons calculer la fiabilité de l'observabilité du système Σ_1 en utilisant l'équation (10). Ainsi, la fiabilité de l'observabilité du système Σ_1 est donnée comme suit:

$$\begin{aligned} R_{Obs_{\Sigma_1\varphi}}(t) &= R_{c_{u_1}}(t) \cdot R_{c_1}(t) \cdot R_{c_2}(t) \cdot R_{c_3}(t) \cdot R_{c_6}(t) \cdot R_{c_7}(t) \cdot R_{c_8}(t) \\ &\quad [1 - (1 - R_{c_4}(t) \cdot R_{c_{u_2}}(t)) \cdot (1 - R_{c_5}(t))] \end{aligned} \quad (18)$$

Considérons que la fiabilité des composants c_3 , c_4 , c_5 , c_6 , c_7 et c_8 suit une loi exponentielle où $\lambda_{c_3} = 0.003$, $\lambda_{c_4} = 0.004$, $\lambda_{c_5} = 0.005$, $\lambda_{c_6} = 0.006$, $\lambda_{c_7} = 0.007$ et $\lambda_{c_8} = 0.008$.

Pour les composants c_{u_1} , c_{u_2} , c_1 et c_2 , leur fiabilité suit une loi de Weibull où $\beta_{c_{u_1}} = 1$, $\beta_{c_{u_2}} = 0.9$, $\beta_{c_1} = 1$,

$$\beta_{c_2} = 0.9, \eta_{c_{u_1}} = 100, \eta_{c_{u_2}} = 200, \eta_{c_1} = 100, \eta_{c_2} = 200, \\ \gamma_{c_{u_1}} = \gamma_{c_{u_2}} = \gamma_{c_1} = \gamma_{c_2} = 0.$$

La Figure (4) montre l'évolution de la fiabilité de l'observabilité du système bilinéaire Σ_1 calculée à partir de l'équation (18) qui dépend de la fiabilité des composants du système.

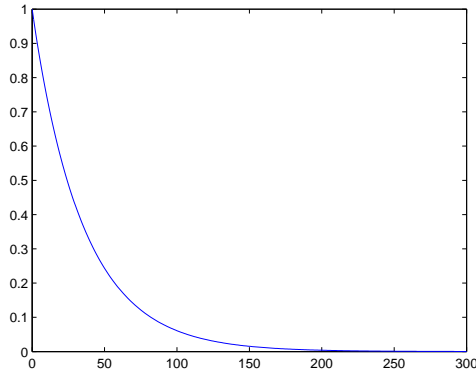


Figure 4. Fiabilité de l'observabilité du système Σ_1

Nous pouvons observer dans la Figure (4) que l'observabilité de ce système n'est probablement plus satisfaite après 250 heures de fonctionnement. Vu la criticité de perdre cette propriété structurelle, il est nécessaire de prévoir des plans de maintenance ou de re-conception au niveau de ce système afin de diminuer la probabilité que l'observabilité structurelle soit insatisfaite.

VI. CONCLUSION

A partir de la représentation graphique du système étudié, la méthode utilisée dans cet article nous permet d'évaluer la validité de l'observabilité structurelle des systèmes bilinéaires structurés en calculant sa fiabilité. La fiabilité de cette propriété dépend de la fiabilité de certains composants du système.

La validité de l'observabilité des systèmes bilinéaires est exprimée sous forme d'expression booléenne basée sur les événements des composants internes ainsi que les composants externes (capteurs/actionneurs) du système. L'expression booléenne fournie est utilisée pour le calcul de la fiabilité de l'observabilité structurelle pour les systèmes bilinéaires. Cette analyse permet de connaître la criticité de cette propriété et le risque encouru dans l'usage du système bilinéaire étudié.

REFERENCES

- [1] T. Boukhobza and F. Hamelin. Observability analysis for structured bilinear Systems: a graph-theoretic approach. *Automatica*, 43(11):1968–1974, 2007.
- [2] T. Boukhobza and F. Hamelin. State and input observability for structured bilinear systems: A graph-theoretic approach. In *IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [3] A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn. Coverings of bipartite graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 10:517–534, 1958.
- [4] O. M. Grasselli and A. Isidori. Deterministic state reconstruction and reachability of bilinear processes. In *Proceedings of IEEE Joint Automatic Control Conference*, pages 1423–1427, San Francisco, U.S.A., 1977.
- [5] H. Hammouri, K. Kabore, and M. Kinnaert. A geometric approach to fault detection and isolation for bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9): 1451–1455, 2001.
- [6] A. Kaufmann, D. Grouchko, and R. Cruon. *Modèle mathématiques pour l'étude de la fiabilité des systèmes*. Masson et Cie éditeurs, Paris, 1975.
- [7] C. T. Lin. Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19(3):201–208, 1974.
- [8] S. Maza, C. Simon, and T. Boukhobza. The impact of actuator failures on the structural controllability of linear systems : A graph theoretical approach. *I.E.T. Control Theory & Applications*, 6:412–419, 2012.
- [9] K. Murota. Refined study on structural controllability of descriptor systems by means of matroids. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25(4):967–989, 1987.
- [10] M. Staroswiecki. *Observability and the Design of Fault Tolerant Estimation Using Structural Analysis*, chapter 353, pages 257–278. Advances in Control Theory and Application. Springer, 2006.
- [11] F. Svaricek. A graph-theoretic approach for the investigation of the observability of bilinear systems. In *Proceedings of the 12th IFAC World Congress*, volume 4, pages 351–354, Sydney, Australia, 1993.
- [12] J. L. Willems. Structural controllability and observability. *System & Control Letters*, 8(1):5–12, 1986.
- [13] D. Williamson. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13(3):243–254, 1977.