Mesures d'importance par réseaux bayésiens

Frédérique Bicking, Christophe Simon, Walid Mechri

▶ **To cite this version:**

Frédérique Bicking, Christophe Simon, Walid Mechri. Mesures d'importance par réseaux bayésiens. 10ème Congrès International Pluridisciplinaire Qualité et Sûreté de Fonctionnement, Qualita'2013, Mar 2013, Compiègne, France. pp.CDROM. hal-00823135

HAL Id: hal-00823135
https://hal.science/hal-00823135

Submitted on 16 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mesures d'importance par réseaux bayésiens

Frédérique Bicking
Université de Lorraine
CRAN - CNRS UMR 7039
Campus Science, BP 70239
Vandoeuvre lès Nancy Cedex
54506 - France
Frederique.Bicking@univ-lorraine.fr

Christophe Simon
Université de Lorraine
CRAN - CNRS UMR 7039
Campus Science, BP 70239
Vandoeuvre lès Nancy Cedex
54506 - France
Christophe.Simon@univ-lorraine.fr

Walid Mechri
LARA Tunis
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
BP37 Le Belvédère
1002 Tunis - Tunisie
walid.mechri@isim.rnu.tn

***Résumé*—Les facteurs d'importance sont souvent utlisés comme un moyen d'évaluer et de classer l'impact des composants sur le système. L'évaluation de ces facteurs est liée à des probabilités de fonctionement (ou de dysfonctionnement) du système en fonction de l'état des composants. Ces probabilités éventuellement conditionnelles peuvent être aisément obtenues à l'aide d'un réseau bayésien qui modélise le fonctionnement (ou le dysfonctionnement) du système. Dans cet article, nous présentons une méthode d'obtention des principaux facteurs d'importance à partir de la connaissance des chemins de succès (ou coupes minimales) d'un système choisi cohérent et à hypothèse d'états binaires. Les chemins (ou coupes) sont modélisés par un réseau bayésien qui permet une lecture aisée des probabilités intervenant dans le calcul des facteurs d'importance les plus répandus et dans les facteurs d'importance conjoints. Une illustration sur un exemple est proposée en dernière partie.**

NOTATION

- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$: vecteur d'états des n composants avec $x_i = 1$ noté aussi 1_i, le composant i fonctionne sinon $x_i = 0$ noté aussi 0_i le composant i est défaillant,
- $(\bullet_i, \mathbf{x}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, \ldots, x_n)$,
- $(a_i, b_j, \mathbf{x}^{(i,j)})$: vecteur avec $x_i = a, x_j = b$ et $\mathbf{x}^{(i,j)}$ le vecteur obtenu en supprimant x_i et x_j dans $\mathbf{x}$,
- X_i : V.A. représentant l'état du composant i,
- $p_i = Pr\{X_i = 1\}$: probabilité que le composant i fonctionne à l'instant t (fiabilité du composant i),
- $q_i = 1 - p_i$: probabilité que le composant i soit défaillant à l'instant t,
- $R(\mathbf{p}) = \mathbb{E}(\Phi(\mathbf{X})) = Pr\{\Phi(\mathbf{X}) = 1)$: Fiabilité du système composé de composants de fiabilité p_i,
- $\phi(\mathbf{x})$: Fonction de structure
  $\phi(\mathbf{x}) = 1$ le système fonctionne,
  $\phi(\mathbf{x}) = 0$ le système est défaillant,
- $\mathscr{P}(\overline{\mathscr{P}})$: ensemble des chemins (minimaux),
- $\mathscr{P}_i(\overline{\mathscr{P}_i})$: ensemble des chemins (minimaux) contenant le composant i,
- $\mathscr{P}_{(i)}(\overline{\mathscr{P}_{(i)}})$: ensemble des chemins (minimaux) ne contenant pas le composant i,
- $\mathscr{C}(\overline{\mathscr{C}})$: ensemble des coupes (minimales),
- $\mathscr{C}_i(\overline{\mathscr{C}_i})$: ensemble des coupes (minimales) contenant le composant i
- $\mathscr{C}_{(i)}(\overline{\mathscr{C}_{(i)}})$: ensemble des coupes (minimales) ne contenant pas le composant i,
- $SN_0(\mathbf{x}) = \{\forall i \in SN = \{1, 2, \ldots, n\} : x_i = 0\}$
- $SN_1(\mathbf{x}) = [\forall i \in SN = \{1, 2, \ldots, n\} : x_i = 1\}$
- $Occur, NotOccur$: occurrence de la coupe (la panne se produit), non occurrence de la coupe.

I. INTRODUCTION

Les facteurs d'importance permettent de fournir des éléments d'aide à la décision pour améliorer la conception et l'exploitation d'un système en identifiant les principaux points faibles. On distingue habituellement les facteurs d'importance structurels (structural importance measures [1], [2]) et les facteurs d'importance fiabilistes (reliability importance measures [2], [3]). Les facteurs d'importance structurels donnent l'importance relative d'un composant et de sa position dans la structure du système. Cependant, ces facteurs ne permettent pas de distinguer des composants qui ont des comportements fiabilistes différents mais qui se situent à des positions similaires dans la structure du système. Les facteurs d'importance fiabilistes évaluent l'importance relative d'un composant en prenant en compte de façon conjointe ses contributions structurelle et probabiliste à la fiabilité du système.

Depuis plusieurs années, de nombreux facteurs d'importance ont été élaborés. Kuo et Zhu [3] ont passé en revue les facteurs d'importance pour les systèmes binaires cohérents en fiabilité incluant, leurs définitions, leurs interprétations probabilistes, leurs propriétés et leurs calculs. Dans [4], les mêmes auteurs détaillent les relations entre les nombreux facteurs d'importance en fiabilité et présente une étude critique des généralisations de ces facteurs d'importance aux systèmes complexes incluant les systèmes non cohérents, les systèmes multi-états, les systèmes continus et les systèmes réparables.

De manière générale, la détermination des différents facteurs d'importance utilisés en fiabilité nécessite d'avoir une expression de la disponibilité/fiabilité du système ou une expression de la fonction structure.

Dans cet article, nous présentons une méthode d'obtention des principaux facteurs d'importance à partir de la connaissance des chemins de succès (ou coupes minimales) du système choisi cohérent binaire. Ces chemins (ou coupes) sont modélisés par un réseau bayésien qui permet une lecture aisée des probabilités intervenant dans le calcul des facteurs d'importance. Dans une première partie, nous rappelons

les définitions des facteurs d'importance les plus répandus en les présentant selon un aspect fonctionnel (modélisation des chemins de succès) et selon un aspect dysfonctionnel (modélisation des coupes). Dans une seconde partie, nous définissons quelques facteurs d'importance conjoints. Une illustration avec un exemple à cinq composants est proposée en dernière partie.

II. Principales mesures d'importance probabilistes en fiabilité

On s'intéresse aux facteurs d'importance fiabilistes dans le contexte des systèmes à composants stochastiquement indépendants.

A. Facteur d'importance marginal (Marginal Importance Factor, MIF)

Le facteur d'importance marginal, introduit par Birnbaum [5], est défini comme une mesure de variation de la fiabilité du sytème en fonction de la fiabilité d'un composant. Le facteur d'importance marginal relatif au composant i peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I_B(i;\mathbf{p}) &= Pr\{\phi(\mathbf{X})=1/X_i=1\} \\ &- Pr\{\phi(\mathbf{X})=1/X_i=0\} && (1) \\ &= \frac{1}{p_i}Pr\{\mathbf{X}\in\mathscr{P}_i\}-\frac{1}{q_i}Pr\{\mathbf{X}\in\mathscr{P}_{(i)}\} && (2) \\ &= \frac{\partial R(\mathbf{p})}{\partial p_i}=R(1_i;\mathbf{p})-R(0_i;\mathbf{p}) && (3) \end{aligned}$$

La relation 1 exprime que le facteur d'importance marginal relatif au composant i dans un système cohérent peut donc être défini comme la probabilité que la panne du composant i conduise à la panne du système. Ce facteur permet également d'évaluer la vitesse à laquelle la fiabilité du système augmente en fonction de l'augmentation de la fiabilité des composants (eq. 3). Cela représente une mesure de la sensibilité de la fiabilité du système à l'état d'un composant. Ainsi, si l'on veut augmenter la fiabilité du système, il faut commencer par améliorer la fiabilité du composant qui a le plus grand facteur d'importance marginal.

D'un point de vue dysfonctionnel, le facteur d'importance détermine la contribution de la défaillance d'un composant sur la défaillance du système. Cela peut s'exprimer comme la différence entre le risque sachant qu'un évènement donné s'est produit et le risque sachant que cet événement ne peut pas se produire. Sa formulation mathématique d'un point de vue dysfonctionnel est :

$$\begin{aligned} I_B(i;\mathbf{p}) &= Pr\{\phi(\mathbf{X})=0/X_i=0\} \\ &- Pr\{\phi(\mathbf{X})=0/X_i=1\} && (4) \\ &= Pr\{\Phi(\mathbf{X})=Occur/X_i=Occur\} \\ &- Pr\{\Phi(\mathbf{X})=Occur/X_i=NotOccur\} && (5) \\ &= \frac{1}{q_i}Pr\{\mathbf{X}\in\mathscr{C}_i\}-\frac{1}{p_i}Pr\{\mathbf{X}\in\mathscr{C}_{(i)}\} && (6) \end{aligned}$$

Quand un système est en panne, il est intéressant de trouver quel composant a causé la défaillance et en quel sens les différents composants sont importants vis à vis de la défaillance du système. Birnbaum [5] propose une mesure bayesienne basée sur la fiabilité $I_{Bay}(i;\mathbf{p})$ qui est la probabilité qu'un composant i tombe en panne sachant que le système est défaillant. Mathématiquement, cela s'écrit :

$$\begin{aligned} I_{Bay}(i;\mathbf{p}) &= Pr\{X_i=0/\phi(\mathbf{X})=0\} && (7) \\ &= \frac{Pr\{\phi(\mathbf{X})=0/X_i=0\}Pr\{X_i=0\}}{Pr\{\Phi(\mathbf{X})=0\}} && (8) \\ &= q_i\left(1+\frac{p_i}{1-R(\mathbf{p})}I_B(i;\mathbf{p})\right) && (9) \end{aligned}$$

Cette mesure est une fonction linéaire du facteur de Birnbaum. Cependant, alors que ce dernier est indépendant de la fiabilité, p_i, du composant i, $I_{Bay}(i;\mathbf{p})$ tient compte de p_i.

B. Facteur d'importance critique (Critical Importance Factor, CIF)

Le facteur d'importance critique a été introduit par Lambert [6]. D'un point de vue fonctionnel, le facteur d'importance critique d'un composant i pour le fonctionnement du système, noté $I_{C_f}(i;\mathbf{p})$, représente la probabilité que le composant i fonctionne et est critique pour le fonctionnement du système sachant que le système fonctionne :

$$\begin{aligned} I_{C_f}(i;\mathbf{p}) &= p_i\frac{(Pr\{\phi(\mathbf{X})=1/X_i=1\}-Pr\{\phi(\mathbf{X})=1/X_i=0\})}{Pr\{\phi(\mathbf{X})=1\}} && (10) \\ &= \frac{p_iI_B(i;\mathbf{p})}{R(\mathbf{p})} && (11) \end{aligned}$$

D'un point de vue dysfonctionnel, le facteur d'importance critique d'un composant i pour la défaillance du système, noté $I_{C_d}(i;\mathbf{p})$, représente la probabilité qu'un composant i soit défaillant et soit critique pour la défaillance du système sachant que le système est défaillant :

$$\begin{aligned} I_{C_d}(i;\mathbf{p}) &= q_i\frac{(Pr\{\phi(\mathbf{X})=1/X_i=1\}-Pr\{\phi(\mathbf{X})=1/X_i=0\})}{Pr\{\phi(\mathbf{X})=0\}} && (12) \\ &= \frac{q_iI_B(i;\mathbf{p})}{1-R(\mathbf{p})} && (13) \end{aligned}$$

Ce facteur, défini en terme de défaillance du système, peut être utilisé en diagnostic (fault diagnosis). Quand un système est défaillant, le composant ayant le plus fort $I_{C_d}(i;\mathbf{p})$ est probablement la cause de la défaillance du système et doit être controlé en priorité. Bien sûr, les deux facteurs $I_{C_d}(i;\mathbf{p})$ et $I_{C_f}(i;\mathbf{p})$ doivent produire le même ordre d'importance du fait de l'évaluation selon deux points de vue différents (fonctionnement ou défaillance).

Ce facteur évalue donc l'importance d'un composant en fonction de sa participation à la mise en panne du système. Il est utile, en cas de panne, pour identifier les composants à réparer en priorité, c'est-à-dire ceux dont la mise en marche est la plus susceptible de restaurer le fonctionnement du système.

C. Facteur d'augmentation du risque (Reliability Achievement Worth, RAW)

Le facteur RAW est un indicateur de l'importance qu'il y a à maintenir le niveau de fiablité du composant i pour maintenir la fiabilité du système.

$$I_{RAW}(i;\mathbf{p}) = \frac{Pr\{\Phi(1_i,\mathbf{X})=1\}}{Pr\{\Phi(\mathbf{X})=1\}} \quad (14)$$

$$= 1+\frac{q_i}{R(\mathbf{p})}I_B(i;\mathbf{p}) \quad (15)$$

Ce facteur quantifie l'accroissement maximum de la fiabilité du système généré par le composant i. Cela ne représente pas l'importance du composant lui-même mais plutôt une sorte "d'immunité" du système vis-à-vis de la défaillance du composant. Un RAW élevé reflète une mauvaise immunité du système vis-à-vis de la défaillance du composant en question. C'est une interprétation plutôt en terme de sûreté et d'un point de vue fonctionnel.

D'un point de vue dysfonctionnel, on peut écrire :

$$I_{RAW}(i;\mathbf{p}) = \frac{Pr\{\Phi(\mathbf{X})=NotOccur/X_i=NotOccur\}}{Pr\{\Phi(\mathbf{X})=NotOccur\}} \quad (16)$$

D. Facteur de diminution du risque (Reliability Reduction Worth, RRW)

Le facteur RRW evalue les dommages éventuels causés au système par le composant i. Il représente la diminution maximum du risque que l'on peut espérer en améliorant la fiabilité du composant i. Sa définition est :

$$I_{RRW}(i;\mathbf{p}) = \frac{Pr\{\Phi(\mathbf{X})=1\}}{Pr\{\Phi(0_i,\mathbf{X})=1\}} \quad (17)$$

$$= \frac{1}{1-\frac{p_i}{R(\mathbf{p})}I_B(i;\mathbf{p})} \quad (18)$$

Ce facteur est intéressant pour repérer les composants dont l'amélioration de la fiabilité est la plus susceptible d'augmenter celle du système. Il est utile pour déterminer les composants à fiabiliser en priorité dans le cadre d'une maintenance préventive.

D'un point de vue dysfonctionnel, on peut écrire :

$$I_{RRW}(i;\mathbf{p}) = \frac{Pr\{\Phi(\mathbf{X})=NotOccur\}}{Pr\{\Phi(\mathbf{X})=NotOccur/X_i=Occur\}} \quad (19)$$

E. Facteur d'importance de Fussell-Vesely (Diagnostic Importance Factor, DIF)

Initialement proposé dans le contexte des arbres de défaillance [7], [8], il représente la probabilité que la défaillance d'un composant i contribue à la défaillance du système sachant que le système est défaillant.

D'un point de vue dysfonctionnel, c'est la probabilité qu'au moins une coupe minimale contenant le composant i existe.

$$I_{VF}(i;\mathbf{p}) = Pr\{\exists C\in\overline{\mathscr{C}}_i\ s.t.\ C\subseteq SN_0(\mathbf{X})/\Phi(\mathbf{X})=0\} \quad (20)$$

$$= \frac{q_i Pr\{(0_i;\mathbf{X}):\exists C\in\overline{\mathscr{C}}_i\ s.t.\ C\subseteq SN_0(0_i,\mathbf{X})\}}{1-R(\mathbf{p})} \quad (21)$$

$$= Pr\{0_i/\phi(\mathbf{X})=0\} \quad (22)$$

$$= Pr\{X_i=Occur/\phi(\mathbf{X})=Occur\} \quad (23)$$

où $C\in\overline{\mathscr{C}}_i$ est une coupe minimale contenant le composant i.

D'un point de vue fonctionnel, il représente la probabilité qu'au moins un chemin minimal contenant le composant i existe sachant que le système fonctionne.

$$I_{VF}(i;\mathbf{p}) = Pr\{\exists P\in\overline{\mathscr{P}}_\rangle\ s.t.\ P\subseteq SN_1(\mathbf{X})/\Phi(\mathbf{X})=1\} \quad (24)$$

$$= \frac{p_i Pr\{(1_i;\mathbf{X}):\exists P\in\overline{\mathscr{P}}_\rangle\ s.t.\ P\subseteq SN_1(1_i,\mathbf{X})\}}{1-R(\mathbf{p})} \quad (25)$$

$$= Pr\{1_i/\phi(\mathbf{X})=1\} \quad (26)$$

$$= Pr\{X_i=NotOccur/\phi(\mathbf{X})=NotOccur\} \quad (27)$$

où $P\in\overline{\mathscr{P}_i}$ est un chemin minimal contenant le composant i.

L'utilisation des facteurs d'importance fiabilistes pour classer l'importance d'un composant a été exposée dans de nombreux articles. Les mesures d'importance présentées concerne l'effet d'un composant ou d'un ensemble particulier de composants (coupe minimale ou chemin minimal) sur les performances du système. Pourtant, certaines décisions peuvent affecter des groupes de composants. Cela pose le problème des mesures d'importances pour les groupes de composants. Ces dernières mesures sont pourtant utiles en analyse de sensibilité et de sureté de fonctionnement.

III. Mesures d'importance pour les pairs et groupes de composants

A. Extension des facteurs RAW et RRW

Zio et Podofillini [3], [9] ont étendu les facteurs RAW et RRW aux pairs de composants. Pour deux composants i et j, $i\neq j$, le facteur RAW étendu est défini par :

$$I_{RAW2}(i,j;\mathbf{p}) = \frac{Pr\left\{\phi(1_i,1_j,\mathbf{X}^{(i,j)})=1\right\}}{Pr\{\phi(\mathbf{X})=1\}} \quad (28)$$

Ce facteur représente le potentiel maximum d'accroissement de la fiabilité du système en supposant que les composants i et j sont parfaits $(p_i=1,p_j=1)$.
Le facteur RRW étendu est défini par :

$$I_{RRW2}(i,j;\mathbf{p}) = \frac{Pr\{\phi(\mathbf{X})=1\}}{Pr\left\{\phi(0_i,0_j,\mathbf{X}^{(i,j)})=1\right\}} \quad (29)$$

Ce facteur permet d'ordonner les pairs de composants selon leur potentiel à diminuer la fiabilité du système.

B. Facteur de fiabilité conjoint (Joint Reliability Importance, JR)

Si on reprend l'expression 1 qui détermine la contribution de la (fiabilité) défaillance d'un composant sur la (fiabilité) défaillance du système et que l'on étend ce concept à deux composants indépendants i et j, il vient une mesure de l'action conjointe des deux composants sur la fiabilité/disponibilité du système [10]–[12] :

$$
\begin{aligned}
I_{JR}(i,j;\mathbf{p}) &= Pr\Big\{\phi(1_i,1_j,\mathbf{X}^{(i,j)})=1\Big\} \\
&- Pr\Big\{\phi(1_i,0_j,\mathbf{X}^{(i,j)})=1\Big\} \\
&- Pr\Big\{\phi(0_i,1_j,\mathbf{X}^{(i,j)})=1\Big\} \\
&+ Pr\Big\{\phi(0_i,0_j,\mathbf{X}^{(i,j)})=1\Big\} \qquad (30)\\
&= I_B(i;1_j,\mathbf{p}) - I_B(i;0_j,\mathbf{p}) \qquad (31)\\
&= I_B(j;1_i,\mathbf{p}) - I_B(j;0_i,\mathbf{p}) \qquad (32)\\
&= \frac{1}{p_i}[I_B(j;\mathbf{p}) - I_B(j;0_i,\mathbf{p})] \qquad (33)\\
&= \frac{1}{q_i}[I_B(i;\mathbf{p}) - I_B(i;0_j,\mathbf{p})] \qquad (34)\\
&= \frac{\partial^2 R(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Le signe et la valeur de $I_{JR}(i,j;\mathbf{p})$ représente le type et le degré d'interaction entre les 2 composants sur la fiabilité du système. Si $I_{JR}(i,j;\mathbf{p}) > 0$ alors $I_B(i;1_j,\mathbf{p}) > I_B(i;0_j,\mathbf{p})$, c'est-à-dire que le composant i a plus d'impact sur la fiabilité du système quand le composant j fonctionne que quand il est défaillant. De manière analogue, si $I_{JR}(i,j;\mathbf{p}) < 0$, un composant devient plus important quand l'autre est défaillant. Si $I_{JR}(i,j;\mathbf{p}) = 0$, l'impact du composant i est indépendant de l'état du composant j. Armstrong [13] a montré que $I_{JR}(i,j;\mathbf{p}) \geq 0$ si et seulement si, il n'existe pas de coupe minimale contenant les deux composants i et j ensemble.

Gao [10] a étendu le concept de facteur de fiabilité conjoint de 2 à plusieurs composants. Le facteur de fiabilité conjoint d'ordre k de k composants distincts $i_1, i_2, \ldots, i_k < n$ est défini par :

$$
\begin{aligned}
I_{JRM}(i_1,i_2,\ldots,i_k;\mathbf{p}) &= \frac{\partial^k R(\mathbf{p})}{\partial p_{i_1}\partial p_{i_2}\ldots\partial p_{i_k}} \qquad (36)\\
&= Pr\{(\phi(\mathbf{X})=1/1_i,1_j,\ldots,1_k\} \\
&- Pr\{\phi(\mathbf{X})=1/1_i,\ldots,0_k\} \\
&\pm \ldots \pm Pr\{(\phi(\mathbf{X})=1/0_i,0_j,\ldots,1_k\} \\
&\pm Pr\{\phi(\mathbf{X})=1/0_i,0_j,\ldots,0_k\} \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Le signe devant chaque probabilité suit les règles suivantes :

- Si k est impair, le signe est positif si le nombre de 1 correspondant est impair sinon il est négatif,
- Si k est pair, le signe est positif si le nombre de 1 correspondant est pair sinon il est négatif,
- Le signe du dernier terme est négatif si k est impair, sinon il est positif.

Afin de simplifier les calculs, il a été proposé une forme plus pratique :

$$
\begin{aligned}
I_{JRM}(i,j,\ldots,n;\mathbf{p}) &= [I_{JRM}(i,j,\ldots,n-1;\mathbf{p}) \qquad (38)\\
&- I_{JRM}(i,j,\ldots,n-1/x_n=0;\mathbf{p})]/p_n
\end{aligned}
$$

Après avoir défini les facteurs d'importance en mettant l'accent sur les points du vue fonctionnel et dysfonctionnel, nous illustrons leur détermination à l'aide d'un réseau bayésien sur un exemple simple.

IV. Illustration

Considèrons un système à 5 composants dont les fiabilités sont définies par : $\mathbf{p} = \{0.70, 0.73, 0.76, 0.79, 0.82\}$. Le Bloc Diagramme de Fiabilité (BDF) correspondant est présenté sur la figure 1.

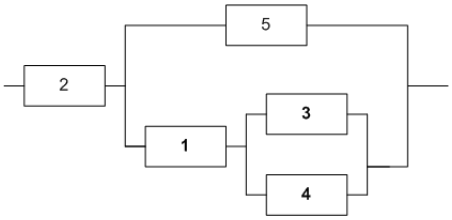


FIGURE 1: Bloc Diagramme de Fiabilité (BDF)

Les chemins minimaux, ensembles minimaux de composants dont le fonctionnement assure le fonctionnement du système, sont : $\mathscr{P}_a = \{1,2,3\}; \mathscr{P}_b = \{1,2,4\}; \mathscr{P}_c = \{2,5\}$. Les coupes minimales, ensembles minimaux dont la défaillance cause la défaillance du sytème, sont :$\mathscr{C}_a = \{2\}; \mathscr{C}_b = \{1,5\}; \mathscr{C}_c = \{3,4,5\}$. A partir des chemins minimaux (coupes minimales), on construit le modèle fonctionnel (dysfonctionnel) du réseau qui servira au calcul des facteurs d'importance cités dans les sections précédentes.

On a choisi d'opter pour un réseau bayésien pour pouvoir modéliser, traiter des systèmes multi-états et assurer les calculs des facteurs d'importance en n'utilisant qu'un seul outil. D'autres possibilités pouvaient être envisagées en cumulant les outils comme par exemple les arbres de défaillance, les BDD, etc ...

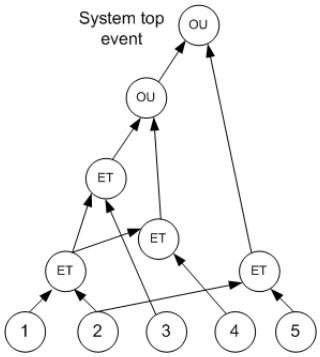
Le réseau bayésien (fig. 2a) modélise les chemins de succès tandis que le réseau bayésien (fig. 2b) modélise les coupes du système. Les réseaux présentés sont réalisés avec l'outil BayesiaLab (`http://www.bayesia.com`).

A. Calcul des facteurs d'importance

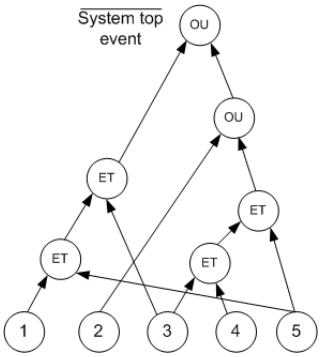
Le tableau I présente la méthode de collecte des probabilités pour le calcul des facteurs d'importance. Pour illustration, on présente la collecte des différentes probabilités pour un composant, la méthode étant bien sûr la même pour tous les composants du système.

Quand on utilise les facteurs d'importance, il est certes intéressant de connaître les valeurs de ces facteurs mais le classement relatif des facteurs d'importance des composants donne des informations essentielles quant aux composants eux-mêmes. La table II donne les valeurs des facteurs d'importance pour chaque composant en utilisant le modèle fonctionnel du système.

La table III présente le classement résultant. Les résulats montrent que le composant 2 est celui à surveiller en priorité. Cela parait évident vu la structure du système choisi (fig. 1). Il



(a) Modèle de réseau des chemins minimaux



(b) Modèle de réseau des coupes minimales

FIGURE 2: Modèles de réseaux

TABLE II: Facteurs d'importance pour chaque composant

Composants	N1	N2	N3	N4	N5
MIF	0,1248	0,9396	0,0193	0,0221	0,2448
CIF	0,1273	1,0001	0,0214	0,0254	0,2926
RAW	1,0546	1,3700	1,0068	1,0068	1,0643
RRW	1,1458		1,0218	1,0260	1,4135
DIF	0,7382	1,0000	0,7651	0,7953	0,8727

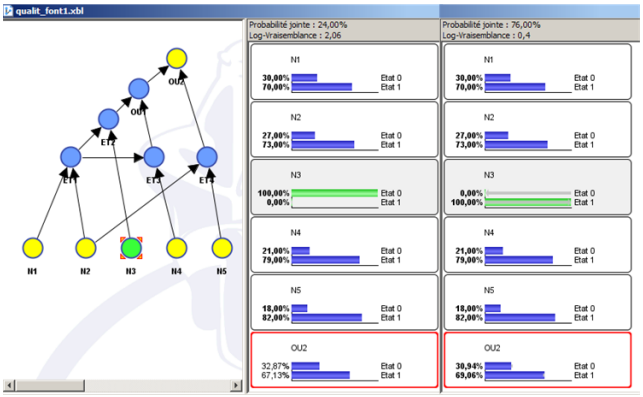
en va de même pour le composant 5. Pour les composants 1, 3 et 4, les classements peuvent varier en fonction des facteurs d'importance. Les facteurs MIF, CIF et RRW conduisent au même classement.

TABLE III: Classement des composants en fonction de leurs facteurs d'importance

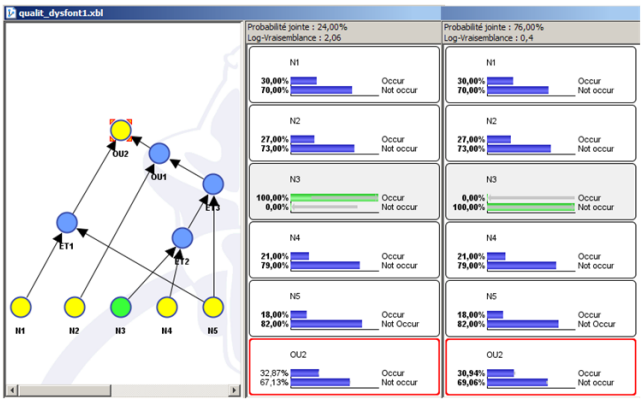
MIF	CIF	RAW	RRW	DIF
N2	N2	N2	N2	N2
N5	N5	N5	N5	N5
N1	N1	N1	N1	N4
N4	N4	N3	N4	N3
N3	N3	N4	N3	N1

B. Calcul des facteurs d'importance conjoints

En opérant de manière similaire pour la collecte des probabilités servant au calcul des facteurs d'importance conjoints, on obtient les résulats donnés dans les tables IV et V.



(a) Cas fonctionnel : Probabilités pour le MIF(3) selon la relation 1



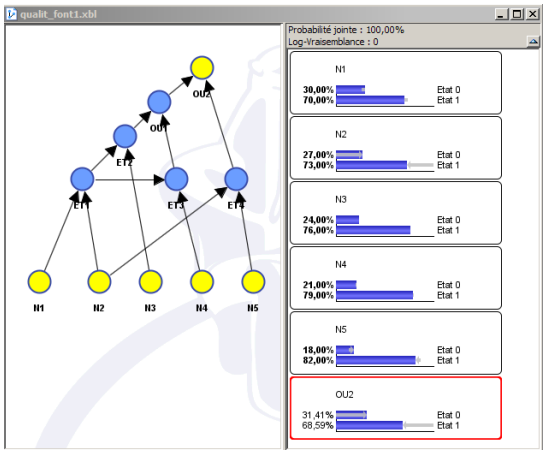
(b) Cas dysfonctionnel : Probabilités pour le MIF(3) selon la relation 4

FIGURE 3: Lecture des probabilités pour le calcul du MIF(3)

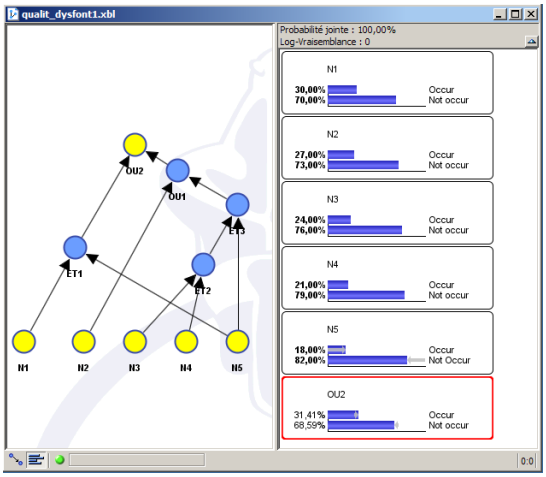
Si l'on effectue le classement des facteurs d'importance conjoints (table VI), on peut dire que le composant 5 (et le 1) est plus important pour la fiabilité du système quand le composant 2 fonctionne $((2,5))$. Il est également plus important que le composant 1 quand le composant 2 fonctionne $((1,2,5)$ et $(1,5))$. On peut constater que le composant 4 est plus important que le composant 3 quand les composants 1 et 2 fonctionnent $((1,2,4)$ et $(1,2,3))$. Ces quelques analyses sur ce système simple ont surtout pour but de montrer que l'interaction entre 2 ou plusieurs composants permet d'avoir un peu plus de renseignements que le simple ordre de priorité des composants obtenus avec les facteurs d'importance des composants. Au delà, on veut également montrer que la modélisation et l'outil utilisé permettent d'obtenir simplement des renseignements sur la fiabilité du système grâce à l'analyse d'importance des composants et des combinaisons de composants sans disposer d'une expression explicite de la fiabilité du système.

V. CONCLUSION

Ce papier montre comment, grâce à une représentation fonctionnelle (ou dysfonctionnelle) du système par un réseau bayésien, on peut facilement obtenir les probabilités conditionnelles utilisées dans les principaux facteurs d'importance. Les principaux facteurs d'importance cités et les liaisons existantes

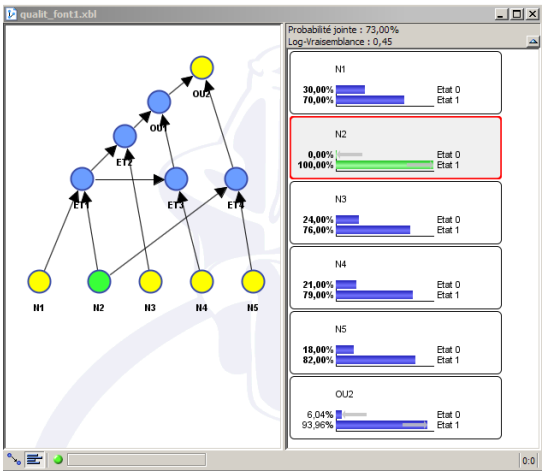


(a) Cas fonctionnel : Lecture pour le CIF(3)

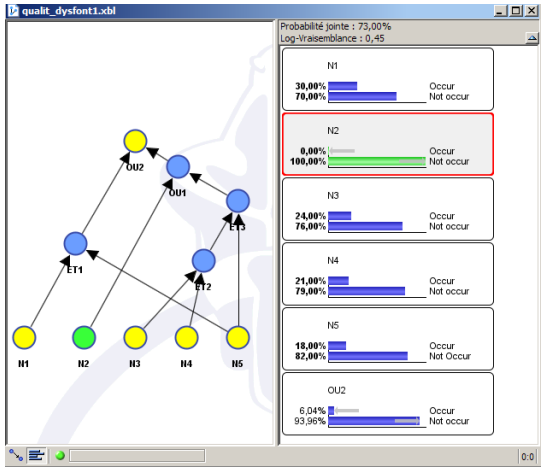


(b) Cas dysfonctionnel : Lecture pour le CIF(3)

FIGURE 4: Lecture des probabilités pour le calcul du CIF(3)



(a) Cas fonctionnel : Lecture pour le RAW(2)



(b) Cas dysfonctionnel : Lecture pour le RAW(2)

FIGURE 5: Lecture des probabilités pour le calcul du RAW(2)

TABLE VI: Classement des facteurs d'importance conjoints

(i,j)	$I_{JR}(i,j)$	(i,j,k)	$I_{JRM}(i,j,k)$	(i,j,k,l)	$I_{JRM}(i,j,k,l)$
(2,5)	0,3353	(1,2,4)	0,0432	(1,3,4,5)	0,73
(1,2)	0,1709	(1,2,3)	0,0378	(1,2,3,4)	-0,18
(1,4)	0,0315	(1,3,4)	-0,1314	(1,2,3,5)	-0,21
(2,4)	0,0302	(1,3,5)	-0,1533	(1,2,4,5)	-0,24
(1,3)	0,0276	(1,4,5)	-0,1752		
(2,3)	0,0265	(1,2,5)	-0,9496		
(3,4)	-0,0920				
(3,5)	-0,1073				
(4,5)	-0,1226				
(1,5)	-0,6932				

entre eux ont permis d'aboutir à un classement des composants permettant de trouver les composants les plus vulnérables vis à vis du fonctionnement (ou dysfonctionnement) du système. L'utilisation d'un outil comme BayesiaLab a permis d'obtenir également toutes les probabilités nécessaires aux calculs des facteurs d'importance conjoints. Au delà de l'application simple traitée dans ce papier, ces facteurs sont intéressants pour la compréhension des relations entre les composants vis à vis du système.

RÉFÉRENCES

[1] F. Meng, "On some structural importance of system components," *Journal of Data Science*, vol. 7, pp. 277–283, 2009.

[2] X. Z. WK Kuo, *Importance measures in reliability, risk and optimization : Principles and applications*, W. . S. Ltd, Ed. Wiley & Sons Ltd, 2012.

[3] Z. X. Kuo W., "Some recent advances on importance measures in reliability," *IEEE Trans on Reliability*, vol. 61, pp. 344–360, 2012.

[4] X. Z. W. Kuo, "Relations and generalizations of importance measures in reliability," *IEEE Trans on Reliability*, vol. 61(3), pp. 659–674, 2012.

[5] Z. Birnbaum, "On the importance of different components in a multicomponent system," in *Multivariate Analysis II*, P. R. Krishnaiah, Ed. Academic Press, 1969.

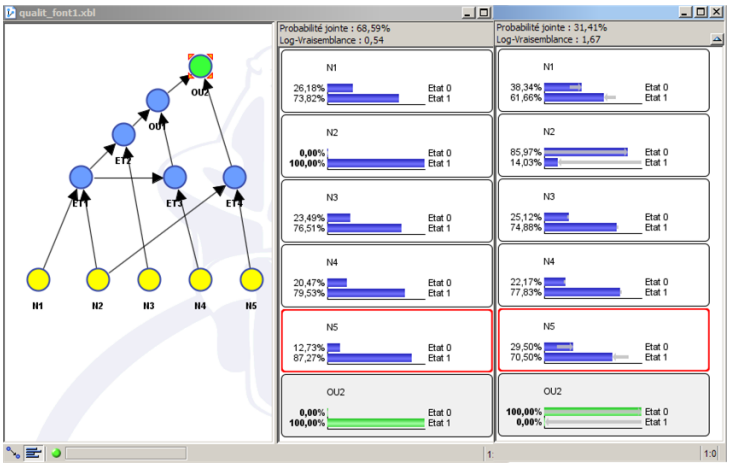
[6] H. E. Lambert, "Fault tree for decision making in system analysis," Ph.D. dissertation, Lawrence Livermore Laboratory, 1975.

[7] J. B. Fussell, "How to hand-calculate system reliability charateristics," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 24, pp. 169–174, 1975.

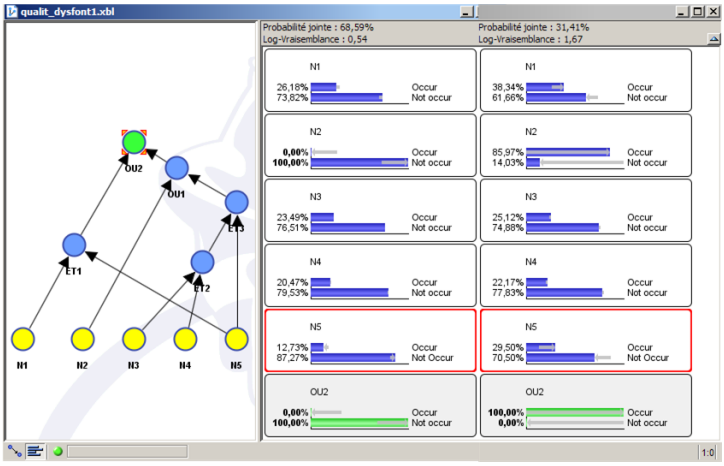
[8] W. Vesely, "A time dependent methodology for fault tree evaluation," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 13, pp. 337–360, 1970.

[9] L. P. E. Zio, "Accounting for components interactions in the differential importance measure," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 91, pp. 1163–1174, 2006.

[10] J. L. X. Gao, L. Cui, "Analysis for joint importance of components in a coherent system," *European Journal of Operationnal Research*, vol. 182, pp. 282–299, 2007.



(a) Cas fonctionnel : Lecture pour le DIF(5) selon 25



(b) Cas dysfonctionnel : Lecture pour le DIF(5) selon 20

FIGURE 6: Lecture des probabilités pour le calcul du DIF(5)

[11] L. C. Hong J.S., "Joint reliability importance of two edges in an undirected network," *IEEE Trans on Reliability*, vol. 42, pp. 17–33, 1993.

[12] M. Armstrong, "Joint reliability importance of components," *IEEE Trans. on Reliability*, vol. 44, pp. 408–412, 1995.

[13] ——, "Reliability importance and dual failure mode components," *IEEE Trans on Reliability*, vol. 46, pp. 212–221, 1997.

TABLE I: Lecture des probabilités pour le calcul des facteurs d'importance

Description	Modèle fonctionnel	Modèle dysfonctionnel
MIF(3)	On lit sur la figure 3a : $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/X_3 = 0\} = 0,6713$ $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/X_3 = 1\} = 0,6906$ La relation 1 donne $I_B(3;\mathbf{p}) = 0,0193$	On lit sur la figure 3b : $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 0ccur/X_i = Occur\} = 0,3287$ $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 0ccur/X_i = NotOccur\} = 0,3094$ La relation 5 donne $I_B(3;\mathbf{p}) = 0,0193$
CIF(3)	On lit sur la figure 4a : $Pr\{X_3 = 1\} = 0,76$ $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} = 0,6859$ La relation 10 (ou 11) donne $I_{C_f}(3;\mathbf{p}) = 0,0214$	On lit sur la figure 4b : $Pr\{X_3 = 0ccur\} = 0,24$ $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 0ccur\} = 0,3141$ La relation 12 (ou 13) donne $I_{C_d}(3;\mathbf{p}) = 0,0147$
RAW(2)	On lit sur la figure 5a : $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/X_2 = 1\} = 0,9396$ La relation 14 donne $I_{RAW}(2;\mathbf{p}) = 1.3698$	On lit sur la figure 5b : $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = Not0ccur/X_2 = NotOccur\} = 0,9396$ La relation 16 donne $I_{RAW}(2;\mathbf{p}) = 1.3698$
RRW(4)	De manière analogue à RAW : $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/X_4 = 0\} = 0,6685$ D'après la relation 17 : $I_{RRW}(4;\mathbf{p}) = 1.0260$	De manière analogue à RAW : $Pr\{\phi(\mathbf{X}) = Not0ccur/X_4 = Occur\} = 0,6685$ D'après la relation 19 : $I_{RRW}(4;\mathbf{p}) = 1.0260$
DIF(5)	On lit directement sur la figure 6a : $Pr\{1_5/\phi(\mathbf{X}) = 1\} = 0,8727$ D'après la relation 26 : $I_{VF}(5;\mathbf{p}) = 0,8727$	On lit sur la figure 6b : $Pr\{X_5 = Occur/\phi(\mathbf{X}) = 0ccur) = 0,2950$ D'après la relation 23 : $I_{VF}(5;\mathbf{p}) = 0,2950$

TABLE IV: Facteurs d'importance conjoints à 2 composants et plus (eq. 30)

(i,j)	$Pr\{\phi(1_i,1_j,\mathbf{X}^{(i,j)}) = 1\}$	$Pr\{\phi(1_i,0_j,\mathbf{X}^{(i,j)}) = 1\}$	$Pr\{\phi(0_i,1_j,\mathbf{X}^{(i,j)}) = 1\}$	$Pr\{\phi(0_i,0_j,\mathbf{X}^{(i,j)}) = 1\}$	$I_{JR}(i,j;\mathbf{p})$
$(1,2)$	0,9909	0	0,82	0	0,1709
$(1,3)$	0,73	0,7024	0,5986	0,5986	0,0276
$(1,4)$	0,0315	0,73	0,6985	0,5986	0,5986
$(1,5)$	0,73	0,6932	0,73	0	-0,6932
$(2,3)$	0,946	0,9195	0	0	0,0265
$(2,4)$	0,946	0,9158	0	0	0,0302
$(2,5)$	1	0,6647	0	0	0,3353
$(3,4)$	0,69058	0,69058	0,6906	0,5986	-0,092
$(3,5)$	0,73	0,511	0,73	0,4037	-0,1073
$(4,5)$	0,73	0,511	0,73	0,3884	-0,1226

TABLE V: Facteurs d'importance conjoints à 3 composants et plus (eq. 37 et 38)

(i,j,k)	$Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/1_i,1_j,0_k)$	$Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/1_i,0_j,0_k)$	$Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/0_i,1_j,0_k)$	$Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/0_i,0_j,0_k)$	$I_{JRM}(i,j,0_k;\mathbf{p})$	$I_{JRM}(i,j,k;\mathbf{p})$
$(1,2,3)$	0,9622	0	0,82	0	0,1422	0,0378
$(1,2,4)$	0,9568	0	0,82	0	0,1368	0,0432
$(1,2,5)$	0,9496	0			0,9496	-0,9496
$(1,3,4)$	0,73	0,5986	0,5986	0,5986	0,1314	-0,1314
$(1,3,5)$	0,73	0,5767	0	0	0,1533	-0,1533
$(1,4,5)$	0,73	0,5548	0	0	0,1752	-0,1752
(i,j,k,l)	$Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/1_i,1_j,1_k,0_l)$	$Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/1_i,1_j,0_k,0_l)$	$Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/1_i,0_j,1_k,0_l)$	$Pr\{\phi(\mathbf{X}) = 1/1_i,0_j,0_k,0_l)$	$I_{JRM}(i,j,k,0_l;\mathbf{p})$	$I_{JRM}(i,j,k,l;\mathbf{p})$
$(1,2,3,4)$	1	0,82	0	0	0,18	-0,1800
$(1,2,3,5)$	1	0,79	0	0	0,21	-0,2100
$(1,2,4,5)$	1	0,76	0	0	0,24	-0,2400
$(1,3,4,5)$	0,73	0,73	0,73	0	-0,73	0,7300