



HAL
open science

Capabilité d'un Processus en Présence de Données et de Contraintes Floues

Daniel Grau

► **To cite this version:**

Daniel Grau. Capabilité d'un Processus en Présence de Données et de Contraintes Floues. QUALITA2013, Mar 2013, Compiègne, France. hal-00823105

HAL Id: hal-00823105

<https://hal.science/hal-00823105>

Submitted on 16 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Capabilité d'un Processus en Présence de Données et de Contraintes Floues

Daniel Grau

Université de Pau, Laboratoire de Mathématiques appliquées, CNRS UMR 5142

Bayonne, France

daniel.grau@univ-pau.fr

Les indices de capabilité sont devenus des outils de décision importants pour mesurer la performance d'un processus de production. Usuellement les observations, la cible et les bornes de tolérance sont des nombres exacts. Cependant il est souvent plus réaliste de considérer ces valeurs comme plus ou moins imprécises. A partir de telles valeurs dites floues, nous construisons des indices de capabilité flous. La performance du processus est ensuite mesurée à l'aide d'un test basé sur une règle à trois décisions. Enfin nous présentons un exemple réel dans une industrie de production laitière afin d'illustrer la démarche proposée sur une variable qualitative ordinale.

Indices de capabilité ; données floues ; test d'hypothèse flou.

I. INTRODUCTION

La possibilité de résumer la qualité d'un processus par un nombre unique a fait le succès des indices de capabilité dans l'industrie de production. Pour une caractéristique d'intérêt X distribuée suivant une loi $N(\mu, \sigma)$ et un intervalle de tolérance $[LSL; USL]$ symétrique (la cible T se situe en $m = (LSL + USL)/2$, milieu de l'intervalle de tolérance), les indices C_p , C_{pk} , C_{pm} et C_{pmk} sont les plus utilisés par les industriels. Vännman [1] généralise les 4 indices précédents en proposant l'indice

$$C_p(u, v) = \frac{d - u|\mu - m|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}},$$

où u et v sont deux paramètres positifs ou nuls, et $d = (USL - LSL)/2$ est la moitié de l'intervalle de tolérance. Ainsi les valeurs $(u, v) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ permettent de retrouver les quatre indices usuels précédents. Cependant, si l'indice $C_p(u, v)$ est bien adapté au cas de tolérances symétriques ($T = m$), il possède des propriétés indésirables lorsque les tolérances sont asymétriques ($T \neq m$). Ainsi pour pallier à ces inconvénients, Chen et Pearn [2] ont proposé d'utiliser la famille

$$C_p''(u, v) = \frac{d^* - uA^*}{3\sqrt{\sigma^2 + vA^2}},$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad A &= \max\{d(\mu - T)/D_u, d(T - \mu)/D_l\}, \\ A^* &= \max\{d^*(\mu - T)/D_u, d^*(T - \mu)/D_l\}, \quad D_u = U - T, \\ D_l &= T - L, \text{ et } d^* = \min\{D_u, D_l\}. \end{aligned}$$

Usuellement les observations quantitatives continues sont supposées être représentées par des valeurs exactes. En réalité les observations sont des quantités évaluées seulement avec un nombre fini de décimales, qui ne sont donc pas des nombres exacts. Il est aussi fréquent de transformer une variable qualitative ordinale en valeur numérique avec toute l'imprécision que cela peut comporter. Quelquefois ce sont même les bornes de tolérance et la cible qui peuvent être considérées comme imprécises. C'est pour ces raisons que les auteurs ont proposé des indices de capabilité en utilisant la théorie des ensembles flous. Yongting [3] fut le premier à définir un indice de capabilité flou. Lee [4] s'intéresse à l'indice C_{pk} lorsque les observations et les tolérances sont des nombres flous triangulaires. Parchami, Mashinchi, Yavari et Maleki [5] étudient le cas de tolérances floues, travaux prolongés par [6] et [7]. Un certain nombre d'auteurs [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15] utilisent l'estimation floue introduite par Buckley [16, 17]. Tsai et Chen [18, 19] puis d'autres [20, 21, 22] utilisent les coupes alpha pour représenter la fonction d'appartenance de certains indices de capabilité flous. Notons que seuls les travaux de [10, 11, 19] proposent des procédures de test pour mesurer la performance du processus.

L'objectif de cet exposé est de définir une famille d'indices flous $\tilde{C}_p''(u, v)$ adaptée au cas le plus général où observations, tolérances et cible sont floues, puis de proposer une procédure de test de la performance du processus. Ce papier est organisé de la façon suivante. Au paragraphe 2 nous définissons l'estimateur de $C_p''(u, v)$ et rappelons sa fonction de répartition sous l'hypothèse de normalité. Au paragraphe 3 nous rappelons brièvement ce que sont les ensembles et les nombres flous. Le paragraphe 4 est consacré à l'obtention de la fonction d'appartenance de l'indice de capabilité flou $\tilde{C}_p''(u, v)$. Nous définissons ensuite un test d'hypothèse flou conduisant à trois décisions possibles et terminons par une application à une variable ordinale dans l'industrie laitière.

II. L'ESTIMATEUR $\hat{C}_p''(u, v)$

Plusieurs critères peuvent être utilisés pour mesurer la performance d'un processus. Le plus ancien est la proportion de pièces non conformes (à l'extérieur des tolérances). Plus récemment, la proximité de la moyenne du processus avec la cible est devenue un élément aussi important. L'intérêt de la famille d'indices $C_p''(u, v)$ est de pouvoir tenir compte simultanément de ces deux aspects. Pour une variable de distribution normale, Grau [23, 24] obtient des résultats théoriques mettant en évidence les liens entre indices de capabilité, pourcentage de non-conformes, et centrage du processus. Ces résultats permettent à l'utilisateur de choisir à l'intérieur de la famille $C_p''(u, v)$, le couple (u, v) satisfaisant au mieux ses exigences.

Pour estimer l'indice $C_p''(u, v)$ il est nécessaire de recueillir des observations. Soient X_1, X_2, \dots, X_n un échantillon aléatoire d'une distribution normale X de moyenne μ et de variance σ^2 mesurant la variable d'intérêt du processus. Pour estimer l'indice $C_p''(u, v)$, nous remplaçons μ et σ^2 par les estimateurs usuels $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ et $S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$. Ainsi nous définissons l'estimateur $\hat{C}_p''(u, v)$ par

$$\hat{C}_p''(u, v) = \frac{d^* - u\hat{A}^*}{3\sqrt{S^2 + v\hat{A}^2}} \quad (1)$$

où $\hat{A} = \max\{(1-\delta)^{-1}(\bar{X}-T), (1+\delta)^{-1}(T-\bar{X})\}$, $\hat{A}^* = (d^*/d)\hat{A} = (1-|\delta|)\hat{A}$, et $\delta = (T-m)/d$ qui est une quantité permettant de situer T dans l'intervalle de tolérance.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n les n valeurs observées sur l'échantillon. Une estimation $\hat{C}_p''(u, v)$ de $C_p''(u, v)$ est obtenue en substituant $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$ à \bar{X} et $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n$ à S^2 dans l'équation (1). Sous l'hypothèse de normalité, Grau [25] donne la fonction de répartition de $\hat{C}_p''(u, v)$ sous la forme

$$F_{\hat{C}_p''(u, v)}(x) = 1 - \int_0^{K(x)} H(x, t) dt, \quad \text{pour } x > 0, \quad (2)$$

où

$$K(x) = b\sqrt{n} / \left((1-|\delta|)u + 3x\sqrt{v} \right), \quad \text{avec } b = 3C_p'' \text{ et } C_p'' = C_p''(0, 0),$$

$$H(x, t) = F_K \left(\left(\frac{b\sqrt{n} - (1-|\delta|)ut}{3x} \right)^2 - vt^2 \right) f_Y(t)$$

avec $F_K(x)$ la fonction de répartition de $K = nS / \sigma$ distribuée suivant une loi de χ^2 à $n-1$ degrés de liberté,

$f_Y(t) = (1-\delta)\phi((1-\delta)t - \sqrt{n}\xi) + (1+\delta)\phi((1+\delta)t + \sqrt{n}\xi)$, avec $\xi = (\mu - T) / \sigma$ et $\phi(x)$ la densité de probabilité de la loi normale $N(0, 1)$.

III. NOTIONS ELEMENTAIRES SUR LES ENSEMBLES ET LES NOMBRES FLOUS

Un sous-ensemble E d'un ensemble Ω est associé à sa fonction caractéristique $\mu_E : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $\mu_E(x) = 1$ si $x \in E$ et $\mu_E(x) = 0$ si $x \notin E$. Ainsi un élément x appartient soit totalement à E , soit pas du tout. Un sous-ensemble flou \tilde{E} de Ω est défini par sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{E}} : \Omega \rightarrow [0, 1]$. Ainsi un élément x appartient à \tilde{E} avec un certain degré d'appartenance $\mu_{\tilde{E}}(x)$. Outre la forme de sa fonction d'appartenance, d'autres éléments peuvent caractériser un ensemble flou tels que son noyau $n(\tilde{E}) = \{x \in \Omega / \mu_{\tilde{E}}(x) = 1\}$, son support $supp(\tilde{E}) = \{x \in \Omega / \mu_{\tilde{E}}(x) > 0\}$, sa hauteur $h(\tilde{E}) = \max(\mu_{\tilde{E}}(x) / x \in \Omega)$, ou ses coupes α (α -coupes) définies par $(\tilde{E})_\alpha = \{x \in \Omega / \mu_{\tilde{E}}(x) \geq \alpha\}$. Quelques exemples de sous-ensembles flous usuels sont représentés sur la figure 1.

Un nombre flou \tilde{x} est un sous-ensemble flou de hauteur égale à 1, de noyau unique et dont la fonction d'appartenance est convexe. La coupe α d'un nombre flou est donc définie par $(\tilde{x})_\alpha = \{x \in \mathbf{R} / \mu_{\tilde{x}}(x) \geq \alpha\} = [(\tilde{x})_\alpha^L; (\tilde{x})_\alpha^U]$ qui est un intervalle fini fermé.

Notons que par la suite, pour un nombre flou, nous étendons la définition de la coupe α au cas $\alpha = 0$ en posant $(\tilde{x})_0 = [(\tilde{x})_0^L; (\tilde{x})_0^U]$, où $(\tilde{x})_0^L = \min(supp(\mu_{\tilde{x}}))$ et $(\tilde{x})_0^U = \max(supp(\mu_{\tilde{x}}))$.

IV. INDICES DE CAPABILITE FLOUS $\tilde{C}_p''(u, v)$

Les tolérances floues et la cible floue sont notées $\tilde{L}\tilde{S}L$, $\tilde{U}\tilde{S}L$, \tilde{T} et leurs fonctions d'appartenance $\mu_{\tilde{L}\tilde{S}L}$, $\mu_{\tilde{U}\tilde{S}L}$ et $\mu_{\tilde{T}}$. Les observations floues observées sur l'échantillon sont notées $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$, et leurs fonctions d'appartenance $\mu_{\tilde{x}_1}, \mu_{\tilde{x}_2}, \dots, \mu_{\tilde{x}_n}$. Basé sur le principe d'extension [26], $\tilde{\bar{x}} = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i / n$ et $\tilde{s}^2 = \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i - \tilde{\bar{x}})^2 / n$ sont des nombres flous.

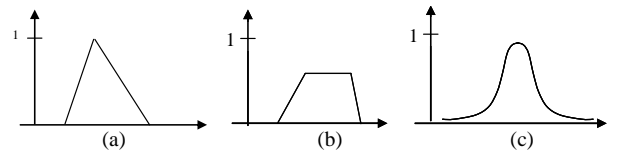


Figure 1. Sous-ensemble flou : (a) triangulaire, (b) trapézoïdal, (c) gaussien

Ainsi dans l'équation (1), en remplaçant LSL par $L\tilde{S}L$, USL par $U\tilde{S}L$, T par \tilde{T} , \bar{X} par \tilde{x} et S^2 par \tilde{s}^2 , on obtient une estimation floue $\tilde{c}_p''(u, v)$ de $C_p''(u, v)$. L'expression analytique de la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{c}_p''(u, v)}$ de $\tilde{c}_p''(u, v)$ est impossible à obtenir car la relation entre $\tilde{c}_p''(u, v)$ et les données est non linéaire. Pour surmonter ce problème, suivant la méthodologie de Tsai et Chen [18, 19], nous nous contentons d'une approximation de la fonction d'appartenance en utilisant les coupes α de l'indice flou $\tilde{c}_p''(u, v)$, définies par

$$(\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha = \left[(\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^L; (\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^U \right]$$

où

$$(\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^L = \min \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{x}_i)_\alpha^L \leq x_i \leq (\tilde{x}_i)_\alpha^U \text{ for } 1 \leq i \leq n \\ \frac{x_{d^*} - ux_{a^*}}{3\sqrt{s^2 + vx_{a^2}}} : \begin{array}{l} (L\tilde{S}L)_\alpha^L \leq x_{LSL} \leq (L\tilde{S}L)_\alpha^U \\ (U\tilde{S}L)_\alpha^L \leq x_{USL} \leq (U\tilde{S}L)_\alpha^U \\ (\tilde{T})_\alpha^L \leq x_T \leq (\tilde{T})_\alpha^U \end{array} \end{array} \right\}, \quad (3a)$$

$$(\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^U = \max \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{x}_i)_\alpha^L \leq x_i \leq (\tilde{x}_i)_\alpha^U \text{ for } 1 \leq i \leq n \\ \frac{x_{d^*} - ux_{a^*}}{3\sqrt{s^2 + vx_{a^2}}} : \begin{array}{l} (L\tilde{S}L)_\alpha^L \leq x_{LSL} \leq (L\tilde{S}L)_\alpha^U \\ (U\tilde{S}L)_\alpha^L \leq x_{USL} \leq (U\tilde{S}L)_\alpha^U \\ (\tilde{T})_\alpha^L \leq x_T \leq (\tilde{T})_\alpha^U \end{array} \end{array} \right\}, \quad (3b)$$

avec

$$\begin{aligned} x_a &= \max \{ (1 - x_\delta)^{-1}(\bar{x} - x_T), (1 + x_\delta)^{-1}(x_T - \bar{x}) \}, \\ x_{a^*} &= (1 - |x_\delta|)x_a, \quad x_{d^*} = \min(x_{USL} - x_T, x_T - x_{LSL}), \\ x_\delta &= (x_T - x_m) / x_d, \quad x_d = (x_{USL} - x_{LSL}) / 2, \\ x_m &= (x_{LSL} + x_{USL}) / 2, \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n \quad \text{et} \\ s^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de différentes valeurs de α , la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{c}_p''(u, v)}$ est construite de la façon suivante :

$$\mu_{\tilde{c}_p''(u, v)}(x) = \begin{cases} L(x), & (\tilde{c}_p''(u, v))_0^L \leq x \leq (\tilde{c}_p''(u, v))_1^L \\ 1, & (\tilde{c}_p''(u, v))_1^L \leq x \leq (\tilde{c}_p''(u, v))_1^U \\ R(x), & (\tilde{c}_p''(u, v))_1^U \leq x \leq (\tilde{c}_p''(u, v))_0^U \end{cases}$$

où $L(x)$ et $R(x)$ représentent les formes gauche et droite de la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{c}_p''(u, v)}$ définies par les coupes α .

Notons que les équations (3a) et (3b) forment une paire d'équations non linéaires sous contraintes qui ne peuvent être

résolues que par des logiciels spécialisés. Dans notre exemple au paragraphe 6 nous utiliserons le solveur d'Excel qui a l'avantage de ne pas nécessiter de programmation et d'être accessible à tout utilisateur.

V. TEST DE LA PERFORMANCE D'UN PROCESSUS

Pour tester si le processus est capable, nous considérons les hypothèses suivantes:

$H_0 : C_p''(u, v) \leq c$ Le processus n'est pas capable

$H_1 : C_p''(u, v) > c$ Le processus est capable.

Pour des données exactes la performance du processus peut être établie à partir de la p -value, c'est-à-dire, pour une valeur donnée de c , la probabilité que $\hat{C}_p''(u, v)$ soit supérieur à l'estimation observée $\tilde{c}_p''(u, v)$,

$$\begin{aligned} p\text{-value} &= P(\hat{C}_p''(u, v) > \tilde{c}_p''(u, v) | C_p''(u, v) = c) \\ &= \int_0^{K(\tilde{c}_p''(u, v))} H(\tilde{c}_p''(u, v), t) dt \end{aligned} \quad (4)$$

Si la p -value est plus petite que le niveau de signification θ , alors nous rejetons H_0 et considérons que le processus est capable. L'équation (4) nécessite la connaissance de $b = 3C_p''$. Pour une valeur c de la capabilité requise, Grau [25] montre que $b = 3c\sqrt{1 + v\xi^{*2}} + u(1 - |\delta|)\xi^*$ avec $\xi^* = \max((1 - \delta)^{-1}\xi, -(1 + \delta)^{-1}\xi)$. Dans ces équations $\xi = (\mu - T) / \sigma$ est inconnu puisque μ et σ sont inconnus, mais ξ peut être estimé à partir de l'échantillon par $\hat{\xi} = (\bar{x} - T) / s$.

Considérons maintenant le cas de données, d'une cible et de tolérances floues. La valeur de $\tilde{c}_p''(u, v)$ devient floue, et est exprimée par sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{c}_p''(u, v)}$. Il n'est donc plus possible d'utiliser la règle de décision binaire utilisée dans le cas de valeurs exactes. Soient δ_α^L , ξ_α^L et δ_α^U , ξ_α^U les valeurs permettant d'obtenir les bornes $(\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^L$ et $(\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^U$ des α -coupes $(\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha$. Remarquons que δ_α^L est différent de $(\tilde{\delta})_\alpha^L$ qui est égal à $\min\{(x_T - x_m) / x_d | x_T \in (\tilde{T})_\alpha, x_{LSL} \in (L\tilde{S}L)_\alpha, x_{USL} \in (U\tilde{S}L)_\alpha\}$. De même $\delta_\alpha^U \neq (\tilde{\delta})_\alpha^U$, $\xi_\alpha^L \neq (\tilde{\xi})_\alpha^L$, et $\xi_\alpha^U \neq (\tilde{\xi})_\alpha^U$. Par conséquent δ_α^L , ξ_α^L , δ_α^U , et ξ_α^U ne sont pas les bornes des coupes de nombres flous. Il en est de même pour les p -values $p_\alpha^L = P(\hat{C}_p''(u, v) \geq (\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^L | C_p''(u, v) = c)$ et $p_\alpha^U = P(\hat{C}_p''(u, v) \geq (\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^U | C_p''(u, v) = c)$, solutions de l'équation (4) associées aux valeurs $(\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^L$, δ_α^L , ξ_α^L , et $(\tilde{c}_p''(u, v))_\alpha^U$, δ_α^U , ξ_α^U . Nous adaptons donc la règle de décision précédente de la façon suivante

- Si $\max\{p_{\alpha}^j \mid j \in \{L, U\}, \alpha \in [0, 1]\} < \theta$, alors on rejette H_0 et on accepte H_1 ,

- Si $\min\{p_{\alpha}^j \mid j \in \{L, U\}, \alpha \in [0, 1]\} > \theta$, alors on accepte H_0 et on rejette H_1 ,

- Dans tous les autres cas, H_0 et H_1 ne peuvent être ni acceptés, ni rejetés.

VI. EXEMPLE

Pour illustrer notre approche nous utilisons un exemple issu de «La Fromagerie des Chaumes». L'étude porte sur le «Brebiau», un fromage à base de lait de brebis. De la standardisation du lait jusqu'à l'emballage, la fabrication du fromage passe par différentes étapes au cours desquelles un certain nombre de paramètres sont surveillés. Quelques jours après l'emballage, la phase finale du processus consiste en un examen sensoriel effectué par 5 personnes. Différents critères d'apparence, de texture et de qualité olfacto-gustatives sont évalués. La variable que nous étudions est la saveur du fromage. C'est une variable qualitative dont les modalités sont : trop faible, moyennement faible, un peu faible, normal, un peu fort, moyennement fort, trop fort. Pour chaque fromage est attribuée une saveur correspondant à une moyenne de l'opinion des 5 dégustateurs. La difficulté d'apprécier le goût d'un fromage se traduit par une mesure d'autant moins précise que le fromage est hors norme. Pour cette raison les modalités sont transformées en scores représentés par des nombres flous triangulaires que nous notons $[a \ b \ c]$ où b représente le noyau et l'intervalle $[b ; c]$ le support du nombre flou. Ces nombres flous triangulaires sont donnés dans le tableau 1. Bien que les noyaux de ces nombres flous suivent une distribution discrète, on considérera par la suite qu'ils peuvent être approchés par une distribution normale. L'objectif de la production est d'obtenir une saveur normale, et de ne pas admettre des saveurs trop faibles ou trop fortes. Pour mesurer la performance du processus il est nécessaire de choisir un indice dans la famille $C_p''(u, v)$. Ce choix pourrait être effectué en fonction de critères tels qu'ils sont définis par Grau [24]. Sans rentrer dans ces considérations, à titre d'exemple, nous utiliserons l'indice $C_p''(0.6, 0.2)$, et considérerons que le processus est capable si $C_p''(0.6, 0.2) > 1$.

A. La cible et les tolérances sont des nombres exacts

Dans un premier temps nous considérons la cible et les tolérances comme des valeurs exactes. Nous prenons $T = 0$, $L = -10$ et $U = 10$. Pour des raisons de confidentialité les données utilisées par la suite sont fictives. 50 fromages ont été analysés et les différentes modalités observées sont transformées en scores conformément à la table 1. Les noyaux de ces 50 observations sont donnés dans la table 2. Afin d'obtenir l'estimation floue $\tilde{c}_p''(0.6, 0.2)$, les coupes α des scores flous sont calculées pour $\alpha = 0, 1$ (0.1). Puis en utilisant les équations (3a) et (3b), les coupes α de

$\tilde{c}_p''(0.6, 0.2)$ sont obtenues en utilisant le solveur d'Excel, et sont montrées dans la table 3. La fonction d'appartenance de $\tilde{c}_p''(0.6, 0.2)$ est représentée dans la Fig. 2.

Bien que l'on ait des observations floues triangulaires la fonction d'appartenance n'est pas une fonction triangulaire. Pour déterminer si le processus satisfait la condition de qualité ($C_p''(0.6, 0.2) > 1$) nous utilisons les règles de décision développées au § 5 avec un niveau de signification $\theta = 0.05$. Les quantités δ_{α}^L , ξ_{α}^L , p_{α}^L , δ_{α}^U , ξ_{α}^U , et p_{α}^U sont données dans la table 4. Nous avons $\max\{p_{\alpha}^j \mid j \in \{L, U\}, \alpha \in \{0, 0.1, \dots, 1\}\} = 0.043 < 0.05$. Par conséquent nous rejetons H_0 et acceptons H_1 , donc nous concluons que le processus est capable.

B. La cible et les tolérances sont des nombres flous

Nous considérons maintenant que la cible et les bornes de tolérance sont des nombres triangulaires flous, $T = [-1 \ 0 \ 1]$, $LSL = [-15 \ -11 \ -8]$ et $USL = [8 \ 11 \ 15]$. La Table 4 nous donne les valeurs de $(\tilde{c}_p''(0.6, 0.2))_{\alpha}^L$, δ_{α}^L , ξ_{α}^L , p_{α}^L , $(\tilde{c}_p''(0.6, 0.2))_{\alpha}^U$, δ_{α}^U , ξ_{α}^U , et p_{α}^U obtenues. La fonction d'appartenance de $\tilde{c}_p''(0.6, 0.2)$ est représentée dans la Fig. 2. avec un niveau de signification $\theta = 0.05$, nous avons $\max\{p_{\alpha}^j \mid j \in \{L, U\}, \alpha \in [0, 1]\} = 1 > 0.05$ et $\min\{p_{\alpha}^j \mid j \in \{L, U\}, \alpha \in [0, 1]\} = 0.000 < 0.05$. Donc H_0 et H_1 ne peuvent être ni acceptées ni rejetées.

VII. CONCLUSION

Les indices de capabilité sont largement utilisés dans l'industrie pour des processus dont les tolérances sont symétriques. La famille d'indices $C_p''(u, v)$ permet non seulement de traiter le cas des tolérances asymétriques, mais permet aussi à l'utilisateur de choisir le couple (u, v) correspondant au mieux à ses objectifs. Considérer que les observations et les contraintes du processus sont des valeurs exactes n'est pas toujours réaliste. Dans ce papier nous envisageons le cas le plus général où non seulement les observations, mais aussi la cible et les tolérances sont floues. Ceci conduit à la définition d'une famille d'indices de capabilité flous dont la fonction d'appartenance ne peut être obtenue analytiquement, mais dont on peut obtenir une approximation à l'aide des coupes α . Pour évaluer la performance du processus, le test binaire usuel n'est pas adapté à l'environnement flou. Il est donc proposé de rajouter une troisième décision lorsque le caractère flou ne permet de décider ni pour l'une ni pour l'autre des deux hypothèses. Un exemple sur une variable ordinale dans une entreprise laitière permet d'illustrer la méthodologie proposée.

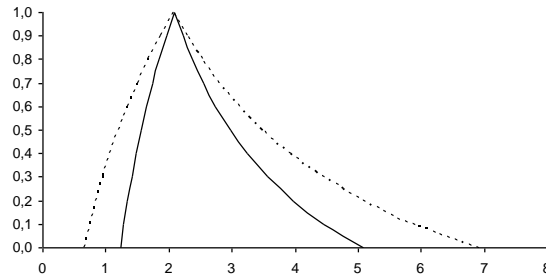


Figure 2. Fonction d'appartenance de $\tilde{c}_p(0.6,0.2)$ avec une cible et des tolérances exactes (ligne pleine) et floues (ligne discontinue)

TABLE I. CORRESPONDANCE ENTRE MODALITES ET SCORES FLOUS

Trop faible	Moyennement faible	Un peu faible	Normal	Un peu fort	Moyennement faible	Trop fort
[-20 -15 -10]	[-12 -8 -4]	[-5 -3 -1]	[-1 0 1]	[1 3 5]	[4 8 12]	[10 15 20]

TABLE II. NOYAU DES 50 SCORES

0	0	0	-3	0	0	0	0	0	-3	3	0	0	-3	3	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3			
0	0	0	3	0	8	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE III. α - COUPES DE $\tilde{c}_p(0.6,0.2)$ AVEC LES VALEURS ASSOCIEES DE δ_α^L , ξ_α^L , p_α^L , δ_α^U , ξ_α^U , p_α^U QUAND LSL, T, USL SONT DES NOMBRES EXACTS

α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$(\tilde{c}_p(0.6,0.2))_\alpha^L$	1.227	1.284	1.345	1.411	1.484	1.563	1.649	1.743	1.846	1.960	2.085
δ_α^L	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ξ_α^L	-0.260	-0.242	-0.222	-0.201	-0.178	-0.152	0.162	0.132	0.100	0.064	0.023
p_α^L	0.043	0.018	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$(\tilde{c}_p(0.6,0.2))_\alpha^U$	5.080	4.457	3.966	3.570	3.244	2.972	2.741	2.543	2.373	2.221	2.085
δ_α^U	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ξ_α^U	0.066	0.036	0.011	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.023
p_α^U	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

TABLE IV. α - COUPES DE $\tilde{c}_p(0.6,0.2)$ AVEC LES VALEURS ASSOCIEES DE δ_α^L , ξ_α^L , p_α^L , δ_α^U , ξ_α^U , p_α^U QUAND LSL, T, USL SONT DES NOMBRES FLOUS

α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$(\tilde{c}_p(0.6,0.2))_\alpha^L$	1.227	1.284	1.345	1.411	1.484	1.563	1.649	1.743	1.846	1.960	2.085
δ_α^L	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ξ_α^L	-0.260	-0.242	-0.222	-0.201	-0.178	-0.152	0.162	0.132	0.100	0.064	0.023
p_α^L	0.043	0.018	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$(\tilde{c}_p(0.6,0.2))_\alpha^U$	5.080	4.457	3.966	3.570	3.244	2.972	2.741	2.543	2.373	2.221	2.085
δ_α^U	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ξ_α^U	0.066	0.036	0.011	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.023
p_α^U	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

REFERENCES

- [1] K. Vännman, "A unified approach to capability indices", Stat. Sin., vol. 5(2), pp. 805-820, 1995.
- [2] K. S. Chen, W. L. Pearn, "Capability indices for processes with asymmetric tolerances", J. Chin. Inst. Eng., vol. 24(7), pp. 559-568, 2001.
- [3] C. Yongting, "Fuzzy quality and analysis on fuzzy probability", Fuzzy Sets Syst., vol. 83(2), pp. 283-290, 1996.
- [4] H. T. Lee, " C_{pk} index estimation using fuzzy numbers", Eur. J. Oper. Res., vol. 129(3), pp. 683-688, 2001.
- [5] A. Parchami, M. Mashinchi, A. R. Yavari, H. R. Maleki, "Process capability indices as fuzzy numbers", Austrian J. Stat. vol. 34(4), pp. 391-402, 2005.

- [6] A. Parchami, M. Mashinchi, H. R. Maleki, "Fuzzy confidence intervals for fuzzy process capability index". *J. Intell. Fuzzy Syst.* vol. 17(3), pp. 287-295, 2006.
- [7] A. Parchami, M. Mashinchi, V. Partovi Nia, "A consistent confidence interval for fuzzy capability index", *Appl. Comput. Mat.*, vol. 7(1), pp. 119-125, 2008.
- [8] A. Parchami, M. Mashinchi, "Fuzzy estimation for process capability indices", *Inf. Sci.*, vol. 177(6), pp. 1452-1462, 2007.
- [9] S. Cheng, B. Hsu, M. Shu, "Fuzzy testing and selecting better processes performance", *Ind. Manag. Data Syst.*, vol. 107(6), pp. 862-881, 2007.
- [10] B. Hsu, M. Shu, "Fuzzy inference to assess manufacturing process capability with imprecise data", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 186(2), pp. 652-670, 2008.
- [11] C. Wu C. . "Decision-making in testing process performance with fuzzy data", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 193(2), pp. 499-509, 2009.
- [12] I. Kaya, C. Kahraman, "Fuzzy process capability analyses with fuzzy normal distribution", *Expert Syst. Appl.*, vol. 37(7), pp. 5390-5403, 2010.
- [13] I. Kaya, C. Kahraman, "Process capability analyses with fuzzy parameters", *Expert Syst. Appl.*, vol. 38(9), pp. 11918-11927, 2011.
- [14] I. Kaya, C. Kahraman, "A new perspective on fuzzy process capability indices: robustness", *Expert Syst. Appl.*, vol. 37(9), pp. 4593-4600, 2010.
- [15] I. Kaya, C. Kahraman, "Fuzzy process capability indices with asymmetric tolerances", *Expert Syst. Appl.*, vol. 38(12), pp. 14882-14890, 2011.
- [16] J. J. Buckley, "Fuzzy statistics: hypothesis testing", *Soft Comput.*, vol. 9(7), pp. 512-518, 2005.
- [17] J. J. Buckley, "Fuzzy systems". *Soft Comput.*, vol. 9(10), pp. 757-760, 2005.
- [18] C. Tsai, C. Chen, "Measuring process capability index C_{pk} with fuzzy data", *J. Inf. Optim. Sci.*, vol. 27(3), pp. 733-746, 2006.
- [19] C. Tsai, C. Chen, "Making decision to evaluate process capability index C_p with fuzzy numbers", *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 30(3), pp. 334-339, 2006.
- [20] C. Kao, S. Liu "Fractional programming approach to fuzzy weighted average", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 120(3), pp. 435-444, 2001.
- [21] C. Chen C, C. Lai, H. Nien, "Measuring process capability index C_{pm} with fuzzy data", *Qual. Quant.*, vol. 44(3), pp. 529-535, 2010.
- [22] M. Abdolshah, R. M. Yusuff, T. S. Hong, M. Y. B. Ismail, A. N. Sadigh, "Measuring process capability index C_{pmk} with fuzzy data and compare it with other fuzzy process capability indices". *Expert Syst. Appl.*, vol. 38(6), pp. 6452-6457, 2011.
- [23] D. Grau, "On the choice of a capability index with an application in carbon fibre manufacturing", *Int. J. Qual. Eng. Technol.*, vol. 1(4), pp. 373-394, 2010.
- [24] D. Grau, "Process yield and capability indices", *Commun. Stat-Theory Methods*, vol. 40(15), pp. 2751-2771, 2011.
- [25] D. Grau "Lower confidence bound for capability indices with asymmetric tolerances and gauge measurement errors", *Int. J. Qual. Eng. Technol.*, vol. 2(3), pp. 212-228, 2011.
- [26] L. A. Zadeh "Fuzzy sets", *Inf. Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.