



HAL
open science

Mathématiques et Transport Urbain

Frédéric Muttin

► **To cite this version:**

| Frédéric Muttin. Mathématiques et Transport Urbain. 2012. <hal-00820180>

HAL Id: hal-00820180

<https://hal.science/hal-00820180v1>

Preprint submitted on 3 May 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Mathématiques et Transport Urbain

Frédéric Muttin *

Table des matières

1	Stature mathématique de la représentation du transport urbain	3
2	Nos propositions de recherche en mathématiques	8
2.1	Analyse des données	8
2.2	Géométrie continue	10
2.3	Géométrie discrète	12
2.4	Graphe de Markov	14
2.5	Marche aléatoire	16
2.6	Automates cellulaires	17
2.7	Méthode de percolation	20
3	Casablanca, contexte, questionnement et discussion	22
4	Conclusion	26

Résumé

Nous décrivons un travail d'investigation sur des activités en mathématiques appliquées. Elles traitent des problèmes de transport dans la ville de demain. La situation porte sur la mobilité urbaine des citoyens et les questionnements des usagers, des autorités publiques

*Ecoles d'Ingénieurs en Génie des Systèmes Industriels, EIGSI, 26, rue de Vaux-de-Foletier, F-17041 La Rochelle cedex 1, France, et EIGSICA Casablanca, Maroc, muttin@eigsi.fr

et de toutes les parties prenantes. Il s'agit d'organiser mieux et de savoir comment mieux utiliser les moyens disponibles. Nous partons des problématiques générales, exposées du point de vue pratique, pour aller vers des activités de recherche spécifiques, et des méthodes mathématiques. Sept sujets de recherche en mathématiques sont établis, avec leurs méthodologies et les objectifs d'un travail de recherche. Une première approche concrète abordera la ville de Casablanca. Le texte revêt un intérêt général pour les chercheurs du domaine, les autorités publiques et tous ceux qui s'intéressent au rôle des mathématiques dans la société. Les problèmes complexes possèdent beaucoup de variables. Ils demandent des efforts de modélisation, d'algorithmique et de fortes capacités de représentation.

Mots clés : déplacement urbain, réseau de transport, prospective scientifique

00A09, 01A67, 05C62, 60K35

Une démarche de prospective scientifique aide à bâtir le futur de la recherche. Le transport urbain touche les citoyens, les biens et les marchandises transportés, dans un réseau, au milieu d'une ville, entre ses quartiers. Les mathématiques présentées regroupent la statistique, la géométrie et aident à prendre des décisions optimales.

Un travail de recherche établit des modèles et des méthodes. Lesquels, à partir de données, produisent des nombres issus de calcul. L'étude comprend une représentation de la solution, une interprétation des résultats et une validation des hypothèses. Nous testerons notre démarche sur la ville de Casablanca. Nous envisagerons plusieurs types de données, et verrons sur quelles variables agir.

Notre texte possède trois chapitres. Le premier donne la vision mathématique des problématiques liées à la ville durable et à sa stratégie en matière de transport urbain. Les sujets prospectifs sont décrits au chapitre 2. Ils sont repris pour Casablanca au chapitre 3. Nous donnons nos premières réflexions sur la mise en pratique.

1 Stature mathématique de la représentation du transport urbain

Nous énumérons des sujets prioritaires et concrets en matière de transport urbain. Notre vision adopte une formulation mathématique et abstraite des informations à traiter. D'autres sujets sans modélisation mathématique directe forment la limite de notre propos.

En premier lieu, il nous paraît souhaitable de mieux connaître les données du problème. L'objectif peut être atteint par une analyse statistique de questionnaires remis aux résidents. La pratique existe depuis longtemps pour l'usager des transports collectifs. La thématique mathématique vise au dépouillement d'un sondage d'opinions. Le traitement fait appel à l'analyse de données et plus largement aux méthodes statistiques.

La représentation d'informations géométriques utilise couramment un logiciel de Conception Assistée par Ordinateur (CAO) pour les pièces mécaniques. Le procédé s'applique très bien aux surfaces.

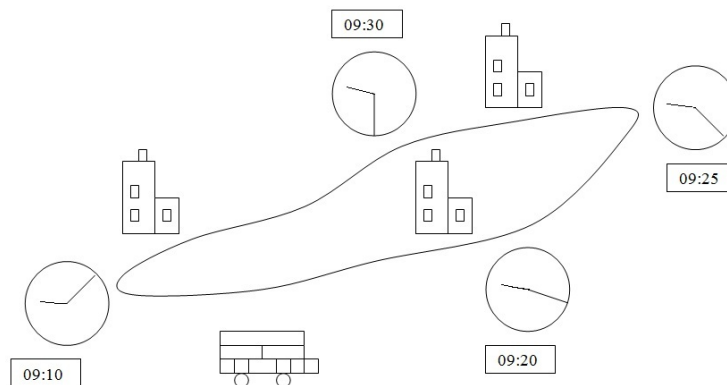


FIGURE 1 – Circuit des arrêts et des horaires d'un bus

La ligne fermée et les horloges de la figure 1 schématisent dans un espace 2D le circuit et les horaires de passage d'un bus à ses arrêts. Le bus parcourt

un circuit fermé. Il revient à son point de départ. Sa tournée recommence comme la précédente.

Nous définissons une représentation originale et abstraite des informations. La vision mathématique aborde la géométrie. Les surfaces appartiennent au domaine des variétés. Une variété torique peut porter la représentation des informations de la façon suivante.

La composante sur la grande circonférence d'un tore donne le circuit fermé de la navette. Les arrêts de bus se répartissent sur la grande circonférence du tore. La composante sur la petite circonférence représente le temps d'une journée. Les horaires de passage du bus correspondent à la petite circonférence de ce tore.

La figure 2 schématise le même circuit horaire sur une surface torique. Elle assemble les informations géographiques et temporelles.

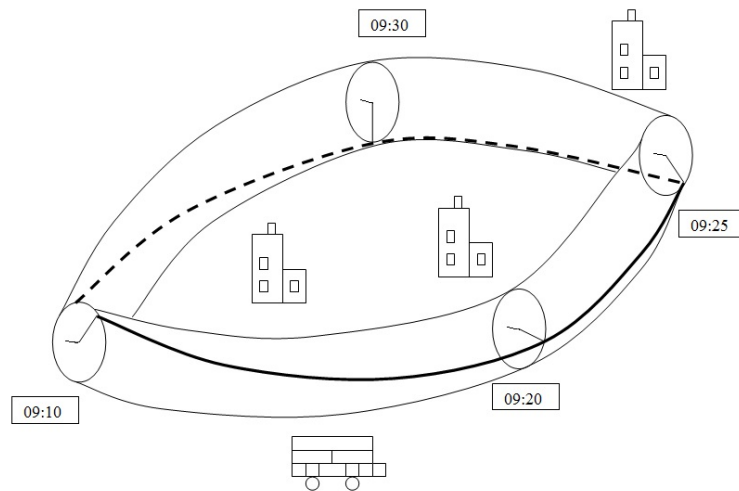


FIGURE 2 – Chronotope torique des arrêts et des horaires d'un bus

Remarque 1: Il existe aussi la difficulté d'informer l'utilisateur des nouveaux horaires et de l'évolution des dessertes. La communication et l'information vers le public requièrent des aptitudes et des capacités complémentaires aux

mathématiques. Les renseignements se trouvent sur de nombreux supports différents. Les horaires de bus sont diffusés sur internet, par affichage ou avec des dépliants. Le problème porte sur la mise à jour simultanée de tous les canaux de communication.

Nous considérons une cité avec N positions possibles pour ses habitants, dont P emplacements sont dédiés aux lignes de transport. Un sous-ensemble des P emplacements correspond aux zones d'arrêts d'une ligne de bus. Nous pouvons les représenter sur une partie d'une droite discrète [1].

Un sous-ensemble de forme rectiligne, plus ou moins épais, des points de coordonnées entières d'un plan forme une droite discrète $D(a, b, m, h)$. Elle est définie par

$$D(a, b, m, h) = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 / m \leq ax - by \leq m + h\}$$

où le quotient a/b représente la pente de la droite, m précise sa frontière inférieure, et h son épaisseur. Les paramètres a, b, m, h sont des nombres entiers.

Les paramètres a et b définissent l'orientation de la ligne de bus dans la ville, et les nombres m et h s'ajustent suivant le besoin de représenter des lignes de bus utilisant des arrêts communs.

Remarque 2: La clarté de lecture d'une carte de réseau de transport peut être améliorée avec une transformation respectant sa topologie. Nous citons le cas du métro de Londres [2].

Nous utiliserons le style "verbatim" pour décrire de façon pédagogique et illustrative une notion mathématique qui nécessite souvent un formalisme moins accessible et plus abstrait.

respecter la topologie: en parlant d'un objet signifie que tout en le déformant il conservera toutes ses occlusions, perforations... même rétrécies ou agrandies, sans en perdre, ou en avoir de nouvelles.

Une problématique récurrente touche le développement harmonieux d'une ville, sur la qualité à la fois de son habitat et de ses moyens de transport. Avant de proposer une aide à la décision en la matière, nous devons définir les variables jugées prioritaires. Elles peuvent concerner l'environnement urbain (niveau de bruit...), ou bien l'obtention d'un label normalisé (classement historique...).

Les modes de logement (résidentiel, collectif...) caractérisent des sous-ensembles des N positions d'une ville pour ses habitants. La thématique en mathématiques est ici moins facilement identifiable. La modélisation de l'impact de la décision à prendre doit être préalable [3].

Nous mentionnons comme exemple les chaînes de Markov à deux états suivant que l'habitant est démuné, ou non. La stationnarité de sa réponse à un stimulus financier résulte de l'effet d'incitation voulu par la collectivité. Il peut s'agir de micro-crédit. Sa modélisation existe [4]. Le micro-crédit servirait par exemple à l'achat d'un abonnement de bus, pour les résidents d'un quartier défavorisé.

Une marche aléatoire [5] (ou marche au hasard) peut être proposée pour quantifier la qualité d'un réseau de transport urbain. La marche part de la zone urbaine à évaluer.

marche aléatoire: déplacement aléatoire à partir
d'un point de départ... en se posant la question de savoir si on
reviendra ou pas au départ.

La probabilité de retour appartient à l'intervalle $[0,1]$. Elle dépend d'hypothèses à préciser, comme la durée maximale de la marche pour un coût restant supportable. La probabilité de retour en fonction du point de départ s'apparente à une densité de la qualité du réseau. Une densité nulle justifie la recherche d'un point faible du réseau. Une densité égale à 1 au contraire, prouve la commodité d'un réseau.

Le coût d'un tel déplacement en fonction du niveau social moyen des

habitants d'un quartier et du point de départ fournit une possibilité d'aide à la décision.

Considérons une ville réservant X emplacements à la circulation automobile, sachant qu'il y circule jusqu'à Y voitures. La simulation de leurs mouvements peut être réalisée avec une méthode d'automates cellulaires. Les X emplacements peuvent être positionnés sur un quadrillage ou une matrice carrée. Une voiture s'apparente à une cellule mobile. Elle peut se déplacer sur un emplacement adjacent s'il est libre.

Un boulevard embouteillé s'apparentera plutôt à un sous-ensemble dense d'une droite discrète $D(a, b, m, h)$. Les paramètres a et b donnent l'orientation du boulevard, tandis que m et h indiquent le nombre de voies de circulation dans les deux sens. Chaque élément de la droite peut représenter une voiture bloquée.

La complexité d'une cité est très importante (échange avec l'extérieur, évolution interne...). Il est illusoire de parvenir à modéliser toutes ses dynamiques, et cela aux différentes échelles [3]. Cependant, la recherche de la meilleure granulométrie de l'information nous paraît un point essentiel.

L'échelle des arrêts semble adaptée pour décrire un transport urbain. La composante normale à un trajet, en tant que ligne courbe, donne la direction des flux, de la marche des usagers et des biens transportés.

Une méthode de percolation identifie des chemins critiques à travers un milieu de granulométrie plus ou moins fine. Toutes les sections et toutes les connexions d'un réseau de transport, ajoutées une à une, recouvrent progressivement tout ou partie d'une ville. Cette représentation de la mobilité, suivant l'ordre de mise en place des éléments, offre une vision de la répartition et de l'importance des moyens.

Au cours de ce chapitre, énumérant nos premières réflexions, la stature mathématique de problèmes issus du transport urbain nous semble acquise. Ces questions rejoignent le thème plus global du développement durable d'une cité, qui dépend des facilités offertes pour les déplacements urbains.

Il apparaît à ce stade plusieurs sujets de recherche basés sur les différentes méthodes discrètes ou continues que nous venons d'introduire. Elles vont être approfondies au prochain chapitre dans le même ordre que ces premières idées.

2 Nos propositions de recherche en mathématiques

Pour chacun des domaines abordés, notre exposé suivra une même méthodologie, avec un ordre bien établi : l'objectif suivi, la collecte des données, l'usage d'une méthode de calcul appropriée, l'obtention de résultats et leur interprétation.

2.1 Analyse des données

Le but de l'analyse intéresse le plus souvent un problème de coût, d'organisation, ou plus généralement d'évaluation. Le transport urbain pollue l'environnement à un niveau dépendant des modes de déplacement choisis. La pollution de l'air dans une ville provient entre autres des particules fines issues du carburant diesel de moteurs thermiques. Leur diminution améliorera la santé des citadins.

D'autres enquêtes sur la mobilité et les modes de transports existent [6]. Les problématiques touchent au bruit, à l'économie, voire aux corrélations entre la mobilité et l'habitat, déjà signalées au chapitre 1.

Les données viennent d'un sondage d'opinion, de mesures physiques ou de résultats de calculs. Elles mêlent parfois des informations qualitatives et quantitatives (confort, dénombrement...).

Nous proposons un sondage sur la bonne santé des habitants et la qualité de leurs modes de transport. L'analyse des données corrèlera la mobilité, suivant qu'elle est polluante ou non, avec l'état de santé.

L'évaluation de la santé S_i d'un habitant i et le niveau de pollution de son moyen de transport T_i sont deux séries définies par rapport au niveau moyen de la population.

Leur corrélation $cor(S, T)$, définie par

$$cor(S, T) = \frac{\sum_{i=1}^N S_i * T_i}{\|S\| * \|T\|}$$

somme leur produit pour N habitants.

Le calcul de corrélation touche l'Analyse en Composantes Principales (ACP), les arbres de régression ou de décision, ou bien la classification hiérarchique.

composante principale: il est plus efficace de représenter un arbre en commençant par son tronc, sa première composante principale. Un arbre représenté vu de dessus est difficilement reconnaissable.

L'Analyse en Composantes Principales hiérarchise les multiples corrélations possibles entre les données. Un calcul de corrélation fond deux séries de données, pour délivrer un nombre dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Un modèle statistique établit une représentation graphique des données. De nombreux logiciels disposent des méthodes de calcul mentionnées et des représentations graphiques adaptées.

Pour ce qui concerne le sondage proposé sur la santé et le transport, les écarts des séries S et T évoluent avec la même tendance lorsque leur corrélation tend vers 1.

L'interprétation des résultats, pour vérification, nécessite une consultation des données brutes. Cette validation, dont le rôle est souvent sous estimé, attestera la valeur de l'analyse proposée. Dans le cas contraire, la présence de données aberrantes peut en être la cause. L'occultation de telles données peut poser des difficultés, comme leur niveau de détection.

2.2 Géométrie continue

Le plan d'un réseau de transport urbain doit être à la fois pratique et visuel pour l'utilisateur. Ce plan s'imprime sur un dépliant ou sur une affiche. Cette représentation utilise un espace de dimension 2. L'information spatiale vient à plat.

Nous proposons de représenter cette information sur une surface plus générale en forme de tore, comme nous l'avons indiqué au chapitre 1. L'intérêt vient de l'assemblage des informations spatiales et temporelles.

Pour simplifier, nous considérons une seule ligne de bus et ses horaires de passage aux arrêts, dans le sens aller.

Une variété torique possède la forme d'une chambre à air. Sur son grand rayon R , elle peut revêtir la dimension spatiale du parcours aller du bus. Le petit rayon r du tore acquiert la dimension temporelle des horaires aux arrêts.

La représentation paramétrique $T(R, r)$ du tore est définie par

$$T(R, r) = \left\{ \begin{array}{l} (R + r \cos h) \cos p \\ (R + r \cos h) \sin p \\ r \sin h \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (p, h) \in [0; 2\pi] \times [0; 2\pi] \\ 0 < r < R \end{array} \right\}$$

L'angle h reflète les horaires du bus. Son parcours apparaît avec l'angle p . Le groupement de la géométrie du parcours et des horaires d'une ligne de bus s'appelle un chronotope.

`chronotope : une forme contenant à la fois le temps et l'espace. Les informations temporelle et spatiale y sont assemblées sous la forme d'un tout.`

Un logiciel de CAO fournit la représentation d'un tore dans l'espace tridimensionnel.

Pour un angle h fixé, la représentation paramétrique $T(R, r)$ du chronotope définit un cercle de rayon $R + r \cos h$. Il correspond au circuit du bus. En

fixant l'angle p nous obtenons une section droite du tore, sur laquelle l'angle h varie. Cette section fournit les horaires du bus à l'arrêt défini par p .

Nous allons maintenant formuler trois remarques.

Remarque 1: La mobilité d'un automobiliste lui demande la construction mentale d'un chronotope. Sa formalisation pourrait utiliser une mise en forme similaire. Son parcours prévisionnel et ses horaires intermédiaires seraient rassemblés.

Remarque 2: Un tore peut avoir une section constituée de cercles, lorsqu'il est coupé par un plan horizontal, mais aussi par un plan passant par son axe vertical. Il est moins connu qu'un autre plan le permette. Un plan incliné passant par le centre du tore donne les deux cercles de Villarceau [7]. Ils sont schématisés sur la figure 3. Cette construction géométrique rappelle la parataxie [8].

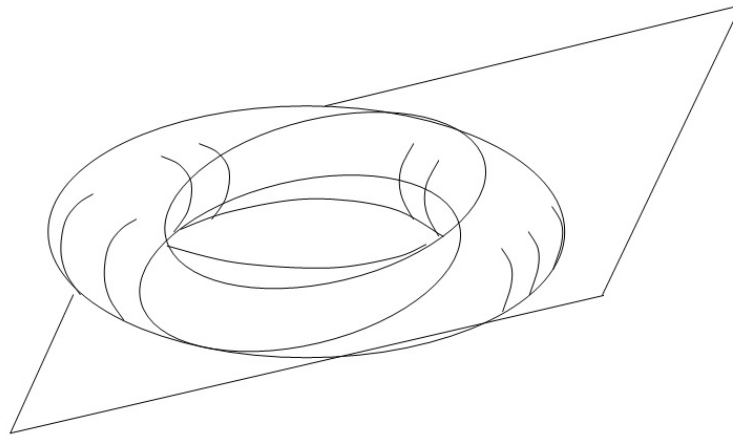


FIGURE 3 – Les cercles de Villarceau obtenus avec une section inclinée d'un tore

Quand un bus décrit un des cercles de Villarceau, il parcourt lors d'une tournée tous ses arrêts. Les deux cercles enroulent la petite section du tore soit suivant h_1 , le sens trigonométrique, soit suivant $h_2 = 2\pi - h_1$ le sens

horaire. Un bus pourrait suivre sa ligne, soit dans le sens aller p_+ , soit dans le sens retour, $p_- = 2\pi - p_+$. Il existe donc quatre possibilités associant les deux cercles de Villarceau et les deux sens de parcours. Nous énumérons les quatre possibilités. Sur un premier cercle, un bus parcourt en marche avant p_+ tous ses arrêts, en remontant en quelque sorte le temps h_1 . Dans l'autre sens p_- il suit le sens horaire h_2 . Sur le second cercle, il parcourt dans le sens horaire h_2 son parcours en suivant p_+ . A contre-sens, il remonte le temps h_1 en faisant une marche arrière p_- .

Remarque 3: Supposons que les horaires de passage et les positions des arrêts d'une ligne de bus soient représentés sur un graphe. Ce graphe peut s'associer au tore décrit précédemment. Le groupement du graphe et du tore produit un graphe de Cayley. Il décrit l'ensemble des parcours de la flotte de bus sur cette ligne.

graphe : un graphe plan est un ensemble de N sommets reliés par un ensemble d'arêtes. En chaque sommet, il peut n'y avoir aucune arête (sommet isolé) ou $1, 2, \dots, N$ arêtes (un sommet peut être connecté à lui-même).

Le graphe G qui nous intéresse peut être défini par

$$G = (V, E)$$

où V représente les arrêts. L'ensemble des arêtes E établit les horaires des transitions entre arrêts. Une arête correspond à une liaison entre deux arrêts adjacents.

2.3 Géométrie discrète

La position x d'un moyen de déplacement urbain, automobile, bus... peut se représenter comme une fonction continue du temps t . Une discrétisation affectant la fonction $x(t)$ permet d'inclure des aspects aléatoires sur la

mobilité. La position $x(t)$ à partir d'une position initiale $x(0)$ donnée est la solution de l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(t)$$

où $v(t)$ représente la vitesse supposée connue du moyen de transport.

Nous supposons l'existence d'aspects aléatoires sur le second membre $v(t)$ de l'équation différentielle. La vitesse v se décompose en

$$v = \bar{v} + \delta v$$

où \bar{v} reflète la vitesse moyenne attendue et δv les aléas prévisibles. Ils proviennent de perturbations ou d'incertitudes sur la circulation, comme par exemple, les embouteillages, l'interruption accidentelle d'un service, le déficit d'information sur des travaux routiers.

Pour simplifier, nous supposons la vitesse v constante et continue. Nous résolvons l'équation différentielle du premier ordre pour obtenir

$$x(t) = (\bar{v} + \delta v)t + x(0)$$

Pour des données \bar{v} et δv plus générales, la résolution peut être approchée en utilisant une méthode d'intégration basée sur une discrétisation du temps, comme la méthode d'Euler ou la méthode des rectangles. Il en résulte une seconde discrétisation provenant cette fois d'instantanés t_i .

La représentation discrète de la solution $x(t)$ rend compte d'un certain nombre d'aléas δv_i , depuis l'origine $x(0)$ jusqu'à l'instant t . La représentation discrète donne un faisceau de demi-droites issues de $x(0)$. A chacun des aléas δv_i , nous associons un niveau d'occurrence de façon à les hiérarchiser. La représentation du niveau de confiance de chaque trajectoire paraît originale pour un déplacement dans un espace urbain.

Cet éclairage différent apporte une dimension supplémentaire à la description d'une mobilité urbaine. La représentation discrète apporte un avantage sur la

représentation continue en privilégiant des aléas δv_i , plutôt que de considérer δv comme faisant partie d'un intervalle continu de nombre réel. Dans le cas continu, la solution x est un secteur angulaire issu de $x(0)$, dépendant des bornes fixées sur δv .

Remarque 4: Un plan de réseau de transport urbain montre une superposition de graphes. Chacun d'eux correspond à un moyen de transport différent. L'assemblage de ces différents graphes produit une représentation compliquée de l'information [9]. Pour la simplifier, nous proposons de décomposer l'espace urbain en éléments de quartier. La méthode de Delaunay ou un mailleur de type Voronoï, fournissent un outil de maillage automatique en éléments triangulaires de la ville.

2.4 Graphe de Markov

Nous donnons un exemple venant du jeu des échecs. Aux échecs, le déplacement du cavalier obéit à une règle du jeu. Ce déplacement dépend de la position du cavalier sur l'échiquier. Un graphe de Markov traduit dans un modèle ce déplacement. Les sommets du graphe représentent les cases où le cavalier peut aller. Les déplacements possibles du cavalier correspondent aux arêtes du graphe. Une probabilité est définie pour chaque déplacement. Elle s'associe avec une arête. Lorsque le cavalier reste immobile, cette probabilité est affectée à un sommet. Au cours de la partie, et avant que le cavalier ne soit éventuellement pris par l'adversaire, le graphe de Markov d'un cavalier fournit la probabilité de sa position.

Nous faisons le parallèle entre un cavalier sur un échiquier et un véhicule partagé sur une station d'auto-partage.

Plusieurs villes sont équipées de systèmes de véhicules partagés en libre-service. Ils se dispersent sur plusieurs stations réparties dans la ville. Au fil d'une journée, une station peut être tarie ou saturée, suivant les emprunts et les restitutions des usagers. Il existe d'autres exemples du même type, vélos

partagés...

La régulation effectuée par l'exploitant du dispositif agit sur la position géographique des stations et sur des forçages déplaçant des véhicules. Ils ont lieu entre les stations suivant celles qui sont excédentaires ou déficitaires en véhicule de façon chronique.

Nous prenons l'exemple d'une station nommée par exemple Mairie. Elle dispose de N_1 véhicules et de P_1 places de parking. Nous notons λ la probabilité de retour d'un véhicule à cette station et par μ la probabilité d'emprunt. Par conséquent, la probabilité qu'un véhicule déjà garé reste sur le parking vaut $1 - \mu$.

L'exploitant pourrait utiliser un graphe de Markov modélisant le nombre de véhicules disponibles à chaque station. Ce graphe dépend des probabilités d'emprunt et de retour des véhicules aux différentes stations. Lorsque l'exploitant effectue un forçage de retour de véhicules à la station Mairie, la probabilité de retour λ devient $\bar{\lambda}$. Elle est définie par un nombre réel positif inférieur ou égal à 1

$$\bar{\lambda} = \lambda + \lambda_f$$

où λ_f traduit la probabilité que le forçage soit effectué. Il agit au détriment de la probabilité d'emprunt μ d'une autre station, qui elle est encombrée.

Au terme d'une activité de recherche, cette méthode peut fournir l'existence éventuelle d'une limite sur le nombre de véhicules disponibles à chaque station. Dans le cas de la station Mairie, l'exploitant devra veiller au fait que le nombre de véhicules N_1 reste en deçà des limites du parking

$$N_1 \leq P_1 - 1$$

pour laisser au moins une place libre à une restitution éventuelle d'un usager. Une limitation importante concerne le paramétrage adéquat d'une telle méthode. Un recalage de chaque probabilité peut venir du retour d'expérience

d'installations existantes. Pour la station Mairie, si la probabilité de retour λ venait à décroître, ou celle d'emprunt μ à croître, l'exploitant peut agir en augmentant la probabilité de forçage λ_f .

2.5 Marche aléatoire

Un procédé commode existe pour visualiser sur un plan la rapidité d'un réseau ferroviaire. Il utilise pour chacune des portions du réseau une longueur proportionnelle au temps de parcours. Nous proposons de remplacer ce temps de parcours par la durée d'une marche aléatoire issue de chaque point d'accès au réseau.

Les marches aléatoires considérées ici sont celles qui reviennent à leur point de départ. La dilatation ou la contraction de la carte respectera sa topologie, comme nous l'avons vu au chapitre 1. Un cahier des charges complet, nous semble nécessaire pour garantir la qualité de ces travaux de recherche.

La méthodologie définira de façon précise les marches aléatoires. La probabilité pourra être isotrope entre l'aller et le retour sur une ligne, ainsi qu'entre les lignes. Des hypothèses simplificatrices permettront de diminuer la durée de calcul. Le nombre de portions du réseau influe sur la quantité et la longueur des calculs nécessaires.

La marche aléatoire peut être 2D dans un premier temps. Elle pourra être 3D lorsque le réseau dispose d'une station multimodale. Elle possède souvent plusieurs étages communiquant entre eux. La dimension 2 devient insuffisante pour présenter la superposition des différents modes.

Le principe d'une marche aléatoire a été décrit dans l'introduction. La durée d'une telle marche aléatoire [5] se calcule avec des simulations informatiques, des essais sur site, ou des résultats théoriques. Le calcul peut parfois limiter les pas de la marche à un nombre maximum donné. Elle se terminera dans certaines circonstances sans retour au point de départ.

Un résultat mathématique intéressant est donné par le théorème de Pólya

(1921). Il précise la certitude du retour au départ des marches aléatoires pour les dimensions 1 et 2 de l'espace [10]. Une marche aléatoire sera toujours de durée finie sur un réseau de transport urbain, lorsque nous le considérons de dimension 2. La représentation des durées de parcours retenues suivra le retour d'expérience des experts de terrain et des usagers du réseau.

La représentation proposée permet d'évaluer les infrastructures au niveau global, en tenant compte de chaque nœud, station ou arrêt du réseau. L'isotropie spatiale de la probabilité de déplacement met à égalité les lignes du réseau et leur sens de parcours. Par conséquent, l'évaluation du réseau dépasse celle d'un voyage particulier.

La limitation éventuelle du nombre de pas fournit un paramètre utile. Il permet de définir une probabilité de présence aux différents points du réseau. La représentation graphique de cette probabilité apporte une information sur l'homogénéité du réseau.

2.6 Automates cellulaires

Nous commençons par donner une présentation générale de la méthode.

La modélisation d'un fluide sert dans un grand nombre d'écoulements industriels. Ils s'avèrent parfois très compliqués à simuler. La méthode des automates cellulaires s'utilise pour la prospection et la production pétrolières, l'injection de carburant dans un cylindre de combustion et lors de simulation mélangeant plusieurs fluides [11].

La méthode des automates cellulaires modélise un fluide avec un ensemble granuleux, composé de particules similaires. L'écoulement suit les lois de conservation de la mécanique, sur la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Les particules se comportent en quelque sorte comme des boules de billard. Avec un grand nombre de particules, jusqu'à 1 million ou davantage, un programme informatique simule sur un écran des écoulements avec réalisme.

La discrétisation associe une particule fictive de masse ponctuelle à chaque petit volume réel du fluide. La trajectoire de la particule correspond à des molécules de fluide comme si elles formaient un bloc. La particule est qualifiée de Lagrangienne dans ce cas.

L'exclusion mutuelle des particules en un nœud du réseau est un principe de base de la simulation. Deux particules ne peuvent pas être à la même place en même temps. Le mouvement des particules s'initialise à zéro le plus souvent. Une particule évoluant dans l'écoulement avec un mouvement brownien suit une marche au hasard (marche aléatoire) [12]. Nous l'avons vu dans la section précédente.

La simulation de la circulation automobile dans une même zone urbaine peut utiliser des automates cellulaires [13] de la façon suivante.

Le maillage de la zone urbaine définit les degrés de liberté des automobiles, les voies de circulation et le plan des rues. Les paramètres liés aux particules définissent les automobiles présentes et leurs conduites. Le nombre de particules est un paramètre important. Il tient compte des situations particulières telles que les heures de pointe.

Le mouvement des particules obéit à un certain nombre de règles empiriques sur la conduite de l'automobiliste, comme l'accélération lorsque la voie est libre, l'arrêt aux feux tricolores et aux priorités, le respect d'une distance de sécurité...

L'échelle de la zone d'étude peut être un rond-point, une avenue ou un quartier. Les conditions aux limites en bordure de zone tiennent compte d'un forçage des flux de circulation entrante et sortante. Il convient de les estimer au préalable.

La gestion de la présence des automobiles aux nœuds du maillage urbain utilise une matrice M . Chacune de ses composantes représente un des X emplacements réservés à l'automobile de la zone d'étude. Nous avons utilisé cette notation au chapitre 1 pour le cas d'une ville. Les composantes de la matrice vérifiant

$$M_{i,j} = 1$$

indiquent la présence d'une automobile au nœud référencé par i, j sur la zone de circulation, tandis que les composantes

$$M_{i,j} = 0$$

montrent les nœuds vides. Les indicateurs égaux à 1 dans la matrice M changeront de position au fil du temps. Ils refléteront le mouvement des automobiles.

Nous utilisons à nouveau la notation Y pour l'ensemble des automobiles présentes sur le maillage. Nous remarquons que le nombre de composantes de la matrice M égales à 1 correspond au nombre d'automobiles

$$\# \{M_{i,j} = 1\} = \#Y$$

Le symbole $\#$ représente le nombre d'éléments, ou le cardinal, d'un ensemble. Le nombre d'emplacements X réservés à l'automobile coïncide avec le nombre de composantes de la matrice M

$$\# \{M_{i,j}\} = \#X$$

La gestion de la position des particules utilise un programme informatique. Les parties prenantes valident les graphiques de supervision de la circulation donnés par le programme.

L'usage de la matrice M définie précédemment facilite la représentation sur un écran du mouvement des véhicules. Le code couleur des pixels de l'écran associés aux automobiles suit les composantes égales à 1 de la matrice M .

Le programme de simulation peut fournir des indicateurs, comme le nombre d'automobiles passant en un nœud du maillage.

2.7 Méthode de percolation

Cette dernière méthode, évoquant davantage un ensemble de méthodes similaires, sera présentée en suivant une façon différente des précédentes.

Nous débutons par un propos imagé. Un percolateur à café fonctionne lorsque l'eau chaude trouve un chemin dans la moulure de grains entre le réservoir de vapeur et la tasse. Nous imaginons un usager des transports cherchant un itinéraire. Il trouve son trajet dès qu'il aperçoit un chemin, en quelque sorte percolant, entre son point de départ et sa destination.

Nous présentons maintenant, en utilisant un exemple, le vocabulaire et les principes de base des méthodes de percolation. Considérons un espace plan découpé en éléments, comme un damier, qui montre des cases qui sont de couleur blanche ou noire. Elles sont réparties régulièrement. Supposons le contraire, et que la caractéristique comme la couleur soit répartie de façon aléatoire. Un chemin de percolation lie les éléments qui sont à la fois en contact et de même couleur. Le plus court chemin de percolation possèdera deux éléments. Un chemin sera percolant lorsqu'il traversera l'espace d'un bout à l'autre. Une méthode de percolation définit le processus de discrétisation d'un espace et la répartition de ses caractéristiques, établie de façon aléatoire, ou non. Une similitude existe entre les méthodes d'automates cellulaires et les méthodes de percolation, lorsque les caractéristiques des éléments évoluent au cours du temps. Comme nous l'avons vu précédemment, une même caractéristique peut être transmise entre deux éléments voisins, donnant un phénomène de transport.

Il existe d'une part les processus physiques mettant en évidence un phénomène de percolation, comme l'enfoncement de l'eau dans le sous-sol, et d'autre part les méthodes mathématiques de percolation. Elles se basent souvent sur un graphe. Elles peuvent déterminer de façon théorique si un chemin est percolant. Elles accompagnent aussi parfois le diagnostic d'une probabilité. Le graphe en question, avec ses sommets et ses arêtes, peut

évoluer au cours du temps. La percolation de saut de Bernoulli définit les lignes (sauts, arêtes...) indépendamment les unes des autres. Une question fréquente cherche le nombre d'arêtes mises au hasard sur un graphe, lesquelles permettent qu'aucun sommet ne soit isolé, et cela avec une probabilité donnée. Pour l'architecture d'un réseau urbain, une telle démarche permet d'éliminer rapidement toutes les solutions qui seraient issues d'un processus de construction automatique, mais qui laisserait par exemple une desserte isolée.

Pour illustrer notre propos, nous prenons un exemple simple, sur la construction de l'architecture d'un réseau de transport public. Nous considérons un réseau à trois nœuds. La figure 4 montre en pointillé les trois lignes potentielles qui peuvent former le réseau. Sa traversée étant très particulière, nous dirons que la percolation survient lorsqu'une liaison relie les trois nœuds.

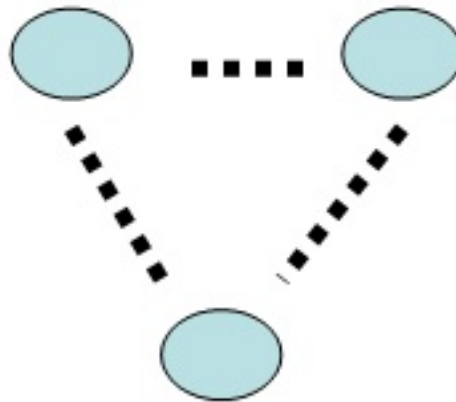


FIGURE 4 – Trois lignes potentielles sur un réseau à trois nœuds

Imaginons que deux lignes soient disposées aléatoirement en s'excluant mutuellement. Les deux lignes ne peuvent pas être mises en place au même endroit. Avec deux lignes, tous les nœuds seront reliés avec certitude. Elles forment un chemin percolant. La probabilité du chemin d'être percolant vaut 1 pour deux lignes.

Otons l'hypothèse d'exclusion mutuelle. La deuxième ligne pourrait être mise par hasard sur la première. L'ajout d'une troisième ligne peut conduire à la même coïncidence, et ainsi de suite. Il peut toujours demeurer un nœud à l'écart. Toutes les lignes peuvent être mises par hasard au même endroit. La probabilité de percolation demeure inférieure à 1 quelque soit le nombre de lignes. Lors de l'ajout de la deuxième ligne, la probabilité de percolation valait $2/3$. Cette probabilité qualifie l'usage du hasard dans l'établissement de l'architecture de ce réseau.

Comme exemple de mise en situation, nous observerons au chapitre suivant la cité presque mégapole de Casablanca. Notre propre ville de La Rochelle y possède des liens universitaires. Ils ont été établis avec leurs écoles d'ingénieurs jumelles.

3 Casablanca, contexte, questionnement et discussion

Le chapitre dévolu à la ville de Casablanca se déroule en trois temps. En premier lieu, nous rendrons compte des renseignements pris au cours de notre visite. Ensuite, nous ajusterons notre démarche de recherche en mathématiques appliquées, et en particulier les propositions du chapitre précédent. Leurs objectifs pourront ainsi mieux répondre aux attentes des parties prenantes. Enfin, nous donnerons d'autres constats, à la marge de nos questionnements, qui vont au delà de l'unique thème des transports.

Casablanca est la capitale économique du Maroc. Sa population dépasse 3 millions d'habitants, mais elle reste sous les 4 millions, d'après la direction

des services de transport de la ville. Des informations issues d'internet ou d'autochtones donnent des nombres de 6 millions, voire davantage. La population du Maroc était de 32 millions d'habitants en 2010.

Nos interlocuteurs mentionnent les analogies de Casablanca avec d'autres cités comme Le Caire en Egypte. La convergence d'idées analogues apparaît souvent dans les projets de recherche collaboratifs. Plusieurs villes semblables s'associent, pour répondre ensemble à des préoccupations communes. Nous pensons ici aux mégapoles côtières.

L'avenir de Casablanca pourrait être l'usage de bus à propulsion hybride. Ils utilisent un moteur thermique couplé à un moteur électrique. Ils limitent les émissions polluantes dans l'air, et par conséquent ils respectent mieux l'environnement urbain. Ils sont étudiés par un projet de recherche Européen [14].

Nous allons maintenant répertorier une analyse critique des sept propositions de recherche qui ont été présentées au chapitre 2, dans la perspective de leur usage pour Casablanca.

L'analyse des données recueillies à Casablanca rendra nécessairement compte des évolutions rapides qui s'observent de nos jours. D'autre part, les données sociétales de Casablanca apparaissent très disparates. Nous en donnons plusieurs exemples. Les moyens de transport comme les anciens autobus deviendront bientôt obsolètes, malgré leur grande utilité à la vue de leur saturation quotidienne. En réponse, une ligne de tramway existera en 2013 et fera partie des plus modernes au monde. Sur un autre plan, une seule avenue autorise les transports routiers de 40T. Ils proviennent du port de commerce. Les autres rues supportent des tonnages bien plus faibles. Enfin, il demeure un nombre significatif de charrettes qui sont tractées par des animaux. Dans la circulation, vis à vis des véhicules à moteur, elles sont prioritaires. Nous constatons que les séries de données nécessaires à l'analyse, comme la modernité, la capacité ou la rapidité, auront de fortes variations. Leurs caractéristiques seront à la fois qualitatives et quantitatives. Nous

pensons par exemple à la commodité d'un moyen de transport et à sa jauge en termes de personnes transportées.

Un autre questionnement touche à la représentation sur un tore des arrêts et des horaires de passage d'une ligne de bus de Casablanca. Les embouteillages y sont nombreux et très importants. Ils rendent parfois superflu l'horaire prévu. La prise en compte de l'incertitude demande une adaptation de la représentation de l'horaire sur le tore. Le tore lui reste invariant. Il figure par sa forme le circuit du bus et la durée d'une journée. L'incertitude du chronotope portera seulement sur l'horaire représenté.

Ce graphe de forme torique peut contenir des trajectoires incertaines au niveau du temps comme nous l'avons vu dans la section dédiée à la géométrie discrète. Nous pourrions représenter un horaire nominal complété d'un temps d'attente vraisemblable. Il peut évoluer entre deux arrêts et au cours d'un embouteillage. Nous pouvons aussi représenter le nombre de chances d'avoir un bus durant un temps d'attente donné. La modélisation de ce processus demeure délicate et il faudrait que le calcul soit réalisé en temps réel.

Les graphes de Markov définissent les probabilités de transition entre les différents états d'un système, par exemple celle de l'avancement d'un bus sur un secteur. Chaque probabilité demande une mesure sur le terrain. Elle est souvent coûteuse.

La probabilité de retour d'une marche aléatoire est certaine en dimension 2. Néanmoins, sa durée peut s'avérer importante. Nous proposons de réduire le nombre de pas de la marche, en simplifiant le graphe associé. Ses sommets relieraient au minimum quatre extrémités de la ville : l'aéroport, le port de commerce avec la médina, la technopole et le récent centre commercial. Il en résultera un gain sur le temps de simulation et le coût des expérimentations. Un questionnement porte sur l'application des automates cellulaires à la circulation urbaine de Casablanca. Nous devons préciser les apports de cette méthode. Le nombre de véhicules comptabilisés en un point d'une avenue s'assimile au nombre de particules passant à un nœud du réseau simulé.

Une mesure réelle semble plus coûteuse et plus fiable qu'une simulation. Néanmoins, son avantage réside dans l'évaluation d'aménagements routiers, avant de les avoir construits.

Les équations associées aux automates cellulaires dépendent du choix d'un certain nombre de lois empiriques. Celles-ci contiennent des paramètres qu'il faut fixer. Les premiers exemples qui nous viennent à l'esprit sont la vitesse des véhicules et la distance de sécurité respectée entre eux. L'expérience montre la difficulté de paramétrer de tels modèles dès que la taille du réseau dépasse celle de quelques rues.

Remarque 1: Le mode de transport et le moyen de logement du citoyen interagissent. Une source de recherche réside dans les outils informatiques analysant les scénarios d'urbanisme. Ils permettent la simulation conjointe du budget lié à la mobilité et de celui consacré au logement de la population. Les modèles traitent des statistiques concomitantes. Ils intègrent les zones où le travail se concentre et où les citoyens souhaitent résider. Il existe une telle étude qui se base sur la ville de Paris [15].

Autour de Casablanca, des cités périphériques se développent et leurs populations peuvent atteindre 40000 habitants. Leurs distances avec la mégapole varient de 6 à 20 km. Le prolongement d'un réseau de transport demande de simuler la position des nouveaux arrêts et l'emplacement des nouvelles lignes. Une méthode de percolation permet d'écarter des architectures possibles celles qui possèdent un nombre insuffisant d'arêtes. Elles peuvent informer sur le nombre minimum de tronçons de ligne à construire pour qu'un chemin percolant apparaisse. En général, la probabilité de percolation varie brutalement de 0 à 1 à partir d'un nombre critique d'arêtes. Il s'agit de la notion de seuil de percolation.

En l'absence de chemin de percolation basé sur un seul moyen de transport, l'usager peut recourir à un mode alternatif. A Casablanca il existe deux types de taxi, suivant la longueur de la course, des trains, dont ceux qui relient le port avec l'aéroport, et comme partout ailleurs la marche à pied.

Nous allons traiter d'autres idées propres à cette ville, en marge des thèmes de recherche évoqués précédemment, mais qui apportent un éclairage complémentaire.

La définition d'un travail de recherche doit tenir compte des nombreux enjeux qui lui sont liés. La politique des transports d'une cité touche de nombreux secteurs économiques et industriels, l'automobile, l'énergie, le génie civil... La recherche intègre les différentes politiques publiques sur l'accessibilité, la continuité des réseaux, l'intermodalité...

L'essor historique d'une cité peut refléter un développement trop rapide. Un travail d'enquête sait parfois y répondre. Une contradiction fréquente vient des autoroutes urbaines construites en direction des centres-villes. Elles conduisent aux embouteillages, comme à l'issue de l'autoroute entre Rabat et Casablanca. Un travail de recherche donne une aide à la décision aux pouvoirs publics.

Certains aspects comportementaux et sociaux surprennent. La versatilité éventuelle du chauffeur d'un bus se manifeste parfois en sautant un ou plusieurs arrêts. Les passagers peuvent ainsi rester bloqués jusqu'au terminus. L'impossibilité de montée des usagers en attente aux arrêts provient de leur nombre et de la saturation du bus.

Un événement climatique extrême s'est produit au printemps 2011 à Casablanca provoquant des crues d'une ampleur exceptionnelle. Elles ont détruit, ou endommagé, de nombreuses infrastructures : rues, adductions d'eau, assainissements... Des recherches étudient l'impact des catastrophes naturelles propres aux villes côtières. Elles permettent de réduire la vulnérabilité des cités, de leurs aménagements et de leurs développements.

4 Conclusion

Nous avons décrit une démarche de prospective scientifique. Cette vision nouvelle est susceptible d'apporter un éclairage différent. A ce titre,

l'originalité du problème du voyageur de commerce ne nous a pas semblé suffisante. A partir de problèmes concrets sur la mobilité urbaine, nous avons identifié des aspects mathématiques. Des idées originales sont apparues. Les cercles de Villarceau s'apparentent aux tournées de deux bus jumelés. La percolation s'assimile à un usager cherchant son chemin parmi les solutions à sa mobilité. Une droite discrète peut schématiser un embouteillage. Nous ouvrons plusieurs voies susceptibles d'être fructueuses. Des convergences peuvent être observées entre les points de vue utilisés dans les méthodes proposées. Le traitement ou l'usage de données statistiques et concrètes apparaissent dans l'analyse des données sur la population et les automates cellulaires, avec les plans des rues d'un quartier. L'évaluation globale de déplacements urbains requiert une abstraction plus importante avec les méthodes de percolation, les marches aléatoires et les graphes de Markov. Les méthodes géométriques discrètes avec les droites discrètes, les marches aléatoires, ou bien les méthodes continues utilisant les chronotopes, la percolation, apparaissent toutes très visuelles. Nous avons montré l'émergence d'idées intéressantes, leurs natures et la démarche utilisée.

D'autres problèmes émanant de la thématique des transports urbains auraient pu être associés. Il est souvent mis l'accent sur la sécurité dans les transports, les réglementations nationales et internationales, l'économie du transport, les économies d'énergie et l'impact global sur l'environnement. Nous pensons aussi au développement des transports à la demande pour les personnes isolées qui résident en dehors des périmètres des transports urbains. Le sujet de la connexion entre les modes urbains, interurbains et régionaux, se pose également. Nous cherchons ainsi l'expression des activités et des actions publiques en problèmes mathématiques.

Les mathématiques possèdent d'autres ressources qui pourront être explorées. Nous n'évoquons que quelques possibilités complémentaires. Les modèles déterministes ou indéterministes peuvent être convergents en fournissant des solutions comparables [16]. Une équation différentielle et un modèle

probabiliste peuvent aborder un même problème par des abords différents. D'autre part, l'approche de la recherche opérationnelle [17] peut couvrir bien des aspects que nous avons abordés. Elle exploite des méthodes d'optimisation et des techniques probabilistes qui sont orientées vers l'aide à la prise de décision.

Casablanca se situe sur la façade Atlantique comme de nombreuses villes du continent Européen. L'Espace Atlantique interrégional mène les politiques publiques tournées vers le développement durable des territoires pour élaborer un arc maritime à l'ouest de l'Europe. Les priorités actuelles concernent les transports et le développement urbain, les réseaux d'innovation, les énergies renouvelables et l'environnement. La correspondance de Casablanca avec d'autres villes côtières offre des perspectives aux résultats obtenus et aux enseignements reçus.

Références

- [1] Agathe Chollet, Formalismes non classiques pour le traitement informatique de la topologie et de la géométrie discrète, thèse de l'Université de La Rochelle, 2010
- [2] Jill Britton, Topological Transformation : harry Beck's London Underground Diagram :
<http://britton.disted.camosun.bc.ca/beckmap.html>
- [3] Nicolas Bouleau, Hasard, modélisation et pensée critique, Conférence à l'Université des Sciences et Techniques de Lille, 15 mai 2001
- [4] Francine Diener, Micro-crédit, <http://math.unice.fr/diener/MMDFA>
- [5] Wikipedia, Marche aléatoire :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Marche_aléatoire
- [6] Société Française de Statistiques, groupe Enquêtes, Modèles et Applications, <http://www.sfds.asso.fr/68-Presentation>

- [7] Wikipedia, Cercles de Villarceau :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Cercles_de_Villarceau
- [8] Laurent Schwartz, Un mathématicien aux prises avec le siècle, Editions Odile Jacob, 1997
- [9] Armando Bazzani, Sandro Rambaldi, Bruno Giorgini, Giorgio Turchetti, Complexity : modeling urban mobility, Adv. Complex Syst. 10, Suppl. 2, 255-270, 2007
- [10] Clifford A. Pickover, Le *beau* Livre des Maths, Dunod, 2010
- [11] Stéphane Zaleski, Lattice-gas cellular automata : simple models of complex hydrodynamics, books.google.com, 2004
- [12] Jean-Pierre Kahane, Le mouvement brownien - Un essai sur les origines de la théorie mathématique, Séminaires et Congrès de la SMF, vol. 3, 123-155, 1998
- [13] Andreas Schadschneider, Modelling of transport and traffic problems, Proceedings of 8th international conference on cellular automata for research and industry, Lecture Notes in Computer Science 5191, 22-31, 2008
- [14] Dominique Breuil, David Blackledge, Clean and energy efficient vehicles, Deliverable of Success project-CIVITAS, [http://www.civitas-initiative.org/docs/Clean and Energy Efficient Vehicles.pdf](http://www.civitas-initiative.org/docs/Clean_and_Energy_Efficient_Vehicles.pdf), 2010
- [15] Jean Delons, Nicolas Coulombel, Fabien Leurent, Pirandello an integrated transport and land-use model for the Paris area, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00319087/fr/>, 2008
- [16] Adrien Douady, Déterminisme et indéterminisme dans un modèle mathématique, 11-18, dans Chaos et Déterminisme, sous la direction de A. Dahan-Dalmedico, J.-L. Chabert et K. Chemla, Seuil Points Sciences, 2003

- [17] Abderrahmane Alj, Robert Faure, Guide de la Recherche Opérationnelle, Tome 1, Masson, 1986