



**HAL**  
open science

## Consensus pair-à-pair asynchrone dans les variétés

Anass Bellachehab, Pascal Bianchi, Jérémie Jakubowicz

► **To cite this version:**

Anass Bellachehab, Pascal Bianchi, Jérémie Jakubowicz. Consensus pair-à-pair asynchrone dans les variétés. 15èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications (AlgoTel), May 2013, Pornic, France. pp.1-4. hal-00818618v1

**HAL Id: hal-00818618**

**<https://hal.science/hal-00818618v1>**

Submitted on 29 Apr 2013 (v1), last revised 3 May 2013 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Consensus pair-à-pair asynchrone dans les variétés

Anass Bellachehab<sup>1,2</sup>, Pascal Bianchi<sup>2</sup> et Jérémie Jakubowicz<sup>1</sup>

<sup>1</sup> SAMOVAR (UMR 5157), Télécom SudParis, Institut Mines-Télécom, 9 Rue Charles Fourier 91000 Évry, France

<sup>2</sup> LTCI (UMR 5141), Télécom ParisTech, Institut Mines-Télécom, 37/39, rue Dareau, 75014 Paris, France

---

L'objectif de ce papier est de proposer une généralisation de l'algorithme de consensus pair-à-pair distribué et asynchrone de [BGPS06] pour des données appartenant à une variété Riemannienne. On montre sa convergence dans le cas où la variété est simplement connexe et sans points focaux. L'intérêt de cet algorithme est illustré dans le cas où un réseau de capteurs cherche à trouver un consensus sur des lois de probabilité discrète. Cependant le champ d'applications couvertes par cet algorithme dépasse largement ce cadre.

**Keywords:** consensus, réseau de capteurs, variétés riemanniennes

---

## 1 Introduction

Les algorithmes de consensus distribués dans le cas de données vectorielles ont été beaucoup étudiés [Tsi84, BGPS06]. Ils sont fondamentaux à plusieurs titres. D'abord parce qu'ils forment une classe particulièrement simple à décrire d'algorithmes dans les réseaux, mais aussi dans la mesure où ils servent d'outils dans des tâches plus complexes telles que l'optimisation distribuée [BT97], la synchronisation [SG07], etc. Leurs propriétés sont maintenant bien comprises : on sait les conditions dans lesquelles ils convergent suivant le mode utilisé (pair-à-pair, diffusion) [AYSS09, KDG03] ; la vitesse à laquelle ils convergent lorsqu'il y a convergence, etc. Ils sont basés sur la structure euclidienne dans la mesure où ils utilisent des opérations linéaires (essentiellement des moyennes arithmétiques) et sont analysés en termes de distance euclidienne à la droite de consensus.

Plus récemment, l'intérêt s'est porté à les étendre aux cas d'espaces sous-jacents "courbes" tels que les variétés Riemanniennes [DC92]. Dans le cas d'un réseau de solides qui chercherait une orientation commune, il est naturel de formuler le problème comme un consensus dans l'espace des matrices de rotations. Dans le cas d'un réseau de capteurs dont l'objectif consiste à choisir parmi un certain nombre fini d'actions (par exemple en classification distribuée), on peut formuler le problème comme un consensus dans le simplexe. Dans ces cas on se persuade facilement que les moyennes arithmétiques sont à proscrire.

Les travaux existants reformulent le problème en terme de minimisation d'une fonction de Lyapounov basée sur la distance Riemannienne équipant la variété [Bon11, TAV12]. Cette fonction s'annule lorsque le réseau arrive dans un état de consensus. Ces travaux étudient alors les conditions dans lesquelles la procédure de minimisation aboutit à cet état de consensus. Ici, on choisit une approche différente, reprenant l'idée de moyennes pair-à-pair [BGPS06], et en l'adaptant au cadre Riemannien (on remplace ainsi la moyenne de deux vecteurs par le milieu d'une géodésique entre deux points). On démontre que, sous certaines hypothèses naturelles sur la variété, cette manière de procéder converge. D'autre part, on montre l'intérêt de cette approche à travers des simulations numériques. La contribution de ce papier est donc double : un nouvel algorithme de gossip pour les variétés riemanniennes, et une analyse de convergence.

Le reste du papier est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, on précise le cadre et les notations utilisés. On détaille alors l'algorithme proposé dans la section 3, puis on présente un résultat de convergence. Enfin des simulations numériques illustrant l'intérêt de la méthode sont proposées en section 4.

## 2 Notations

### 2.1 Réseau

On considère un réseau de  $N$  capteurs. On le représente comme un graphe non orienté et connexe  $G = (V, E)$  (cf. [Die05] pour plus de précisions sur les graphes). L'ensemble des nœuds  $V = \{v_1 \dots v_N\}$  représente les capteurs et l'ensemble des arêtes  $E$  représente les liens de communications entre ces capteurs. Plus spécifiquement, si deux nœuds  $(v_i, v_j) \in V^2$  peuvent communiquer directement entre eux (c'est-à-dire sans avoir à passer par un nœud intermédiaire), alors on note  $\{v_i, v_j\}$  l'arête de  $E$  les reliant.

On se place dans le cas d'un réseau asynchrone tel que décrit dans [BGPS06] : chaque nœud possède une horloge interne qui le réveille selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Les horloges de chaque nœud sont supposées indépendantes.

Comme présenté dans [BGPS06], ce modèle est équivalent au modèle fictif suivant : une horloge commune se réveille selon un processus de Poisson de paramètre  $N = \text{Card}(V)\lambda$ , puis, à chaque réveil, un nœud  $v$  est choisi aléatoirement uniformément dans le graphe. On note  $v(k) \in V$  le nœud choisi au  $k^{\text{ème}}$  réveil de l'horloge centrale. D'autre part, on suppose que  $v(k)$  est susceptible de réveiller à son tour un nœud voisin noté  $w(k)$ . On a ainsi  $\{v(k), w(k)\} \in E$  à chaque itération  $k \in \{0, 1, \dots\}$ . On suppose que  $w(k)$  est choisi uniformément aléatoirement parmi les voisins de  $v(k)$ .

Chaque capteur possède une mémoire qui lui permet de stocker des données. Dans le cadre de ce travail, on suppose que ces données sont des éléments d'une variété riemannienne  $\mathcal{M}$  de dimension  $n$  munie d'une métrique  $g$  (cf. [DC92] pour plus de précisions sur les variétés riemanniennes). C'est le cas par exemple dans un réseau de caméras, où chaque caméra stocke la matrice de rotation qui correspond à son orientation [TV09]. C'est aussi le cas d'un réseau de capteurs où chaque capteur estime une matrice de covariance [AMS09], une droite vectorielle [AMS09], une forme, etc. On détaillera une application où chaque capteur stocke une loi de probabilité sur un ensemble fini dans la section 4. Formellement, on note  $x_v(k)$  la donnée associée au capteur  $v \in V$ , à l'itération  $k$ . Les données initiales sont donc notées  $x_v(0)$ .

On appelle *consensus* la situation où  $v \in V \mapsto x_v \in \mathcal{M}$  est une application constante. L'objectif du papier consiste à proposer un algorithme distribué et asynchrone qui converge vers un consensus avec probabilité 1.

### 2.2 Données

Une méthodologie classique dans le cas où les données sont des éléments d'un espace vectoriel consiste à calculer des moyennes arithmétiques [BGPS06]. Toutefois, dans le cadre de ce papier, la notion de moyenne arithmétique n'est pas définie dans la mesure où elle repose sur une structure affine sous-jacente qui est absente ici. Par exemple, la moyenne arithmétique de deux matrices de rotations n'est pas une matrice de rotation. Ou encore, la moyenne arithmétique de deux droites vectorielles n'a pas de sens. Il faut donc procéder autrement dans le contexte des variétés.

On appelle chemin la donnée d'une fonction suffisamment régulière (cf [DC92])  $c : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ . En notant  $g$  la métrique riemannienne considérée, la longueur  $l(c)$  du chemin  $c$  est alors définie par :

$$l(c) = \int_0^1 \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt .$$

Dans le cas, d'un espace euclidien, il s'agit de la longueur euclidienne usuelle. On suppose que la variété  $\mathcal{M}$  est telle qu'entre chaque couple de points de  $(x, y) \in \mathcal{M}^2$ , il existe un unique chemin de longueur minimale les rejoignant ; on note ce chemin  $[x, y]$  et on le désigne sous le terme de *géodésique* entre  $x$  et  $y$ . Dans le cas d'un espace vectoriel euclidien  $[x, y]$  correspond simplement au segment de droite  $[x, y]$ . On définit aussi le point milieu  $\langle \frac{x+y}{2} \rangle$  [DC92] qui correspond à la moyenne arithmétique de  $x$  et  $y$  dans le cas euclidien. L'existence de géodésiques minimisantes est une hypothèse relativement faible, qui est équivalente à la complétude de  $\mathcal{M}$  [DC92]. L'unicité des géodésiques est en revanche une hypothèse plus forte qui exclut les variétés possédant des points focaux ou conjugués [O'S76] telles que les sphères. On appelle *boule géodésique* de centre  $p$  et de rayon  $r$  l'ensemble :  $\{q \in \mathcal{M} | d(p, q) \leq r\}$ . On dira que  $\mathcal{M}$  est à boules

strictement convexes lorsque :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{M}^3, x \neq y \Rightarrow d\left(\left\langle \frac{x+y}{2} \right\rangle, z\right) < \max(d(x, z), d(y, z))$$

On suppose dans ce qui suit que  $\mathcal{M}$  est une variété à boules strictement convexes, ce qui est le cas par exemple pour les variétés simplement connexes sans point focaux ; ce qui est le cas du simplexe, figurant dans la section 4.

### 3 Résultats

Dans cette section, on propose un nouvel algorithme de gossip dans le cas des variétés, pour lequel on énonce un résultat de convergence.

#### 3.1 Algorithme

L'algorithme du gossip pair-à-pair asynchrone possède l'extension suivante au cas des variétés.

---

#### Algorithme 1 Gossip pair-à-pair asynchrone

---

**Input** : un graphe  $G = (V, E)$  et la configuration initiale de nœuds associés  $x_v(0), v \in V$   
**for all**  $k \in \mathbb{N}$  **do**  
  Soit,  $v(k), w(k) \in G$  les deux nœuds voisins qui se sont réveillés à l'instant  $k$   
   $x_v(k+1) = \left\langle \frac{x_v(k) + x_w(k)}{2} \right\rangle$   
   $x_w(k+1) = \left\langle \frac{x_v(k) + x_w(k)}{2} \right\rangle$   
**end for**

---

#### 3.2 Convergence

Le résultat principal de ce papier est le suivant :

**Théorème 1.** *On suppose que la variété  $\mathcal{M}$  est à boules strictement convexes. On suppose que  $\text{Card}(V) = N$ . En notant  $X_k = (x_{v_1}(k), \dots, x_{v_N}(k))$  la suite générée par l'algorithme 1 :*

$$\exists x_\infty \in \mathcal{M}, \quad X_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} X_\infty := (x_\infty, \dots, x_\infty)$$

*La convergence ayant lieu presque sûrement.*

*Démonstration.* On se contente de donner quelques éléments de preuve. On note  $D_k = \max\{d(X_k(v), X_k(w)) : (v, w) \in V^2\}$  le diamètre de  $X_k$  à l'instant  $k$ . On montre que  $(D_k)_{k \geq 0}$  est une suite décroissante.

Si  $v$  et  $w$  sont les nœuds réveillés à l'instant  $k+1$ , alors deux cas sont possibles :

1.  $d(v(k), w(k)) = D_k$  c'est à dire que  $v$  et  $w$  sont des extrémités du diamètre, dans ce cas si après itération on a  $D_{k+1} > D_k$  alors il existe un nœud  $r$  tel que  $d\left(\left\langle \frac{v(k)+w(k)}{2} \right\rangle, r\right) > \max(d(v(k), r), d(w(k), r)) > \frac{d(v(k), r) + d(w(k), r)}{2} > \frac{D_k}{2}$  (la dernière inégalité résultant de l'inégalité triangulaire) et donc la boule géodésique de centre  $\left\langle \frac{v(k)+w(k)}{2} \right\rangle$  et de rayon  $\frac{D_k}{2}$  n'est pas convexe, ce qui contredit les hypothèses.
2.  $d(v(k), w(k)) < D_k$ , et dans ce cas  $v$  et  $w$  ne portent pas le diamètre. Si  $v'$  et  $w'$  sont des points qui portent le diamètre alors en posant :  $u = \left\langle \frac{v'(k)+w'(k)}{2} \right\rangle$  on obtient que  $v(k)$  et  $w(k)$  sont dans la boule de centre  $u$  et de rayon  $\frac{D_k}{2}$  et donc par convexité que  $v(k+1) = w(k+1) = \left\langle \frac{v(k)+w(k)}{2} \right\rangle$  y est aussi et donc que le rapprochement de  $v(k)$  et  $w(k)$  n'influe pas sur le diamètre.

Le reste de la preuve procède par l'absurde pour établir la convergence de  $D_k$  vers 0. □

## 4 Application à la classification distribuée

L’algorithme proposé est illustré dans la situation suivante : chaque nœud du réseau doit prendre une décision sur un nombre  $p < \infty$  d’hypothèses partagées par le réseau et le réseau cherche ensuite un consensus. Les exemples typiques incluent la détection d’intrusion (deux hypothèses : intrusion/normal), la classification d’avions par capteurs thermiques, *etc.* Dans ce contexte, la donnée de chaque nœud  $v$  est un élément de la forme  $x_v = (x_v^1, \dots, x_v^p)$  avec  $x_v^i \geq 0$  et  $\sum_i x_v^i = 1$ . La variété considérée est ainsi le simplexe de dimension  $p - 1$  muni de la métrique de Fisher [AN07]. Les expériences numériques confirment la convergence de l’algorithme proposé. Ces expériences suggèrent aussi un bon comportement en terme de vitesse de convergence lorsque cet algorithme est comparé à un algorithme de type Gossip “doux” [Bon11, TAV12].

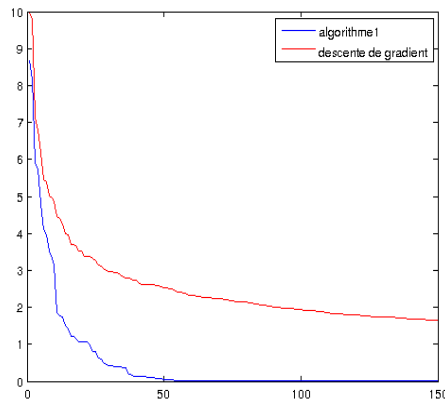


FIGURE 1: Comparaison entre l’algorithme 1 et celui décrit dans [Bon11] ( $n=3$ ).

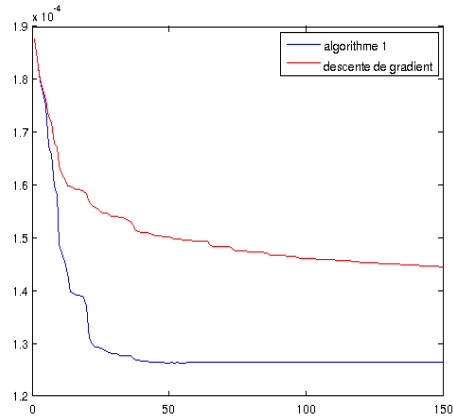


FIGURE 2: Comparaison entre l’algorithme 1 et celui décrit dans [Bon11] ( $n=100$ ).

## Références

- [AMS09] P-A Absil, R. Mahony, and R. Sepulchre. *Optimization algorithms on matrix manifolds*. Princeton University Press, 2009.
- [AN07] S-I Amari and H. Nagaoka. *Methods of Information Geometry*, volume 191. AMS, 2007.
- [AYSS09] T.C. Aysal, M.E. Yildiz, A.D. Sarwate, and A. Scaglione. Broadcast Gossip Algorithms for Consensus. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(7) :2748–2761, 2009.
- [BGPS06] S. Boyd, A. Ghosh, B. Prabhakar, and D. Shah. Randomized gossip algorithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(6) :2508–2530, 2006.
- [Bon11] S. Bonnabel. Stochastic gradient descent on riemannian manifolds. *arXiv preprint*, 2011.
- [BT97] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis. *Parallel and Distributed Computation : Numerical Methods*. Athena Scientific, 1997.
- [DC92] M.P. Do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [Die05] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2005.
- [KDG03] D. Kempe, A. Dobra, and J. Gehrke. Gossip-based computation of aggregate information. In *IEEE Foundations of Computer Science*, 2003.
- [O’S76] J. O’Sullivan. Riemannian manifolds without focal points. *J. Diff. Geom.*, 11 :321–333, 1976.
- [SG07] Luca Schenato and Giovanni Gamba. A distributed consensus protocol for clock synchronization in wireless sensor network. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
- [TAV12] R. Tron, B. Afsari, and R. Vidal. Intrinsic consensus on SO(3) with almost-global convergence. In *51st IEEE Conference on Decision and Control*, 2012.
- [Tsi84] J. Tsitsiklis. *Problems in Decentralized Decision Making and Computation*. PhD thesis, 1984.
- [TV09] Roberto Tron and René Vidal. Distributed image-based 3-d localization of camera sensor networks. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 2009.