



HAL
open science

Fuzzifier le modèle comptable / Foundations of fuzzy financial statements

J.-F. Casta, X. Bry

► **To cite this version:**

J.-F. Casta, X. Bry. Fuzzifier le modèle comptable / Foundations of fuzzy financial statements. Modèles d'organisation et modèles comptables, May 1995, Paris, France. pp.cd-rom. hal-00818600

HAL Id: hal-00818600

<https://hal.science/hal-00818600>

Submitted on 19 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Fuzzifier* le modèle comptable**

Foundations of fuzzy financial statements

J-F. Casta et X. Bry

CEREG (URA CNRS 1238)
UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE

Mots-clés : Mesure comptable, Comptabilité en partie double, Information subjective, Ensembles flous, Groupe de différences.

Key words : Financial Accounting Theory, Accounting Measurement, Double Entry Bookkeeping, Qualitative Information, Fuzzy Sets, Differences Group.

Résumé : Le modèle comptable de représentation de l'entreprise reste fondé sur l'arithmétique élémentaire, et plus précisément sur le groupe des différences construit sur le monoïde commutatif et cancellatif des réels positifs munis de l'addition (Ellerman, 1986). Ce modèle n'est pas conçu pour prendre en compte l'imprécision pouvant entacher l'information. La mesure sous-jacente est purement quantitative et précise. Face à un certain nombre de dysfonctionnements, il est possible d'étendre la comptabilité financière en partie double au traitement d'une information quantitative imprécise, voire subjective. La théorie des ensembles flous constitue un cadre théorique général permettant d'explorer cette voie de recherche.

Abstract : This paper presents an extension of double entry accounting to fuzzy numbers. In particular, it shall attempt to study the accounting model's reductionist role by re-examining the concept of measurement in accounting, to set forth the conceptual consequences for the accounting system of using metaphors from physics (the strictly quantitative character assigned to information treated), and to suggest the basic outline of a less reductionist accounting system, which more specifically, should be based on a more qualitative view of information. To achieve this goal, we shall use instruments from the theory of fuzzy sets to include treatment of knowledge and information characterized by imprecision and/or uncertainty. The extension of financial accounting is based on the modern mathematical formulation of double entry bookkeeping using the group of differences.

Fuzzifier le modèle comptable

J-F. Casta et X. Bry

CEREG (URA CNRS 1238)
UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE

S'appuyant sur une structure calculatoire directement issue de l'arithmétique élémentaire, le modèle comptable traditionnel n'est pas à même de traiter les problèmes engendrés par l'imperfection de l'information. En effet, le concept de mesure sous-jacent, d'ordre strictement quantitatif (Mattessich, 1964 ; Ijiri, 1967 & 1975 ; Sterling, 1970), ne laisse aucune place au traitement de l'imprécision et/ou de l'incertitude non probabiliste inhérentes à toute information de nature subjective. Cette conception du modèle comptable, qui fait implicitement référence à la métaphore physique, favorise l'apparition d'effets de seuil et se trouve à l'origine d'un véritable syndrome de l'exactitude arithmétique (Casta, 1993).

Afin de conserver la dimension subjective attachée à l'information, nous proposerons d'utiliser des états financiers *fuzzifiés* (c'est-à-dire élaborés à partir de nombres flous). Pour ce faire, nous introduirons des instruments empruntés à la théorie des ensembles flous pour traiter de connaissances, d'informations et de concepts entachés d'imprécision et/ou d'incertitude. Plus précisément, nous nous appuierons sur la structure mathématique dont relève la comptabilité financière classique, à savoir le *groupe des différences* construit sur le monoïde commutatif et cancellatif des réels positifs, muni de l'addition (Ellerman, 1986). Face au problème de légitimité posé par l'extension de la comptabilité financière au traitement de nombres flous, nous réexaminerons la sémantique propre au contexte comptable de mesure du patrimoine et du résultat.

1. Les fondements de la comptabilité financière

Praticiens et chercheurs ont opté pour une conception quantitative dont le caractère réducteur pour l'utilisateur a maintes fois été dénoncé. Bien que souscrivant à ces critiques, notre présent propos est très différent puisqu'il ne concerne directement ni les principes, ni les méthodes comptables qui constituent le modèle comptable traditionnel. Notre réflexion est essentiellement d'ordre instrumental et a trait aux règles opératoires de la quantification. Ces règles s'appuient sur une conception stricte de la *numéricité* qui

Notre réflexion est essentiellement d'ordre instrumental et a trait aux règles opératoires de la quantification. Ces règles s'appuient sur une conception stricte de la *numéricité* qui renvoie à un état donné de la technologie mathématique, véritable technologie invisible. A priori évident, le choix de la stricte *numéricité* n'est cependant pas neutre. En effet, l'*interface symbolique - numérique*, point d'entrée du modèle comptable, est l'une des sources de l'effet réducteur qui interfère implicitement avec le pouvoir de décision de l'utilisateur des *nombres comptables* (Casta, 1993).

1.1. La mesure en comptabilité

Deux approches ont façonné le concept de mesure utilisé en comptabilité, alimentant par là-même une vive controverse [Sterling, 1970] :

- l'approche classique ("Measure Theory"), s'inspirant directement du monde des sciences physiques [Campbell, 1920 rééd.1957, 1953] selon laquelle la mesure se réduit à un processus d'attribution de valeurs numériques (mesures fondamentales) permettant de représenter des propriétés décrites par des lois physiques. Tournées vers l'observation d'attributs du monde réel (longueur, poids, volume,...), ces mesures présupposent l'existence d'une propriété physique d'additivité.

- l'approche moderne de la mesure ("Measurement Theory") qui trouve son origine dans les sciences sociales, notamment au niveau de l'évaluation des perceptions sensorielles [Stevens, 1951, 1959]. En jetant les bases de la psychométrie, elle a considérablement élargi le champ couvert par la théorie de la mesure en l'étendant à la quantification de propriétés psychologiques ou de perceptions telles que l'utilité, l'anxiété, la brillance, la dureté.

Cependant, il apparaît clairement que la plupart des efforts visant à intégrer la dimension qualitative dans la théorie de la mesure comptable n'ont pas abouti¹. Dès lors, la conception de la mesure qui sous-tend la comptabilité financière reste purement quantitative.

1.2. Les principes comptables généralement admis

Dans un contexte historique et économique donné, la comptabilité financière apparaît comme une construction qui repose sur un certain nombre de principes généralement admis par la pratique comptable ainsi que par la doctrine. L'appréhension de la réalité économique par le modèle comptable de représentation de l'entreprise est largement

¹ Pour plus de détails, voir (Casta, 1993).

conditionnée par le choix de ces principes. Il convient traditionnellement de distinguer ceux qui régissent les modes d'évaluation (principe d'enregistrement en coûts et valeurs historiques, principe de prudence, principe de permanence des méthodes, ...) et ceux qui spécifient le protocole d'observation (principe de l'entité, principe d'indépendance des exercices, principe de continuité de l'exploitation, ...).

Parmi ceux-là, le principe de la partie double occupe une place spécifique : en prescrivant, depuis le Moyen-Age, l'enregistrement de chaque transaction en comptabilité simultanément selon un double point de vue, il énonce une contrainte formelle originale qui affecte tant la saisie que le traitement des données dans les comptes. Plus tardivement, avec l'émergence du concept de bilan, ce principe a étendu son influence à la structuration des états financiers. Malgré l'apparition d'autres modes d'organisation des données, le principe de la partie double s'identifie encore largement à la technologie de la comptabilité financière.

Par ailleurs, les règles d'évaluation découlent essentiellement de l'application du principe d'enregistrement en coûts et valeurs historiques. S'agissant de l'enregistrement de transactions effectives, l'imprécision qui pourrait affecter leur valorisation relève de l'application de procédures de contrôle interne et d'audit. Nous admettrons donc l'hypothèse selon laquelle l'imprécision et/ou l'incertitude sur ces valeurs reste compatible avec le seuil de signification. A l'inverse, l'application du principe de prudence engendre le traitement d'une information de nature beaucoup plus subjective. C'est le problème posé par la fusion de ces deux types d'information qui servira de point de départ à notre réflexion.

1.3. Mesure comptable du patrimoine et du résultat

A travers ce qu'il est convenu d'appeler *l'équation de bilan*, le principe de la partie double structure le modèle comptable de mesure du patrimoine et du résultat. Il assure à ce modèle une cohérence interne forte, en particulier, au plan de l'élaboration des états financiers. L'équation de bilan exprime en fait une **identité** en termes d'emplois et de financement :

$$(1) \quad \text{ACTIF}_{(T)} \equiv \text{SITUATION NETTE}_{(T)} + \text{DETTES}_{(T)}$$

S'agissant d'une description de nature tautologique de la situation patrimoniale de l'entreprise, cette relation est par nature vérifiée à tout instant. En particulier, l'application du principe de la partie double conduit à enregistrer chaque transaction de telle sorte que cette équation reste vérifiée à l'instant T+1 sous la forme :

$$(2) \quad \text{ACTIF}_{(T+1)} \equiv \text{SITUATION NETTE}_{(T)} + [\text{PRODUITS}_{(T,T+1)} - \text{CHARGES}_{(T,T+1)}] + \text{DETTES}_{(T+1)}$$

Dès lors, la technique de la comptabilité en partie double permet, par mise à jour séquentielle de l'équation de bilan après l'enregistrement d'une transaction, de calculer simultanément le patrimoine et le résultat d'entreprise.

1.4. Structure algébrique de la comptabilité en partie double

Au plan formel, la structure algébrique² sous-jacente a récemment été explicitée par D.P. Ellerman (1986). Dépassant l'analyse classique d'Ijiri (1965, 1967, 1975), et intégrant tant le mécanisme du mouvement des comptes que l'équation de bilan, D.P. Ellerman identifie une structure de groupe de différences : groupe construit sur un monoïde commutatif et cancellatif, celui des réels positifs muni de l'addition. Il nomme cette structure algébrique *Groupe de Pacioli*. Le groupe de Pacioli $P(M)$ d'un monoïde cancellatif M est construit à partir d'une relation d'équivalence \otimes particulière entre couples ordonnés d'éléments de M .

♦ Les couples ordonnés (ou plus exactement les classes d'équivalence de couples ordonnés) sont une généralisation des "comptes en T" usuels appelés T-termes et notés $[d//c]$, d étant le *débit* et c le *crédit*. Le monoïde M étant muni de la loi de composition interne $+$, on l'étend de la manière suivante aux couples ordonnés :

$$[d//c] + [d'//c'] = [d + d'//c + c']$$

♦ Si 0 est l'élément neutre de la loi $+$ dans M , $[0//0]$ est trivialement le neutre pour $+$ dans l'ensemble des classes de couples ordonnés.

♦ La relation d'équivalence \otimes définit l'égalité de deux T-termes à partir de l'égalité de leur somme croisée³ :

$$\otimes : \quad [d//c] = [d'//c'] \Leftrightarrow d + c' = d' + c$$

² Rappels sur les structures algébriques :

♦ Un ensemble M muni d'une loi de composition interne $*$ associative, possédant un élément neutre dans l'ensemble, est appelé *monoïde*. De plus, si cette loi est commutative, le monoïde est dit commutatif (ou abélien).

♦ Un monoïde commutatif $(M, *)$ est dit *cancellatif* ssi :

$$\forall x, y, a \in M: \quad x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

♦ Un groupe $(G, *)$ est un ensemble G muni d'une loi de composition interne associative, dotée d'un élément neutre, et dans lequel tout élément admet un symétrique (à droite et à gauche).

♦ Dans un ensemble E sur lequel sont définies une loi de composition interne T ainsi qu'une relation d'équivalence $\otimes : x \equiv x' \pmod{\otimes}$, on peut définir une loi interne T sur E/\otimes , c'est-à-dire entre deux classes, telle que la relation d'équivalence \otimes soit compatible avec la loi T . La loi T est la loi quotient de la loi T par la relation d'équivalence \otimes . Si la loi T est associative, commutative, ou possède un élément neutre, il en est de même de T . En revanche, il est intéressant de noter qu'une classe peut être symétrisable dans E/\otimes alors même qu'aucun représentant ne l'était pour la loi T .

³ On remarque que dans ce cas, la définition de la relation d'équivalence peut être réécrite :

$$[d//c] = [d'//c'] \Leftrightarrow c - d = c' - d'$$

... ce qui justifie l'appellation alternative de "groupe des différences" pour le groupe de Pacioli.

La réflexivité et la symétrie de la relation \otimes sont évidentes ; la transitivité résulte du caractère cancellatif de M .

♦ Dans la structure quotient (structure formée par les classes d'équivalence de cette relation, appelées *T-termes*), munie de la loi +, tout élément⁴ a un symétrique : le symétrique de (la classe de) $[d//c]$ est (la classe de) $[c//d]$. En effet:

$$[d//c] + [c//d] = [c+d//c+d] = [0//0]$$

Dès lors, l'ensemble des classes ainsi construites a une structure de groupe commutatif sur M : il s'agit du groupe de Pacioli $P(M)$.

Méthode comptable et groupe de Pacioli :

Selon Ellerman, la méthode comptable issue de la partie double repose entièrement sur l'addition de T-termes $[d//c]$ appartenant à la classe spécifique de $[0//0]$, appelés 0-termes. La relation d'équivalence permet d'interpréter cette égalité $[d//c] = [0//0]$ comme une égalité des sommes croisées : toute transaction est décrite de façon telle que $d = c$. En effet, le processus comptable d'enregistrement des transactions consiste formellement à mettre à jour une équation (équation de bilan) en y ajoutant des 0-termes.

L'équation de bilan initiale est préalablement mise sous forme de somme de T-termes⁵ de la manière suivante (d_i désignant les débits et c_j les crédits) :

$$d_1 + \dots + d_n = c_1 + \dots + c_p$$

transformée en

$$[d_1 // 0] + \dots + [d_n // 0] = [0 // c_1] + \dots + [0 // c_p]$$

Ensuite, chaque transaction est saisie sous la forme de l'addition d'un 0-terme⁶, permettant ainsi de sauvegarder l'équilibre de l'équation de bilan initiale. On peut donc schématiser la méthode d'enregistrement des transactions à partir de la mise à jour séquentielle de l'équation de bilan par l'addition de différents 0-termes :

équation de bilan initiale (0-terme) + transaction (0-terme) + transaction (0-terme) <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> équation de bilan finale (0-terme)

⁴ Tout T-terme peut être désigné indifféremment par n'importe lequel de ses représentants.

⁵ La somme de ces T-termes donne donc un 0-terme. L'ensemble de ces T-termes correspond au Grand-Livre.

⁶ L'enregistrement séquentiel des transactions sous la forme de 0-termes correspond au Journal.

2. Faut-il repenser le modèle comptable ?

La conception strictement numérique qui, comme nous venons de le voir, sous-tend le modèle de représentation comptable nous paraît difficilement compatible avec le caractère imprécis et/ou incertain attaché aux données, mais aussi aux concepts traités par la comptabilité financière. Dans ce contexte, l'imprécision renvoie à une information incomplète ou, pour l'imprécision lexicale, à un concept mal défini ; l'incertitude correspond à la situation d'indécidabilité qui résulte du caractère imprécis ou conflictuel des connaissances actuellement disponibles (Dubois et Prade, 1987). La plupart des concepts traités par la comptabilité financière sont de pures abstractions "construites" par la pratique professionnelle et le processus de normalisation. N'ayant le plus souvent aucun équivalent dans le monde physique, ils sont définis comme des objets linguistiques, c'est-à-dire dotés d'une imprécision intrinsèquement irréductible, voire d'ambiguïté, tels les concepts de *frais de recherche-développement*, *marques commerciales*, *quasi-fonds propres*.

Par ailleurs, les données traitées se présentent sous forme pseudo-symbolique à l'entrée du modèle comptable :

- dans le cadre d'application du principe de coûts historiques, la raison tient soit à l'imprécision des évaluations comptables, soit à la difficulté d'affecter des valeurs numériques précises à des classes comptables reposant sur des concepts partiellement ambigus,
- dans le cadre d'application du principe de prudence, la raison est liée au caractère nécessairement subjectif de toute évaluation du risque (par exemple : détermination des provisions, des amortissements),
- dans une perspective d'élaboration d'états financiers prévisionnels, bien que dotées d'une cohérence interne, les informations traitées sont alors totalement subjectives.

Dès lors tout modèle fondé sur une stricte "*numéricité*", renonce par construction à appréhender, et donc à conserver au cours des traitements, l'imprécision, l'ambiguïté et l'incertitude sur les données. Il les *numérise* plus ou moins arbitrairement, puis fait subir à leur expression numérique des traitements qui relèvent de l'arithmétique élémentaire. La réduction ainsi opérée se traduit par une conversion, souvent implicite, de concepts imprécis et/ou incertains, relevant du symbolique, en une représentation numérique, seule finalement accessible à l'utilisateur des *nombres comptables*.

Ce constat nous a conduit (Casta, 1993) à proposer l'exploration de voies alternatives en vue d'intégrer au modèle classique des dimensions telles que l'ambiguïté des concepts, l'imprécision des mesures, l'incertitude ou l'ignorance partielle, en vue de pallier quelques dysfonctionnements majeurs du modèle. Pour ce faire, nous avons été amené à nous référer à la théorie des sous-ensembles flous, mais aussi à la théorie des possibilités. L'idée n'est pas nouvelle [Kaufmann, Gil Aluja, 1986), (Zebda, 1989), (Rhys, 1991). En effet, ces instruments constituent un cadre cohérent de modélisation numérique pour traiter des connaissances et des informations entachées d'imprécision, d'ignorance partielle, d'ambiguïté et/ou d'incertitude.

3. Extension de la comptabilité en partie double aux nombres flous (Casta, Bry, 1994)

Sur un ensemble E ordinaire quelconque appelé *référentiel*, on définit un sous-ensemble flou \bar{A} à l'aide d'une fonction $\mu_{\bar{A}}$ mesurant le degré d'appartenance de chaque élément $x \in E$ à l'ensemble \bar{A} :

$$\mu_{\bar{A}} : \begin{cases} E \longrightarrow [0,1] \\ x \longrightarrow \mu_{\bar{A}}(x) \end{cases}$$

On appelle *nombre flou* (Zadeh, 1965), (Dubois, Prade, 1987), (Zimmermann, 1991) tout sous-ensemble flou convexe d'un référentiel numérique tel qu'il existe au moins un x de degré d'appartenance égal à 1. En pratique, pour des raisons tenant à la rapidité de calcul, on considère le plus souvent des nombres flous d'un certain type : de *type LR*, notés de manière abrégée $(m, \alpha, \beta)_{LR}$, ou des *intervalles flous de type LR*, notés $(m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}$, ainsi que des *nombres flous trapézoïdaux*, notés (a, b, c, d) , comme le montre le schéma 1. Par ailleurs, en ce qui concerne le calcul sur des nombres flous, le principe d'extension a permis d'étendre les opérations algébriques usuelles aux nombres flous⁷.

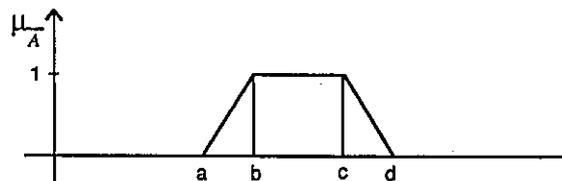


Schéma 1 - NOMBRE FLOU TRAPÉZOÏDAL.

⁷ Sur les propriétés des nombres flous et sur les opérateurs de calcul associés, Cf. en particulier : (Zadeh, 1965), (Dubois & Prade, 1987), (H-J Zimmermann, 1991).

D'un point de vue sémantique, il convient de préciser que les nombres flous seront arbitrairement vus comme des valeurs imparfaitement précisées, attribuées à des objets parfaitement référencés. Par exemple, dans l'assertion "le stock de produits comprend environ 10 000 unités", le nombre flou "environ 10 000" est une mesure imprécise associée à un objet parfaitement défini (le volume du stock de produits). Cette mesure peut être considérée comme virtuellement connaissable avec toute la précision voulue. Nous appellerons *réfèrent* la mesure précise inconnue associée à l'objet bien défini que l'on mesure. On peut toujours concevoir les nombres flous comme une incertitude sur des nombres vulgaires au sens où l'on peut imaginer pouvoir éventuellement les préciser totalement en acquérant l'information manquante.⁸

3.1. Procédure d'extension immédiate aux nombres flous en valeur

La première approche utilisable pour *fuzzifier* la comptabilité en partie double consiste à construire directement une extension du Groupe de Pacioli, sur la base de l'addition floue des valeurs et d'une extension de la relation d'équivalence \otimes relative aux sommes croisées.

3.1.1. Construction du monoïde flou sur les réels positifs (en valeur)

Dans un premier temps, cette approche permet d'obtenir rapidement un monoïde sur les réels flous (en valeur). En effet :

♦ L'ensemble des réels flous positifs muni de l'addition est un monoïde flou commutatif, dans la mesure où :

- . l'addition de deux réels flous positifs est trivialement un réel flou positif,
- . l'addition est associative et commutative sur l'ensemble des réels flous,
- . l'élément neutre est le réel ordinaire 0, qui est un réel flou particulier.

♦ En revanche, il n'est pas trivial que l'ensemble des réels flous positifs soit cancellatif, puisque la soustraction d'un nombre flou à lui-même (en tant que valeur) ne vaut pas zéro. Cette propriété est cependant évidente si l'on considère l'ensemble des nombres flous de type LR , L et R étant deux fonctions données. Enfin, à titre de cas

⁸ Afin d'éviter toute ambiguïté, on notera les nombres flous avec des minuscules (\bar{z}) lorsque l'on s'intéressera à eux seulement en tant que valeur, et avec des majuscules (\bar{Z}) lorsque l'on s'intéressera à eux en tant que nombre flou référencé.

particulier, l'ensemble des nombres flous (ou intervalles flous) trapézoïdaux, muni de l'addition, est un monoïde commutatif et cancellatif.

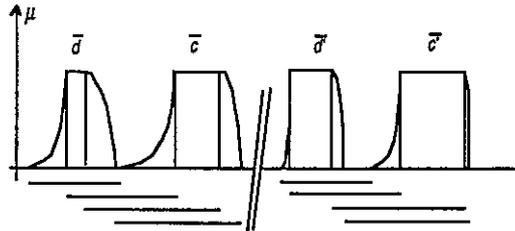
3.1.2. Construction du Groupe de Pacioli sur les réels flous (en valeur)

• Il est possible de construire le Groupe de Pacioli associé au monoïde des LR-réels flous positifs, muni de l'addition floue, en étendant la relation \otimes . Celle-ci reste encore trivialement une relation d'équivalence :

$$\otimes : [\bar{d} // \bar{c}] \equiv [\bar{d}' // \bar{c}'] \Leftrightarrow \bar{d} + \bar{c}' = \bar{d}' + \bar{c}$$

Cependant, une telle extension pose un problème de nature sémantique. En effet, dans le cas des réels positifs, la relation \otimes avait initialement pour unique objet de permettre de définir des classes de comptes ayant le même solde, sans avoir à calculer ce solde comme différence (la soustraction n'étant pas définie pour tous les éléments dans un monoïde).

Que devient la signification attachée à cette relation étendue ? Pour préciser ce point, nous pouvons examiner les conséquences qu'elle engendre, par exemple, dans le cas de nombres LR. Par exemple, sont égaux au sens de la relation \otimes étendue les deux couples $[\bar{d} // \bar{c}]$ et $[\bar{d}' // \bar{c}']$ suivants :



Il est évident⁹, dans le cas flou, que cette égalité définie à partir de l'extension de la "somme croisée" ne correspond aucunement à celle des différences floues suivantes :

$$\bar{d} - \bar{c} = \bar{d}' - \bar{c}'$$

En conclusion, nous pouvons constater qu'un "Groupe de Pacioli" (commutatif) a bien formellement été construit sur le monoïde commutatif des réels flous (en valeur) muni de l'addition. Cependant, cette structure n'a aucun point commun avec un "groupe des différences". Dans ces conditions, ledit Groupe de Pacioli ne peut être vu comme la structure naturelle d'une comptabilité en partie double étendue aux nombres flous.

⁹ Pour plus de précisions, voir (Casta, Bry, 1994).

3.2. Extension du calcul de soldes

Lors du calcul du solde de chaque compte (ou lors du calcul de la situation nette dans le bilan), il est, en définitive, toujours nécessaire de considérer une équation floue du type : $\bar{x} = \bar{y} + \bar{z}$. En procédant naïvement, on obtiendrait l'équation $\bar{x} = (\bar{x} - \bar{z}) + \bar{z}$, qui est totalement fautive lorsque l'opérateur (-) définit la soustraction floue (sauf si \bar{z} est un réel vulgaire)¹⁰. Pour légitimer un certain usage opératoire des équations floues, il est important d'accorder à celles-ci une sémantique sans ambiguïté, et en particulier :

- considérer des réels flous référencés,
- distinguer l'égalité en valeur de l'identité. Dès lors, $\bar{z} = \bar{x}$ signifie que \bar{z} et \bar{x} sont en fait une seule et même mesure de la même chose, avec des mesures astreintes à être *logiquement* égales. La moindre précision acquise sur \bar{z} est reportée sur \bar{x} , de telle sorte que l'égalité reste maintenue dans tous les états informationnels possibles.
- supposer indépendantes les incertitudes affectant deux données différentes (au sens où l'on peut acquérir toute information sur la première sans pour autant accroître la précision sur la seconde). En revanche, contrairement au cas de deux données considérées comme indépendantes, la soustraction d'une donnée à elle-même aura pour résultat le réel 0 (il ne s'agit donc pas de la soustraction floue).

Sous ces conditions, les méthodes de résolution sont très proches des méthodes classiquement appliquées aux équations vulgaires : en effet, si \bar{z} est un nombre flou quelconque, mais parfaitement référencé, $\bar{z} - \bar{z} = 0$ permet la simplification des expressions. Dans un tel contexte, il est cependant nécessaire de mener tous les calculs de manière exclusivement littérale, en procédant ensuite aux simplifications des nombres flous ayant un même référent. Enfin, dans l'expression simplifiée, dans laquelle chaque référent apparaît au plus une fois, les données seront remplacées par leur valeur numérique et les calculs seront effectués avec les opérations floues.

3.3. Procédure d'extension aux nombres flous référencés

Comme nous venons de le voir, il est nécessaire de raisonner sur des nombres flous référencés pour tenir compte de la totale dépendance induite par la relation d'identité liant les deux termes de l'enregistrement d'une transaction.

¹⁰ En effet, $-\bar{z}$ n'est pas le symétrique, pour l'addition, de \bar{z} (lequel n'a d'ailleurs pas de symétrique s'il n'est pas vulgaire).

3.3.1. construction de T-termes flous

◆ Pour procéder à l'extension de la comptabilité en partie double, il est tout à fait inopportun d'utiliser le Groupe de Pacioli précédemment construit sur le monoïde des réels flous positifs (en valeur) muni de l'addition. *Il existe donc, entre le débit et le crédit d'une transaction floue, une liaison plus forte que la simple égalité des nombres flous.* Lorsqu'un débit est *théoriquement* égal à un crédit, il ne s'agit pas de l'égalité des nombres flous, mais de *l'identité* (des référents) ou *égalité forte*. On peut illustrer ces situations par le cas général d'un couple $[\bar{d} / \bar{c}]$ de deux réels flous indépendants (Cf. Schéma 2) et par celui, plus spécifique à la partie double, d'un couple $[\bar{X} / \bar{X}]$ de deux réels flous identiques (Cf. Schéma 3) :

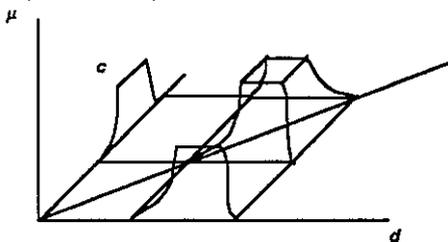


Schéma 2 - COUPLE DE DEUX RÉELS FLOUS INDÉPENDANTS $[\bar{d} / \bar{c}]$

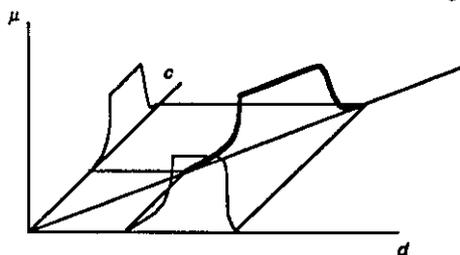


Schéma 3 - COUPLE DE DEUX RÉELS FLOUS IDENTIQUES $[\bar{X} / \bar{X}]$

Il est donc nécessaire de construire une structure (la plus simple, mais aussi la plus proche possible du Groupe de Pacioli) dans laquelle on puisse exprimer les liaisons fortes entre incertitudes. Il s'agit d'étendre la somme aux réels positifs flous *référencés*, puis de construire l'ensemble de toutes les sommes possibles de réels positifs flous *référencés*, supposés initialement indépendants¹¹.

¹¹ Pour une démonstration, voir (Casta, Bry, 1994).

♦ L'extension de l'addition aux réels flous référencés constitue une application du principe de calcul sur des variables interactives (Dubois, Prade, 1981) au cas particulier où les variables sont liées par une relation d'identité. Selon la nature de l'interactivité, l'extension de l'addition sera définie comme suit :

- 1/ pour des réels flous \bar{A} et \bar{B} indépendants, $\bar{A} + \bar{B}$ correspond à l'addition floue.
- 2/ pour deux nombres flous totalement interactifs (au sens de la relation d'identité), l'addition a pour résultat la multiplication par un scalaire, soit :

$$\forall k, m \in N, k.\bar{A} + m.\bar{A} = (k + m)\bar{A}$$
- 3/ pour le cas intermédiaire de deux opérandes obtenus comme combinaison des deux cas précédents, il conviendra d'utiliser les propriétés de commutativité et d'associativité.

Dès lors, l'extension est directe à l'ensemble des réels flous obtenus par sommation quelconque de réels flous référencés indépendants.

♦ L'ensemble S des sommes quelconques obtenues à partir de l'ensemble des réels flous référencés à *incertitudes indépendantes* est un monoïde commutatif. Les incertitudes des éléments de ce monoïde ne sont évidemment plus a priori indépendantes. On notera $S+$ l'ensemble des sommes quelconques obtenues à partir de l'ensemble des réels flous référencés positifs à incertitudes indépendantes. Ce monoïde $S+$ est alors trivialement cancellatif, la soustraction d'un nombre flou *référéncé* à lui-même valant bien zéro : $\bar{A} + \bar{X} = \bar{B} + \bar{X} \Leftrightarrow \bar{A} + \bar{X} - \bar{X} = \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$

♦ L'ensemble des couples d'éléments de $S+$ muni de l'addition des couples permet de construire un deuxième monoïde commutatif¹². Par définition, l'addition des couples est interne à cet ensemble. Elle est toujours associative, commutative et a pour élément neutre $[0 / 0]$, qui appartient bien à l'ensemble. De ce fait, cet ensemble forme un monoïde. En revanche, aucun élément, si ce n'est le neutre, n'admet de symétrique dans cet ensemble, qui ne constitue donc pas un groupe.

3.3.2. Relation d'équivalence

On peut sur l'ensemble précédent définir la relation d'équivalence suivante :

$$[\bar{D} / \bar{C}] \equiv [\bar{D}' / \bar{C}'] \Leftrightarrow \bar{D} + \bar{C}' = \bar{D}' + \bar{C}$$

¹² Les couples d'éléments de $S+$ non a priori identiques seront notés à l'aide d'un seul séparateur /, soit $[\bar{A} + \bar{C} / \bar{B} + \bar{C}]$, alors que les couples d'éléments identiques (fortement égaux) seront notés $[\bar{X} + \bar{Y} // \bar{X} + \bar{Y}]$ à l'aide du double séparateur //.

L'élément neutre de la structure quotient est trivialement la classe des couples de type $[\bar{X} // \bar{X}]$. Enfin, la classe de $[\bar{D} // \bar{C}]$ admet pour symétrique la classe de $[\bar{C} // \bar{D}]$:

$$[\bar{D} // \bar{C}] + [\bar{C} // \bar{D}] = [\bar{D} + \bar{C} // \bar{C} + \bar{D}] = [0 // 0]$$

La structure quotient forme donc un groupe commutatif.¹³

3.3.3. Construction d'une comptabilité en partie double floue

En faisant la distinction entre les nombres flous en valeur (munis des opérations floues et de l'égalité floue) et les nombres flous référencés (munis d'une extension de ces opérations qui respecte l'identité de référent, et de l'égalité forte), on a pu sauvegarder l'essentiel du formalisme de Pacioli :

- la symétrie de rôle du débit et du crédit dans les enregistrements,
- l'équilibre comptable strict, et non flou,
- l'interprétation comme groupe des différences généralisé aux différences floues.

Tout comme dans le cas vulgaire, cette comptabilité est fondée sur les 0-termes (T-termes de la forme $[\bar{A} // \bar{A}]$). Elle consiste à mettre à jour une équation de bilan initiale en lui ajoutant des transactions, sous forme de 0-termes. En effet, partant de l'équation de bilan initiale $\bar{D}_1 + \dots + \bar{D}_n = \bar{C}_1 + \dots + \bar{C}_p$ nous pouvons remarquer que l'égalité entre les membres de gauche et de droite n'est pas la simple égalité des nombres flous, mais l'égalité comptable forte. Dès lors, une telle équation comportera une inconnue (le solde des comptes). Il est possible d'écrire cette équation sous la forme du 0-terme :

$$[\bar{D}_1 + \dots + \bar{D}_n // \bar{C}_1 + \dots + \bar{C}_p]$$

On peut encore procéder à la transformation de cette équation en somme de T-termes de type $[\bar{D} // 0]$ et $[0 // \bar{C}]$ permettant de distinguer formellement l'information propre aux différents comptes. Mais il convient alors de ne pas oublier la contrainte d'égalité comptable forte, qui s'énonce sous la forme :

$$[\bar{D}_1 // 0] + \dots + [\bar{D}_n // 0] + [0 // \bar{C}_1] + [0 // \bar{C}_p] = [0 // 0]$$

¹³ Remarque : la relation d'équivalence peut s'écrire: $\bar{D} - \bar{C} = \bar{D}' - \bar{C}'$, la structure quotient a donc bien un sens de groupe des différences.

L'ensemble de ces transactions $[\overline{T}_j // \overline{T}_j]$ forme le journal, qui peut être représenté par le

$$\begin{array}{r} [\overline{T}_1 // \overline{T}_1] \\ \text{0-terme } [\overline{D} // \overline{C}] \text{ obtenu en sommant les transactions : } + \dots\dots\dots \\ + [\overline{T}_k // \overline{T}_k] \\ \hline = [\overline{D} // \overline{C}] \end{array}$$

La nouvelle équation de bilan est alors obtenue comme :

$$\begin{array}{r} [\overline{D}_1 + \dots + \overline{D}_n // \overline{C}_1 + \dots + \overline{C}_p] \\ + [\overline{D} // \overline{C}] \\ \hline [\overline{D}_1 + \dots + \overline{D}_n + \overline{D} // \overline{C}_1 + \dots + \overline{C}_p + \overline{C}] \end{array}$$

Le mécanisme dont le principe est décrit ci-dessus permet d'étendre la comptabilité en partie double au traitement de nombres flous, en sauvegardant l'essentiel du formalisme classique, à condition de respecter les règles de traitement suivantes : les opérations doivent être faites de manière littérale, les calculs numériques ne devant être effectués que sur les expressions simplifiées, c'est-à-dire lorsqu'un référent donné y apparaît au plus *une* fois. En effet, seul le calcul littéral permet l'élimination des référents identiques au débit et au crédit, et ainsi la conservation de la précision théorique maximale¹⁴.

Discussion et conclusion

Afin de poser les principes de construction d'états financiers *fuzzifiés* (bilan et compte de résultat), nous avons proposé d'étendre la comptabilité en partie double, en tant que processus de saisie, de traitement et d'agrégation, aux transactions représentées par des nombres flous. L'approche directe, qui consiste à étendre aux nombres flous la structure de Groupe de Pacioli sous-jacente, nous est immédiatement apparue comme illégitime. Après réexamen de la sémantique propre au contexte comptable de mesure du patrimoine et du résultat, nous avons proposé un opérateur sur des réels flous positifs liés par des contraintes informationnelles fortes, comme celles découlant de l'application du principe de partie double au traitement de données. Cette approche permet de définir, au plan

¹⁴ Les T-termes (caractérisant dans la nouvelle équation incorporant les transactions les comptes d'actif de dettes et de situation nette) sont liés par des référents identiques s'y retrouvant. On ne peut donc pas, contrairement à ce que l'on ferait dans le cas vulgaire, utiliser les valeurs floues ci-dessus pour donner de chacun de ces termes une forme réduite du type $[\overline{D} / 0]$ (pour le compte d'actifs) ou $[0 / \overline{C}]$ (pour les autres) permettant de construire la nouvelle équation comptable (*actif = dettes + situation nette*). Une personne qui ignorerait la genèse de ces montants ne se situe pas dans le même contexte informationnel. Il lui manquerait l'information de dépendance entre ces agrégats. Calculant à partir des seules valeurs floues des actifs et des dettes, elle n'obtiendrait donc pas la même situation nette.

symbolique, un opérateur de simplification destiné à pallier les inconvénients de la soustraction floue.

Dans ces conditions, il est théoriquement possible d'étendre la comptabilité en partie double au traitement de nombres flous, tout en sauvegardant l'essentiel du formalisme classique. Une telle approche n'en est pas pour autant satisfaisante. En effet, afin de limiter l'accroissement mécanique de l'imprécision résultant de la redondance des informations, et en particulier pour préserver la signification des valeurs agrégées, nous avons introduit un référencement des transactions. Celui-ci permet de définir, au plan symbolique, un opérateur de simplification destiné à pallier les inconvénients de la soustraction floue. Cependant, face à un nombre important de transactions, une telle démarche est très peu opérationnelle. Dès lors, les futures recherches devraient s'attacher à explorer des solutions calculatoires visant à atteindre le même objectif.

Enfin, il convient de remarquer que le problème rencontré se pose dès lors que nous cherchons à *fuzzifier* le processus de traitement du modèle comptable classique. A l'inverse, la *fuzzification ex post* [Gutierrez, Carmona, 1988], (H. Rhys, 1990), [Kaufmann, Gil Aluja, 1986] n'engendre pas autant de difficultés ; mais elle ne se situe pas dans le même contexte informationnel. Nos conclusions ne remettent cependant pas en cause les possibilités d'utiliser le calcul sur des nombres flous pour traiter l'imprécision et/ou l'incertitude affectant l'information financière et comptable, mais soulignent les difficultés de mise en œuvre.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- CAMPBELL N.R., *Foundation of Science : The Philosophy of Theory and Experiment*, Dover Publications, New-York, 1957, initialement publié en 1920 sous le titre : "Physics : the Elements", Cambridge University Press.
- CAMPBELL N.R., *Account of the Principles of Measurement and Policies*, Longmans, Londres, 1928.
- CAMPBELL N.R., *What is Science ?*, Dover Publications Inc., New-York, 1953.
- CASTA J.F., "Le nombre et son ombre : mesure, imprécision et incertitude en comptabilité", XIV^{ème} Congrès de l'Association Française de comptabilité, Vol. II, (1993), p. 149-169.
- CASTA J.F., BRY X.: "Peut-on étendre la partie double aux nombres flous ?", in *Actes du Congrès de la Société Internationale de Gestion et Économie Fuzzy (SIGEF)*, 1994, Vol. II.
- DUBOIS D., PRADE H., "Addition of interactive fuzzy numbers", *IEEE Transactions on Automatic control*, Vol. AC-26, n°4, 1981, p. 926-936.
- DUBOIS D., PRADE H., *Théorie des possibilités : applications à la représentation des connaissances informatiques*, Paris, Masson, 2^{ème} éd., 1987.
- ELLERMAN D.P., "Double entry multidimensional accounting", *Omega, International Journal of Management Science*, (1986), Vol. 14, n°1, p. 13-22.
- GUTIERREZ I., CARMONA S. : 1988, *A Fuzzy Set Approach to Financial Ratio Analysis*, *European Journal of Operational Research*, Vol. 36, n°1, p.78-84.
- IJIRI Y., "Axioms and Structures of Conventional Accounting Measurement", *The Accounting Review*, (January 1965), p. 36-53.
- IJIRI Y., *The foundations of accounting measurement : a mathematical, economic and behavioral inquiry*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.

- JIIRI Y., "The theory of accounting measurement", Studies in Accounting Research, n°10, American Accounting Association, 1975.
- KAUFMANN A., GIL ALUJA J., Introduccion de la teoria de los subconjuntos borrosos a la gestion de las empresas, Ed. Milladoiro, 1986.
- MATTESSICH R., "Toward a General and Axiomatic Foundation of Accounting with an Introduction to the Matrix Formulation of Accounting Systems", Accounting Research, Vol. 8, n°4, (October 1957), p. 328-355.
- MATTESSICH R., Accounting and analytical methods, Richard D. Irwin, Inc., 1964.
- MOONITZ M., "The basic postulates of accounting", Accounting Research Study n°1, AICPA, 1961.
- RHYS H., "Fuzzy Financial Statements", W.P., Congress of British Accounting Association, University of Salford, Mars 1991.
- STERLING R.R., Theory of the Measurement of Enterprise Income, The University Press of Kansas, 1970.
- STEVENS S.S., "Mathematical Measurement and Psychophysics", in Handbook of Experimental Psychology, Stevens Ed., John Wiley and Sons, New-York, 1951, p. 1-49.
- STEVENS S.S., "Measurement, Psychophysics and Utility", in Measurement : Definitions and Theories, C.W. Churman and P. Ratoosh Ed., John Wiley and Sons, New-York, 1959, p. 18-63.
- ZADEH L.A., "Fuzzy sets", Information and Control (1965), Vol. 8, p. 338-353.
- ZEBDA A., "Fuzzy Sets Theory and Accounting", Journal of Accounting Literature, Vol. 8, (1989), p. 76-105.
- ZIMMERMAN H-J, Fuzzy Set Theory and its Applications, Kluwer Academic Publishers, 2ème éd., 1991.