



**HAL**  
open science

# Répartition des spectres logarithmiques de l'énergie à l'équilibre

Huayi Chen, Catriona Maclean

► **To cite this version:**

Huayi Chen, Catriona Maclean. Répartition des spectres logarithmiques de l'énergie à l'équilibre. 2013. hal-00816341v1

**HAL Id: hal-00816341**

**<https://hal.science/hal-00816341v1>**

Preprint submitted on 21 Apr 2013 (v1), last revised 14 Oct 2013 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# RÉPARTITION DES SPECTRES LOGARITHMIQUES DE L'ÉNERGIE À L'ÉQUILIBRE

Huayi Chen & Catriona MacLean

---

**Résumé.** — Soit  $L$  un faisceau inversible gros sur une variété projective complexe, muni de deux métriques continues. On démontre que la répartition des valeurs propres de transition entre les normes  $L^2$  sur  $H^0(X, nL)$  par rapport à ces deux métriques converge en loi vers une mesure de probabilité borélienne sur  $\mathbb{R}$  lors que  $n$  tend vers l'infini. Cela peut être considéré comme une généralisation de l'existence de l'énergie à l'équilibre comme une limite, ou une extension des résultats de Berndtsson à des cas plus généraux de systèmes linéaires gradués. Notre approche permet aussi d'établir l'analogie  $p$ -adique de ce résultat.

**Abstract.** — Let  $L$  be a big invertible sheaf on a complex projective variety, equipped with two continuous metrics. We prove that the distribution of the eigenvalues of the transition matrix between the  $L^2$  norms on  $H^0(X, nL)$  with respect to the two metrics converges as  $n$  goes to infinity to a Borel probability measure on  $\mathbb{R}$ . This result can be thought of as a generalization of the existence of the energy at the equilibrium as a limit, or an extension of Berndtsson's results to a more general context of graded linear series. Our approach also permits to obtain a  $p$ -adic analogue of the result.

## Table des matières

1. Introduction.....	1
2. Pentés d'un espace vectoriel muni de deux normes.....	5
3. Analogie non-archimédienne.....	12
4. Énergie à l'équilibre.....	18
5. Répartition asymptotique des spectres logarithmiques.....	25
Références.....	28

## 1. Introduction

Soient  $X$  une variété projective complexe (ou, plus loin, définie sur un corps non-archimédien complet) et  $L$  un fibré inversible sur  $X$ . On suppose que  $L$  est *gros*,

c'est-à-dire que le *volume* de  $L$ , défini comme

$$\text{vol}(L) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{rg}_{\mathbb{C}} H^0(X, nL)}{n^d/d!},$$

est strictement positif, où  $d$  est la dimension de  $X$ . Dans [2], Berman et Boucksom ont étudié la fonctionnelle d'énergie de Monge-Ampère. Étant données deux métriques continues  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $L$ , l'énergie de Monge-Ampère à l'équilibre du couple  $(\varphi, \psi)$  est définie comme

$$\mathcal{E}_{\text{eq}}(\varphi, \psi) := \frac{1}{d+1} \sum_{j=0}^d \int_{X(\mathbb{C})} (P\varphi - P\psi) c_1(L, P\psi)^j c_1(L, P\varphi)^{d-j},$$

où pour toute métrique continue  $\phi$  sur  $L$ ,  $P\phi$  désigne la borne supérieure des métriques (singulière) continues pluri-sous-harmoniques majorées par  $\phi$ . Cet invariant décrit le comportement asymptotique des rapports entre les boules unité dans les systèmes linéaires  $H^0(X, nL)$  ( $n \geq 1$ ) par rapport aux normes  $L^2$  induites par les métriques  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement. Plus précisément, pour toute mesure de probabilité  $\mu$  sur  $X(\mathbb{C})$  qui est équivalente à la mesure de Lebesgue dans chaque carte locale, on a (cf. [2, Théorème A])

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d!}{n^{d+1}} \ln \frac{\text{vol}(\mathcal{B}^2(nL, \varphi, \mu))}{\text{vol}(\mathcal{B}^2(nL, \psi, \mu))} = \mathcal{E}_{\text{eq}}(\varphi, \psi),$$

où pour toute métrique continue  $\phi$  sur  $L$ , l'expression  $\mathcal{B}^2(nL, \phi, \mu)$  désigne la boule unité dans  $H^0(X, nL)$  par rapport à la norme  $L^2$  comme la suite

$$\forall s \in H^0(X, nL), \quad \|s\|_{L^2_{\phi, \mu}}^2 := \int_{X(\mathbb{C})} \|s\|_{n\phi}^2(x) \mu(dx),$$

et les volumes sont calculés par rapport à une mesure de Haar quelconque sur  $H^0(X, nL)$ .

Le logarithme apparaissant dans le membre de gauche de l'équation (1) est égal (à multiplication par une constante près) à la moyenne des logarithmes des valeurs propres de la matrice de transition entre  $\varphi_n$  et  $\psi_n$ . Ici,  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  sont les normes  $L^2$  induites par  $\varphi$  et  $\psi$  sur l'espace  $H^0(X, nL)$  respectivement. Dans [3], Berndtsson étudie la distribution des valeurs propres de cette matrice de transition dans le cas où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des métriques kähleriennes sur un fibré en droites ample  $L$ . Par l'étude des géodésiques dans l'espace des métriques kähleriennes sur  $L$ , il parvient à établir le fait suivant : si  $d_n = \dim V_n$  et les nombres  $\lambda_j$  sont les logarithmes des valeurs propres de la matrice de transition entre  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  alors la mesure de probabilité

$$\nu_n = d_n^{-1} \sum_j \delta_{\lambda_j}$$

converge vers une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  quand  $n$  tend vers l'infini, qui est définie en termes de la géodésique de Monge-Ampère reliant  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $\mathcal{H}_L$ , l'espace des métriques hermitiennes sur  $L$ .

Le logarithme du rapport entre les volumes figurant dans (1) peut être comparé à la fonction de degré en géométrie d'Arakelov. Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps de nombres  $K$ , muni d'une famille de normes  $\|\cdot\|_v$ , où  $v$  parcourt l'ensemble  $M_K$  des

places de  $K$ , et  $\|\cdot\|_v$  est une norme sur  $E \otimes_K K_v$ , qui est ultramétrique lorsque  $v$  est une place finie, et euclidienne ou hermitienne lorsque  $v$  est réelle ou complexe. On suppose aussi qu'il existe un réseau (i.e. un sous- $\mathcal{O}_K$ -module de rang maximal,  $\mathcal{O}_K$  étant l'anneau des entiers algébriques dans  $K$ )  $\mathcal{E}$  dans  $E$  tel que, pour toute sauf un nombre fini de places  $v$ , la norme  $\|\cdot\|_v$  provient de la structure de  $\mathcal{O}_K$ -module de  $\mathcal{E}$ . La donnée  $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v))$  est appelée un *fibré adélique hermitien* sur  $K$ , et son *degré d'Arakelov* est défini comme une somme pondérée

$$(2) \quad \widehat{\deg}(\overline{E}) := - \sum_{v \in M_K} n_v \ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_v,$$

où  $(s_1, \dots, s_r)$  est une base de  $E$  sur  $K$ , et le poids  $n_v$  est le rang de  $K_v$  comme espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}_v$ . Cette notion est bien définie grâce à la formule de produit

$$\forall a \in K^\times, \quad \sum_{v \in M_K} n_v \ln |a|_v = 0.$$

On renvoie les lecteurs dans [4, Appendice A] et [12] pour des présentations détaillées de cette théorie. Dans le cadre de la géométrie complexe, on considère un espace vectoriel de rang fini  $V$  muni de deux normes hermitiennes  $\varphi$  et  $\psi$ . Il s'avère que le logarithme du rapport entre les volumes des boules unité (par rapport à  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement) s'écrit sous la forme

$$(3) \quad \ln \frac{\text{vol}(\mathcal{B}(V, \varphi))}{\text{vol}(\mathcal{B}(V, \psi))} = \widehat{\deg}(V, \varphi, \psi) := - \ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_\varphi + \ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_\psi,$$

où  $(s_1, \dots, s_r)$  est une base de  $V$ . L'indépendance du choix de base provient de la formule de produit naïve

$$\forall a \in \mathbb{C}^\times, \quad \ln |a| - \ln |a| = 0.$$

Avec cette notation, la formule (1) peut être reformulée sous la forme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\widehat{\deg}(H^0(X, nL), L_{\varphi, \mu}^2, L_{\psi, \mu}^2)}{n^{d+1}/d!} = \mathcal{E}_{\text{eq}}(\varphi, \psi).$$

Cela ressemble beaucoup au théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les fibrés inversibles hermitiens sur une variété arithmétique projective.

Au vue de [3] et les résultats de convergence établis dans [9], il est naturel de se demander si la répartition des valeurs propres de la métrique  $L_{\varphi, \mu}^2$  par rapport à  $L_{\psi, \mu}^2$  admet des bonnes propriétés asymptotiques dans des situations plus générales. Contrairement au cas arithmétique, il semble être impossible de reformuler ces spectres de façon fonctorielle, qui est un point essentiel de la démonstration des résultats de convergence dans [9]. Ce phénomène peut être expliqué par l'occurrence d'un poids négatif dans la formule (3), qui n'est pas le cas dans le cadre arithmétique. On renvoie les lecteurs dans [10] remarque 5.10 et §4 exemple 2 pour des contre-exemples qui expliquent ce phénomène.

La contribution majeure de l'article consiste à introduire la méthode de troncature pour étudier le comportement asymptotique des valeurs propres de transition entre deux métriques. On considère les troncatures de la métrique  $\psi$  par les dilatations de la métrique  $\varphi$ . Cela nous permet d'établir le résultat suivant (cf. théorème 5.2 *infra*) :

**Théorème principal.** — Soient  $k$  le corps des nombres complexes ou un corps complet non-archimédien,  $X$  une variété projective sur  $k$  de dimension  $d \geq 1$ , et  $L$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible gros, muni de deux métriques continues  $\varphi$  et  $\psi$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , soient  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  les normes sup sur  $H^0(X, nL)$  par rapport aux métriques  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement. Soient en outre  $\varphi'_n$  et  $\psi'_n$  des normes hermitiennes sur  $H^0(X, nL)$  tels que  $(1) \max(d(\varphi_n, \varphi'_n), d(\psi_n, \psi'_n)) = o(n)$ . On désigne par  $Z_n$  l'application de  $\{1, \dots, h^0(X, nL)\}$  vers  $\mathbb{R}$  qui envoie  $i$  en le logarithme de la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre (où on compte la multiplicité) de  $\psi'_n$  par rapport à  $\varphi'_n$ , vue comme une variable aléatoire définie sur l'espace  $\{1, \dots, h^0(X, nL)\}$  muni de la mesure de probabilité équirépartie. Alors la suite de variables aléatoires  $(Z_n/n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une mesure de probabilité borélienne sur  $\mathbb{R}$ , qui ne dépend que du couple  $(\varphi, \psi)$ .

Rappelons que la convergence en loi signifie que, pour toute fonction  $h$  continue et bornée, définie sur  $\mathbb{R}$ , la suite  $(\mathbb{E}[h(Z_n/n)])_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{R}$ .

Le théorème 5.2 démontré dans §5 est en fait un peu plus fort que l'énoncé ci-dessus. Il est valable pour n'importe quel système gradué de sous-espaces  $V_n \subset H^0(X, nL)$  qui satisfait aux conditions (a)-(c) de la section §4.3. Par ailleurs, il s'applique aussi aux fonctions  $\hat{\mu}_i$  définies dans §2.3, associées à des couples de normes qui peuvent être non-hermitiennes, et égales, lorsque les normes sont hermitiennes, aux logarithmes des valeurs propres de la matrice de transition (cf. §2.2).

La distribution asymptotique est un invariant géométrique très fin qui mesure le défaut de proportionnalité entre les métriques  $\varphi$  et  $\psi$ . Il devrait être utile dans l'étude variationnelle des métriques sur un faisceau inversible.

La démonstration du théorème principal combine diverses techniques de géométrie algébrique et géométrie arithmétique, qui occupent le contenu du reste de l'article. Dans §§2-3, on introduit une théorie de type Harder-Narasimhan pour un espace vectoriel de rang fini muni de deux normes. Cela peut être considéré comme une reformulation géométrique des valeurs propres de transition entre deux normes. A part de la ressemblance de cette construction avec la filtration et le polygone de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel sur une courbe projective lisse, un grand avantage de cette reformulation est que la construction est valable dans le cas non-hermitien, qui nous permet de travailler directement avec des normes sup. En particulier, les résultats de troncature (propositions 2.8 et 3.8) sont des techniques cruciales pour la démonstration du théorème principal. Un autre ingrédient important est l'existence de l'énergie à l'équilibre comme une limite, qui est présentée dans §4. Dans le cas du système linéaire gradué total, c'est un résultat de Berman-Boucksom [2] (où la limite est explicitée). Ici on adopte l'approche de filtration de semi-groupes d'Okounkov développée dans [6], qui est analogue à celle de Witt Nyström [16]. La combinaison de cette méthode avec le formalisme de Harder-Narasimhan a une grande souplesse qui nous permet d'obtenir l'existence de l'énergie à l'équilibre dans un cadre très général de système linéaire gradué dans les cas complexe et non-archimédien (cf. le

---

1. Si  $\eta$  et  $\eta'$  sont deux normes sur un espace vectoriel  $V$  de rang fini sur  $\mathbb{C}$ ,  $d(\eta, \eta')$  est défini comme  $\sup_{0 \neq s \in V} |\ln \|s\|_\eta - \ln \|s\|_{\eta'}|$ . C'est une distance sur l'ensemble des normes sur  $V$ .

théorème 4.5 et son corollaire 4.6). Enfin on démontre dans §5 une version générale du théorème principal (cf. le théorème 5.2 et la remarque 5.3).

## 2. Pentas d'un espace vectoriel muni de deux normes

Dans ce paragraphe, on développe un formalisme de pentas et filtration de Harder-Narasimhan pour les espaces vectoriels de rang fini sur  $\mathbb{C}$  munis de deux normes.

**2.1. Pentas et filtration de Harder-Narasimhan.** — On désigne par  $\mathcal{C}^H$  la classe des triplets  $\overline{V} = (V, \varphi, \psi)$ , où  $V$  est un espace vectoriel de rang fini sur  $\mathbb{C}$  et  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux normes hermitiennes sur  $V$ . Pour tout  $\overline{V} = (V, \varphi, \psi) \in \mathcal{C}^H$ , on désigne par  $\widehat{\deg}(\overline{V})$  le nombre réel

$$(4) \quad -\ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_\varphi + \ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_\psi,$$

où  $(s_1, \dots, s_r)$  est une base de  $V$ . Si l'espace vectoriel  $V$  est non-nul, on désigne par  $\widehat{\mu}(\overline{V})$  le quotient  $\widehat{\deg}(\overline{V})/\text{rg}(V)$ , appelé la *penle* de  $\overline{V}$ . Si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ , sauf mention au contraire, on désigne par  $\overline{W}$  l'espace vectoriel  $W$  muni des normes induites, et par  $\overline{V}/\overline{W}$  l'espace quotient  $V/W$  muni des normes quotient. La relation suivante est vérifiée pour tout sous-espace vectoriel  $W$  de  $V$  :

$$(5) \quad \widehat{\deg}(\overline{V}) = \widehat{\deg}(\overline{W}) + \widehat{\deg}(\overline{V}/\overline{W}).$$

**Proposition 2.1.** — *Soit  $\overline{V} = (V, \varphi, \psi)$  un élément non-nul de  $\mathcal{C}^H$ . Il existe un unique sous-espace vectoriel  $V_{\text{des}}$  de  $V$  qui vérifie les conditions suivantes :*

- (1) *pour tout sous-espace vectoriel  $W$  de  $V$ , on a  $\widehat{\mu}(\overline{W}) \leq \widehat{\mu}(\overline{V}_{\text{des}})$ ,*
- (2) *si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  tel que  $\widehat{\mu}(\overline{W}) = \widehat{\mu}(\overline{V}_{\text{des}})$ , alors on a  $W \subset V_{\text{des}}$ .*

*Démonstration.* — On désigne par  $\lambda$  la norme de l'application d'identité de  $(V, \|\cdot\|_\varphi)$  vers  $(V, \|\cdot\|_\psi)$ . Montrons que l'ensemble

$$V_{\text{des}} = \{x \in V : \|x\|_\psi = \lambda \|x\|_\varphi\}$$

vérifie les conditions figurant dans l'énoncé de la proposition. On commence par vérifier que  $V_{\text{des}}$  est un sous-espace vectoriel non-nul de  $V$ . Par définition, l'ensemble  $V_{\text{des}}$  contient au moins un vecteur non-nul et est stable par multiplication par un scalaire complexe. Il reste donc à vérifier que  $V_{\text{des}}$  est stable par l'addition. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $V_{\text{des}}$ . Comme les normes  $\varphi$  et  $\psi$  sont hermitiennes, l'égalité du parallélogramme montre que

$$\begin{aligned} \|x+y\|_\varphi + \|x-y\|_\varphi &= 2(\|x\|_\varphi + \|y\|_\varphi), \\ \|x+y\|_\psi + \|x-y\|_\psi &= 2(\|x\|_\psi + \|y\|_\psi). \end{aligned}$$

En outre, comme  $\lambda$  est la norme de l'application d'identité de  $(V, \|\cdot\|_\varphi)$  vers  $(V, \|\cdot\|_\psi)$ , on a  $\|x+y\|_\psi \leq \lambda \|x+y\|_\varphi$  et  $\|x-y\|_\psi \leq \lambda \|x-y\|_\varphi$ . Comme  $x$  et  $y$  sont des vecteurs dans  $V_{\text{des}}$ , on a  $\|x\|_\psi = \lambda \|x\|_\varphi$  et  $\|y\|_\psi = \lambda \|y\|_\varphi$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} 2\lambda(\|x\|_\varphi + \|y\|_\varphi) &= 2(\|x\|_\psi + \|y\|_\psi) = \|x+y\|_\psi + \|x-y\|_\psi \\ &\leq \lambda(\|x+y\|_\varphi + \|x-y\|_\varphi) = 2\lambda(\|x\|_\varphi + \|y\|_\varphi), \end{aligned}$$

d'où  $\|x + y\|_\psi = \lambda\|x + y\|_\varphi$  et on a alors  $x + y \in V_{\text{des}}$ .

Comme les normes  $\|\cdot\|_\psi$  et  $\|\cdot\|_\varphi$  sont proportionnelles sur  $V_{\text{des}}$  dont le rapport est  $\lambda$ , on obtient  $\widehat{\mu}(\overline{V}_{\text{des}}) = \ln(\lambda)$ . Si  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ , l'application d'identité de  $(\Lambda^r W, \|\cdot\|_\psi)$  vers  $(\Lambda^r W, \|\cdot\|_\varphi)$  a pour norme  $\leq \lambda^r$  (inégalité d'Hadamard). L'égalité est atteinte si et seulement si les normes  $\|\cdot\|_\psi$  et  $\|\cdot\|_\varphi$  sont proportionnelles de rapport  $\lambda$ . Autrement dit, l'espace  $W$  est contenu dans  $V_{\text{des}}$ .  $\square$

Soit  $\overline{V}$  un élément non-nul de  $\mathcal{C}^H$ . On désigne par  $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{V})$  la pente de  $\overline{V}_{\text{des}}$ , appelée la *pente maximale* de  $\overline{V}$ . On dit que  $\overline{V}$  est *semi-stable* si  $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{V}) = \widehat{\mu}(\overline{V})$ , ou de façon équivalente,  $V_{\text{des}} = V$ . La semi-stabilité de  $\overline{V}$  est aussi équivalente à la condition que les deux normes de  $\overline{V}$  sont proportionnelles.

Étant donné  $\overline{V}$  un élément non-nul de  $\mathcal{C}^H$ , on peut construire par récurrence un drapeau de sous-espaces vectoriels de  $V$  de la forme

$$(6) \quad 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$$

tel que  $V_i/V_{i-1} = (V/V_{i-1})_{\text{des}}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , où on a considéré des normes quotient sur  $V/V_{i-1}$ . Chaque sous-quotient  $\overline{V}_i/\overline{V}_{i-1}$  est un élément semi-stable dans  $\mathcal{C}^H$ . En outre, si on désigne par  $\mu_i$  la pente de  $\overline{V}_i/\overline{V}_{i-1}$ , les inégalités suivantes sont vérifiées pour ces pentes :

$$(7) \quad \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n.$$

Ces nombres sont appelés les *pentessuccessives* de  $\overline{V}$ . Le drapeau (6) est appelé la *filtration de Harder-Narasimhan* de  $\overline{V}$ .

**Définition 2.2.** — Soit  $\overline{V}$  un élément non-nul dans  $\mathcal{C}^H$  dont la filtration de Harder-Narasimhan et les pentessuccessives sont comme dans (6) et (7) respectivement. On désigne par  $Z_{\overline{V}}$  une variable aléatoire à valeur dans  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  telle que

$$\mathbb{P}(Z_{\overline{V}} = \mu_i) = \frac{\text{rg}(V_i/V_{i-1})}{\text{rg}(V)}$$

quel que soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Remarque 2.3.** — Les constructions présentées au-dessus sont analogues à la théorie de Harder-Narasimhan pour les fibrés vectoriels sur une courbe projective régulière ou pour les fibrés adéliques hermitiens sur un corps de nombres. Similairement à [9, §2.2.2], on peut incorporer la filtration de Harder-Narasimhan et les pentessuccessives dans une  $\mathbb{R}$ -filtration décroissante. Cependant, contrairement au cas géométrique ou arithmétique, cette construction de  $\mathbb{R}$ -filtration n'est pas fonctorielle, comme expliqué dans [10, remarque 5.10]. En outre, la filtration de Harder-Narasimhan n'est pas nécessairement l'unique filtration dont les sous-quotients sont semi-stables et de pentessuccessives strictement décroissantes, comme montré par un contre-exemple dans [10, §4 exemple 2].

Soit  $\overline{V}$  un élément de  $\mathcal{C}^H$  qui est de rang  $r > 0$ . On désigne par  $\widetilde{P}_{\overline{V}}$  la fonction sur  $[0, r]$  dont le graphe est la borne supérieure de l'enveloppe convexe des points de la forme  $(\text{rg}(W), \widehat{\deg}(\overline{W}))$ . C'est une fonction concave qui est affine sur chaque intervalle  $[i-1, i]$  ( $i \in \{1, \dots, r\}$ ). On l'appelle le *polygone* de Harder-Narasimhan de  $\overline{V}$ . Par

définition, on a  $\tilde{P}_{\overline{V}}(0) = 0$  et  $\tilde{P}_{\overline{V}}(r) = \widehat{\deg}(V)$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on désigne par  $\widehat{\mu}_i(\overline{V})$  la pente sur l'intervalle  $[i-1, i]$  de la fonction  $\tilde{P}_{\overline{V}}$ , appelé la  $i^{\text{ème}}$  pente de  $\overline{V}$ . On introduit aussi une version normalisée du polygone de Harder-Narasimhan, définie comme

$$P_{\overline{V}}(t) := \frac{1}{\text{rg}(V)} \tilde{P}_{\overline{V}}(t \text{rg}(V)), \quad t \in [0, 1].$$

La relation (5) montre que l'on a

$$(8) \quad \widehat{\deg}(\overline{V}) = \widehat{\mu}_1(\overline{V}) + \dots + \widehat{\mu}_r(\overline{V}).$$

En outre, la loi de la variable aléatoire  $Z_{\overline{V}}$  (cf. définition 2.2) s'identifie à

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \delta_{\widehat{\mu}_i(\overline{V})},$$

où  $\delta_a$  désigne la mesure de Dirac concentrée en  $a$ .

Le polygone normalisé  $P_{\overline{V}}$ , la variable aléatoire  $Z_{\overline{V}}$  et la pente sont reliés par une formule très simple

$$(9) \quad P_{\overline{V}}(1) = \mathbb{E}[Z_{\overline{V}}] = \widehat{\mu}(\overline{V}).$$

**2.2. Relation avec les valeurs propres.** — La filtration de Harder-Narasimhan et les pentes successives peuvent être considérées comme une interprétation intrinsèque des sous-espaces propres et valeurs propres de la matrice de transition entre deux normes hermitiennes. En effet, étant donné un élément  $\overline{V} = (V, \varphi, \psi)$  de  $\mathcal{C}^H$ , quitte à choisir une base orthonormée  $e = (e_i)_{i=1}^r$  de  $V$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_{\varphi}$ , on peut construire une matrice hermitienne

$$A_{\overline{V}, e} = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle_{\psi} & \langle e_1, e_2 \rangle_{\psi} & \cdots & \langle e_1, e_r \rangle_{\psi} \\ \langle e_2, e_1 \rangle_{\psi} & \langle e_2, e_2 \rangle_{\psi} & \cdots & \langle e_2, e_r \rangle_{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_r, e_1 \rangle_{\psi} & \langle e_r, e_2 \rangle_{\psi} & \cdots & \langle e_r, e_r \rangle_{\psi} \end{pmatrix}$$

Si  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n$  sont les pentes successives de  $\overline{V}$ , alors les valeurs propres de la matrice  $A_{\overline{V}, e}$  sont  $e^{2\mu_1}, \dots, e^{2\mu_n}$ . En outre, si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on désigne par  $V^{(i)}$  l'espace propre associé à la valeur propre  $e^{2\mu_i}$  de l'endomorphisme de  $V$  correspondant à la matrice  $A_{\overline{V}, e}$  relativement à la base  $e$ , alors le drapeau

$$0 \subsetneq V^{(1)} \subsetneq V^{(1)} + V^{(2)} \subsetneq \dots \subsetneq V^{(1)} + \dots + V^{(n)} = V$$

est la filtration de Harder-Narasimhan de  $\overline{V}$ .

Le fait que les normes  $\varphi$  et  $\psi$  sont proportionnelles sur chacun des sous-espaces propres  $V^{(i)}$  montre l'existence d'un drapeau complet (qui est en général plus fin que la filtration de Harder-Narasimhan de  $\overline{V}$ )

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_r = V$$

tel que  $\widehat{\deg}(\overline{V}_i / \overline{V}_{i-1}) = \widehat{\mu}_i(\overline{V})$ . En particulier, on a  $P_{\overline{V}}(i) = \widehat{\deg}(\overline{V}_i)$ . Cela peut aussi être interprété comme une version du théorème de Courant-Fischer pour les matrices symétriques ou hermitiennes.

**2.3. Généralisation aux normes quelconques.** — Les constructions que nous avons introduites plus haut se généralisent naturellement au cas d'un espace vectoriel muni de deux normes quelconques. On désigne par  $\mathcal{C}$  la classe des espaces vectoriels de rang fini sur  $\mathbb{C}$  munis de deux normes (non-nécessairement hermitiennes). Si  $\overline{V} = (V, \varphi, \psi)$  est un élément non-nul de  $\mathcal{C}$ , on définit  $\widehat{\deg}(\overline{V})$  comme le nombre

$$\ln \frac{\text{vol}(\mathcal{B}(V, \varphi))}{\text{vol}(\mathcal{B}(V, \psi))},$$

où  $\mathcal{B}(V, \varphi)$  et  $\mathcal{B}(V, \psi)$  sont des boules unité par rapport aux normes  $\varphi$  et  $\psi$  respectivement, et  $\text{vol}$  est une mesure de Haar sur  $V$ . Il s'avère que la définition ne dépend pas du choix de la mesure de Haar  $\text{vol}$ . En outre, dans le cas où les normes  $\varphi$  et  $\psi$  sont hermitiennes, ce nombre coïncide à la quantité définie dans la formule (4). Comme dans le cas hermitien, on désigne par  $\tilde{P}_{\overline{V}}$  la fonction concave sur  $[0, \text{rg}(V)]$  dont le graphe est la borne supérieure de l'enveloppe convexe des points de la forme  $(\text{rg}(W), \widehat{\deg}(W))$ , où  $W$  parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $V$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, \text{rg}(V)\}$ , on désigne par  $\hat{\mu}_i(\overline{V})$  la pente de la fonction  $\tilde{P}_{\overline{V}}$  sur l'intervalle  $[i-1, i]$ . L'égalité (8) est encore vraie dans ce cas général. On désigne par  $Z_{\overline{V}}$  une variable aléatoire dont la loi est la moyenne des mesures de Dirac en  $\hat{\mu}_i(\overline{V})$  :

$$\text{la loi de } Z_{\overline{V}} \text{ est } \frac{1}{\text{rg}(V)} \sum_{i=1}^{\text{rg}(V)} \delta_{\hat{\mu}_i(\overline{V})}.$$

On introduit aussi une version normalisée du polygone de Harder-Narasimhan comme

$$(10) \quad P_{\overline{V}}(t) = \frac{1}{\text{rg}(V)} \tilde{P}_{\overline{V}}(t \text{rg}(V)), \quad t \in [0, 1].$$

La relation (9) est encore satisfaite dans le cas général : on a

$$(11) \quad P_{\overline{V}}(1) = \mathbb{E}[Z_{\overline{V}}] = \hat{\mu}(\overline{V}).$$

Le résultat suivant est une comparaison entre les polygones de Harder-Narasimhan.

**Proposition 2.4.** — Soit  $(V, \varphi, \psi)$  un élément de  $\mathcal{C}$ . Si  $\psi'$  est une autre norme sur  $V$  telle que<sup>(2)</sup>  $\psi' \leq \psi$ , alors on a  $\tilde{P}_{(V, \varphi, \psi')} \leq \tilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}$  comme fonctions sur  $[0, \text{rg}(V)]$ .

*Démonstration.* — Pour tout sous-espace vectoriel  $W$  de  $V$ , on a  $\mathcal{B}(W, \psi) \subset \mathcal{B}(W, \psi')$ , d'où  $\widehat{\deg}(W, \varphi, \psi) \geq \widehat{\deg}(W, \varphi, \psi')$ . Par conséquent, le point  $(\text{rg}(W), \widehat{\deg}(W, \varphi, \psi'))$  est toujours situé au-dessus du graphe de la fonction  $\tilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}$ . On obtient donc  $\tilde{P}_{(V, \varphi, \psi')} \leq \tilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}$ .  $\square$

**Remarque 2.5.** — De façon similaire, on peut montrer que, si  $(V, \varphi, \psi)$  est un élément de  $\mathcal{C}$  et si  $\varphi'$  est une autre norme sur  $V$  telle que  $\varphi' \geq \varphi$ , alors on a  $\tilde{P}_{(V, \varphi', \psi)} \leq \tilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}$  comme fonctions sur  $[0, \text{rg}(V)]$ .

2. Autrement dit, pour tout  $x \in V$  on a  $\|x\|_{\psi'} \leq \|x\|_{\psi}$ .

Si  $V$  est un espace vectoriel de rang fini non-nul sur  $\mathbb{C}$  et si  $\psi$  et  $\psi'$  sont deux normes sur  $V$ , on désigne par  $d(\psi, \psi')$  la quantité

$$\sup_{0 \neq x \in V} |\ln \|x\|_{\psi} - \ln \|x\|_{\psi'}|.$$

**Corollaire 2.6.** — Soient  $(V, \varphi, \psi)$  un élément non-nul de  $\mathcal{C}$  et  $\varphi'$  et  $\psi'$  deux normes sur  $V$ . Pour tout  $t \in [0, \text{rg}(V)]$  on a

$$|\tilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}(t) - \tilde{P}_{(V, \varphi', \psi')}(t)| \leq (d(\varphi, \varphi') + d(\psi, \psi')) t.$$

*Démonstration.* — On désigne par  $\psi_1$  et  $\psi_2$  les normes sur  $V$  telles que

$$\|\cdot\|_{\psi_1} = e^{-d(\psi, \psi')} \|\cdot\|_{\psi} \text{ et } \|\cdot\|_{\psi_2} = e^{d(\psi, \psi')} \|\cdot\|_{\psi}.$$

On a  $\psi_1 \leq \psi' \leq \psi_2$ . En outre, pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\tilde{P}_{(V, \varphi, \psi_1)}(t) = \tilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}(t) - d(\psi, \psi') t, \quad \tilde{P}_{(V, \varphi, \psi_2)}(t) = \tilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}(t) + d(\psi, \psi') t.$$

D'après la proposition précédente, on obtient

$$|\tilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}(t) - \tilde{P}_{(V, \varphi, \psi')}(t)| \leq d(\psi, \psi') t.$$

Par le même argument on peut montrer que

$$|\tilde{P}_{(V, \varphi, \psi')}(t) - \tilde{P}_{(V, \varphi', \psi')}(t)| \leq d(\varphi, \varphi') t.$$

La somme de ces deux inégalités implique le résultat souhaité.  $\square$

**2.4. Normes de John et Löwner.** — Bien que les éléments de  $\mathcal{C}$  ne satisfont pas à l'égalité (5) en général, la technique des ellipsoïdes de John et Löwner permet de retrouver ce résultat à un terme d'erreur près. En effet, si  $V$  est un espace vectoriel de rang  $r > 0$  sur  $\mathbb{C}$  et si  $\phi$  est une norme sur  $V$ , alors il existe deux normes hermitiennes  $\phi_L$  et  $\phi_J$  qui vérifient les propriétés suivantes (cf. [15, page 84]) :

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \|\cdot\|_{\phi_J} \leq \|\cdot\|_{\phi} \leq \|\cdot\|_{\phi_J}, \quad \|\cdot\|_{\phi_L} \leq \|\cdot\|_{\phi} \leq \sqrt{r} \|\cdot\|_{\phi_L}$$

**Proposition 2.7.** — Soit  $\bar{V} = (V, \varphi, \psi)$  un élément de  $\mathcal{C}$ . Si

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V$$

est un drapeau en sous-espaces vectoriels de  $V$ , alors on a

$$(12) \quad \left| \widehat{\text{deg}}(V) - \sum_{i=1}^n \widehat{\text{deg}}(V_i/V_{i-1}) \right| \leq \text{rg}(V) \ln(\text{rg}(V)).$$

*Démonstration.* — Considérons l'objet  $(V, \varphi_L, \psi_J)$ . C'est un élément de  $\mathcal{C}^H$ . Donc l'égalité suivante est vérifiée (compte tenu de la formule (5))

$$\widehat{\text{deg}}(V, \varphi_L, \psi_J) = \sum_{i=1}^n \widehat{\text{deg}}(V_i/V_{i-1}, \varphi_L, \psi_J).$$

En outre, comme  $\varphi_L \leq \varphi$  et  $\psi_J \geq \psi$ , on a

$$\widehat{\text{deg}}(V_i/V_{i-1}, \varphi, \psi) \leq \widehat{\text{deg}}(V_i/V_{i-1}, \varphi_L, \psi_J).$$

On en déduit alors

$$(13) \quad \widehat{\deg}(V, \varphi_L, \psi_J) \geq \sum_{i=1}^n \widehat{\deg}(V_i/V_{i-1}, \varphi, \psi).$$

En outre, les relations  $\|\cdot\|_\varphi \leq \sqrt{\text{rg}(V)}\|\cdot\|_{\varphi_L}$  et  $\|\cdot\|_\psi \geq (\sqrt{\text{rg}(V)})^{-1}\|\cdot\|_{\psi_J}$  montre que

$$(14) \quad \widehat{\deg}(V, \varphi, \psi) \geq \widehat{\deg}(V, \varphi_L, \psi_J) - \text{rg}(V) \ln(\text{rg}(V)).$$

Les inégalités (13) et (14) montrent que

$$\widehat{\deg}(\overline{V}) \geq \sum_{i=1}^n \widehat{\deg}(\overline{V}_i/\overline{V}_{i-1}) - \text{rg}(V) \ln(\text{rg}(V)).$$

En utilisant le même argument à  $(V, \varphi_J, \psi_L)$ , on peut montrer que

$$\widehat{\deg}(\overline{V}) \leq \sum_{i=1}^n \widehat{\deg}(\overline{V}_i/\overline{V}_{i-1}) + \text{rg}(V) \ln(\text{rg}(V)).$$

Le résultat est donc démontré.  $\square$

**2.5. Troncature.** — Soit  $V$  un espace vectoriel de rang fini sur  $\mathbb{C}$ . Si  $\varphi$  est une norme sur  $V$  et si  $a$  est un nombre réel, on désigne par  $\varphi(a)$  la norme sur  $V$  telle que

$$\forall x \in V, \quad \|x\|_{\varphi(a)} = e^a \|x\|_\varphi.$$

Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux normes sur  $V$ , on désigne par  $\varphi \vee \psi$  la norme sur  $V$  telle que

$$\forall x \in V, \quad \|x\|_{\varphi \vee \psi} = \max(\|x\|_\varphi, \|x\|_\psi).$$

**Proposition 2.8.** — Soient  $\overline{V} = (V, \varphi, \psi)$  un élément non-nul de  $\mathcal{C}$  et  $a$  un nombre réel. On a

$$\left| \widehat{\deg}(V, \varphi, \psi \vee \varphi(a)) - \sum_{i=1}^{\text{rg}(V)} \max(\widehat{\mu}_i(\overline{V}), a) \right| \leq 2 \text{rg}(V) \ln(\text{rg}(V)) + \frac{\text{rg}(V)}{2} \ln(2).$$

*Démonstration.* — Soit  $r$  le rang de  $V$ . Montrons d'abord la relation suivante :

$$(15) \quad \sum_{i=1}^r \max(\widehat{\mu}_i(\overline{V}), a) = \sup_{t \in [0, r]} \left( \widetilde{P}_{\overline{V}}(t) - at \right) + ar.$$

En effet, comme la fonction  $\widetilde{P}_{\overline{V}}(t) - at$  est affine sur chacun des intervalles  $[i-1, i]$  ( $i \in \{1, \dots, r\}$ ), on obtient

$$\sup_{t \in [0, r]} \left( \widetilde{P}_{\overline{V}}(t) - at \right) = \max_{i \in \{0, \dots, r\}} \left( \sum_{1 \leq j \leq i} (\widehat{\mu}_j(\overline{V}) - a) \right) = \sum_{i=1}^r \max(\widehat{\mu}_i(\overline{V}) - a, 0).$$

Par conséquent, on a

$$\sup_{t \in [0, r]} \left( \widetilde{P}_{\overline{V}}(t) - at \right) + ar = \sum_{i=1}^r \left( \max(\widehat{\mu}_i(\overline{V}) - a, 0) + a \right) = \sum_{i=1}^r \max(\widehat{\mu}_i(\overline{V}), a).$$

Montrons la proposition dans le cas particulier où les normes  $\varphi$  et  $\psi$  sont hermitiennes. Il existe alors une base  $e = (e_i)_{i=1}^r$  qui est orthonormée par rapport à la

norme hermitienne  $\varphi$  et orthogonale par rapport à  $\psi$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\lambda_i = \|e_i\|_\psi$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r$ . Ainsi on a  $\widehat{\mu}_i(\overline{V}) = \ln(\lambda_i)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Soit  $\psi'$  la norme hermitienne sur  $V$  telle que

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_r e_r\|_{\psi'}^2 = \sum_{i=1}^r x_i^2 \max(\lambda_i^2, e^{2a}).$$

En outre, on a

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_r e_r\|_{\psi \vee \varphi(a)}^2 = \max\left(\sum_{i=1}^r x_i^2 \lambda_i^2, \sum_{i=1}^r x_i^2 e^{2a}\right).$$

Par conséquent, on a

$$\|\cdot\|_{\psi \vee \varphi(a)} \leq \|\cdot\|_{\psi'} \leq \sqrt{2} \|\cdot\|_{\psi \vee \varphi(a)}.$$

On en déduit

$$\widehat{\deg}(V, \varphi, \psi \vee \varphi(a)) \leq \widehat{\deg}(V, \varphi, \psi') \leq \frac{r}{2} \log(2) + \widehat{\deg}(V, \varphi, \psi \vee \varphi(a)),$$

d'où

$$\left| \widehat{\deg}(V, \varphi, \psi \vee \varphi(a)) - \sum_{i=1}^r \max(\widehat{\mu}_i(\overline{V}), a) \right| \leq \frac{r}{2} \log(2).$$

Traisons maintenant le cas général. On choisit des normes hermitiennes  $\varphi_1$  et  $\psi_1$  de sorte que  $d(\varphi, \varphi_1) \leq \frac{1}{2} \log(r)$  et  $d(\psi, \psi_1) \leq \frac{1}{2} \log(r)$ . Si on applique le résultat ayant obtenu à  $(V, \varphi_1, \psi_1)$ , on obtient

$$\left| \deg(V, \varphi_1, \psi_1 \vee \varphi_1(a)) - \sum_{i=1}^r \max(\widehat{\mu}_i(V, \varphi_1, \psi_1), a) \right| \leq \frac{r}{2} \log(2).$$

En outre, on a

$$d(\psi \vee \varphi(a), \psi_1 \vee \varphi_1(a)) \leq \max(d(\varphi, \varphi_1), d(\psi, \psi_1)).$$

Donc

$$|\deg(V, \varphi, \psi \vee \varphi(a)) - \deg(V, \varphi_1, \psi_1 \vee \varphi_1(a))| \leq d(\varphi, \varphi_1)r + \max(d(\varphi, \varphi_1), d(\psi, \psi_1))r,$$

qui est majoré par  $r \ln(r)$ . En outre, d'après la proposition 2.7, on obtient

$$|\widetilde{P}_{\overline{V}}(t) - \widetilde{P}_{(V, \varphi_1, \psi_1)}(t)| \leq (d(\varphi, \varphi_1) + d(\psi, \psi_1))t \leq t \ln(r) \leq r \ln(r),$$

d'où

$$\left| \sup_{t \in [0, r]} (\widetilde{P}_{\overline{V}}(t) - at) - \sup_{t \in [0, r]} (\widetilde{P}_{(V, \varphi_1, \psi_1)}(t) - at) \right| \leq r \ln(r).$$

D'après (15), on obtient

$$\left| \widehat{\deg}(V, \varphi, \psi \vee \varphi(a)) - \sum_{i=1}^r \max(\widehat{\mu}_i(\overline{V}), a) \right| \leq 2r \ln(r) + \frac{r}{2} \log(2).$$

□

### 3. Analogie non-archimédienne

Dans ce paragraphe, on développe l'analogie du formalisme de pentes pour un espace vectoriel de rang fini sur un corps non-archimédien muni de deux normes ultramétriques. On fixe un corps  $k$  muni d'une valeur absolue non-archimédienne  $|\cdot|$  qui est complet.

**3.1. Normes ultramétriques.** — Soit  $V$  un espace vectoriel de rang fini  $r$  sur  $k$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ . Comme le corps  $k$  est supposé être complet, la topologie de  $V$  coïncide avec la topologie produit induite par tout isomorphisme  $k^r \rightarrow V$ . On renvoie les lecteurs dans [7, I.§2, n°3] théorème 2 et la remarque figurant à la page I.15 pour une démonstration. En particulier, tout sous-espace vectoriel de  $V$  est fermé (cf. *loc. cit.* le corollaire 1 du théorème 2).

Soit  $(V, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel ultranormé de rang fini sur  $k$ . On dit qu'une base  $e = (e_i)_{i=1}^r$  de  $V$  est *orthogonale* si la relation suivante est vérifiée

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in k^r, \quad \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r\| = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|.$$

En général un espace vectoriel ultranormé ne possède pas nécessairement une base orthogonale. Cependant, la proposition suivante montre qu'une version asymptotique de l'algorithme de Gram-Schmidt est valable pour le cas non-archimédien.

**Proposition 3.1.** — *Soit  $(V, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel ultranormé de rang fini  $r \geq 1$  sur  $k$ . Soit*

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_r = V$$

*un drapeau complet de sous-espaces vectoriels de  $V$ . Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , il existe une base  $e = (e_i)_{i=1}^r$  compatible au drapeau<sup>(3)</sup> et telle que*

$$(16) \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in k^r, \quad \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r\| \geq (1 - \varepsilon) \max_{i \in \{1, \dots, r\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|.$$

*Démonstration.* — On raisonne par récurrence sur le rang  $r$  de l'espace vectoriel  $V$ . Le cas où  $r = 1$  est trivial. Supposons que la proposition a été démontrée pour les espaces vectoriels ultranormés de rang  $< r$ , où  $r \geq 2$ . On applique l'hypothèse de récurrence à  $V_{r-1}$  et au drapeau  $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{r-1}$  pour obtenir une base  $(e_1, \dots, e_{r-1})$  compatible au drapeau et telle que

$$(17) \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}) \in k^{r-1}, \quad \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\| \geq (1 - \varepsilon) \max_{i \in \{1, \dots, r-1\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|.$$

Soit  $x$  un élément de  $V \setminus V_{r-1}$ . On choisit un point  $y$  de  $V_{r-1}$  tel que (la distance entre  $x$  et  $V_{r-1}$  est strictement positive car  $V_{r-1}$  est fermé dans  $V$ )

$$(18) \quad \|x - y\| \leq (1 - \varepsilon)^{-1} \text{dist}(x, V_{r-1}).$$

---

3. On dit qu'une base  $e$  est compatible au drapeau complet  $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_r = V$  si, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on a  $\text{card}(V_i \cap e) = i$ .

On choisit  $e_r = x - y$ . Les vecteurs  $e_1, \dots, e_r$  forment une base de  $V$  qui est compatible au drapeau  $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_r = V$ . Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  un vecteur dans  $k^r$ . On cherche à minorer la norme de  $z = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r$ . D'après (18), on a

$$\|z\| \geq |\lambda_r| \cdot \text{dist}(x, V_{r-1}) \geq (1 - \varepsilon) |\lambda_r| \cdot \|e_r\|.$$

Donc la minoration souhaitée est vérifiée lorsque  $\|\lambda_r e_r\| \geq \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\|$ . Si  $\|\lambda_r e_r\| < \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\|$ , alors on a  $\|z\| = \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\|$  puisque la norme est ultramétrique. L'hypothèse de récurrence (17) montre que  $\|z\| \geq (1 - \varepsilon) |\lambda_i| \cdot \|e_i\|$  quel que soit  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ . La proposition est ainsi démontrée.  $\square$

**Remarque 3.2.** — Si le corps  $k$  est localement compact, alors la proposition précédente est valable pour  $\varepsilon = 0$ . En effet, la distance figurant dans (18) est atteinte.

**Définition 3.3.** — Soit  $V$  un espace vectoriel ultranormé sur  $k$ . Soit  $\alpha$  un élément dans  $]0, 1]$ . On dit qu'une base  $e = (e_1, \dots, e_r)$  de  $V$  est  $\alpha$ -orthogonale si, pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in k^r$ , on a

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r\| \geq \alpha \max(|\lambda_1| \cdot \|e_1\|, \dots, |\lambda_r| \cdot \|e_r\|).$$

Par définition, la 1-orthogonalité de  $e$  n'est rien d'autre que l'orthogonalité de  $e$ .

Si  $V$  est un espace vectoriel ultranormé de rang fini sur  $k$ , on désigne par  $V^\vee = \text{Hom}_k(V, k)$  l'espace dual muni de la norme d'opérateur. C'est un espace vectoriel ultranormé sur  $k$ .

**Proposition 3.4.** — Soient  $V$  un espace vectoriel ultranormé de rang fini sur  $k$ , et  $(e_1, \dots, e_r)$  une base  $\alpha$ -orthogonale de  $V$ , où  $\alpha \in ]0, 1]$ . Alors la base duale  $(e_1^\vee, \dots, e_r^\vee)$  est  $\alpha$ -orthogonale.

*Démonstration.* — Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  un élément de  $k^r$ . On a

$$e_i^\vee(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r) = \lambda_i.$$

Donc

$$(19) \quad \|e_i^\vee\| = \sup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)} \frac{|\lambda_i|}{\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r\|} \leq \alpha^{-1} \|e_i\|^{-1}$$

Soit  $\xi = \lambda_1 e_1^\vee + \dots + \lambda_r e_r^\vee$  un élément de  $V^\vee$ . Comme  $\xi(e_i) = \lambda_i$ , on obtient

$$\|\xi\| \geq |\lambda_i| / \|e_i\| \geq \alpha |\lambda_i| \cdot \|e_i^\vee\|.$$

Le résultat est donc démontré.  $\square$

Si  $(V_1, \varphi_1)$  et  $(V_2, \varphi_2)$  deux espaces vectoriels de rang fini sur  $k$  qui sont ultranormés, on peut identifier  $V_1 \otimes V_2$  à  $\text{Hom}_k(V_1^\vee, V_2)$  et le munir de la norme d'opérateur. Cette norme sur  $V_1 \otimes V_2$ , qui est ultramétrique, est appelée la norme *tensorielle* sur  $V_1 \otimes V_2$  et notée comme  $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ . Par récurrence on peut construire la norme tensorielle pour le produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels ultranormés (cf. [12, remarque 3.8]).

**Proposition 3.5.** — Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels ultranormés de rang fini sur  $k$ , et  $\alpha$  un nombre dans  $]0, 1]$ . Si  $(s_i)_{i=1}^n$  et  $(t_j)_{j=1}^m$  sont des bases  $\alpha$ -orthogonales de  $V$  et  $W$  respectivement, alors  $(s_i \otimes t_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  est une base  $\alpha^2$ -orthogonale de  $V \otimes W$ .

*Démonstration.* — Soit  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$  une matrice de taille  $n \times m$  à coefficients dans  $k$ . Soit  $T$  le tenseur  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} s_i \otimes t_j$ . On cherche à minorer la norme d'opérateur de  $T$  vu comme l'homomorphisme  $k$ -linéaire de  $V^\vee$  vers  $W$ . Soit  $(s_i^\vee)_{i=1}^n$  la base duale de  $(s_i)_{i=1}^n$ . D'après la proposition 3.4, c'est une base  $\alpha$ -orthogonale de  $V^\vee$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a

$$\|T(s_i^\vee)\| = \left\| \sum_{j=1}^m a_{ij} t_j \right\| \geq \alpha \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ij}| \cdot \|t_j\|.$$

Cela montre que

$$\|T\| \geq \|s_i^\vee\|^{-1} \alpha \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ij}| \cdot \|t_j\| \geq \alpha^2 \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |a_{ij}| \cdot \|s_i\| \cdot \|t_j\|,$$

où la deuxième inégalité provient de (19). Le résultat est donc démontré.  $\square$

Étant donné un espace vectoriel  $V$  de rang fini  $r$  sur  $k$ , muni d'une norme ultramétrique  $\|\cdot\|$ , on munit  $\det(V) = \Lambda^r(V)$  de la norme quotient induite par l'homomorphisme canonique  $V^{\otimes r} \rightarrow \Lambda^r(V)$ . L'inégalité d'Hardamard non-archimédienne montre que, pour toute base  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $V$ , on a

$$(20) \quad \|e_1 \wedge \dots \wedge e_r\| \leq \|e_1 \otimes \dots \otimes e_r\| = \prod_{i=1}^r \|e_i\|.$$

L'égalité est vérifiée lorsque la base  $(e_1, \dots, e_r)$  est orthogonale. Si la base est  $\alpha$ -orthogonale, on a

$$(21) \quad \|e_1 \wedge \dots \wedge e_r\| \geq \alpha^r \prod_{i=1}^r \|e_i\|.$$

Cela provient <sup>(4)</sup> de la proposition 3.5.

**3.2. Degré d'Arakelov et polygone de Harder-Narasimhan.** — On désigne par  $\mathcal{C}_k$  la classe des espaces vectoriels de rang fini sur  $k$  munis de deux normes ultramétriques. Si  $\overline{V} = (V, \|\cdot\|_\varphi, \|\cdot\|_\psi)$  est un élément de  $\mathcal{C}_k$ , on désigne par  $\widehat{\deg}(\overline{V})$  le nombre suivant

$$-\ln \|s_1 \wedge \dots \wedge s_r\|_\varphi + \ln \|s_1 \wedge \dots \wedge s_r\|_\psi,$$

où  $(s_1, \dots, s_r)$  est une base arbitraire de  $V$  sur  $k$ . Cette construction ne dépend pas du choix de  $(s_1, \dots, s_r)$ , grâce à la formule de produit triviale

$$\forall a \in k^\times, \quad -\ln |a| + \ln |a| = 0.$$

---

4. Par récurrence la proposition 3.5 montre que  $(e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(r)})_{1 \leq \sigma(1), \dots, \sigma(r) \leq r}$  est une  $\alpha^r$ -base de  $V^{\otimes r}$ . Si  $\xi = \sum_{\sigma} a_{\sigma} e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(r)}$  est un élément de  $V^{\otimes n}$  dont l'image dans  $\Lambda^r V$  est  $e_1 \wedge \dots \wedge e_r$ , alors on a  $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} a_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} = 1$ , où  $\mathfrak{S}_r$  désigne le groupe symétrique d'ordre  $r$ . Il existe alors au moins un  $\sigma \in \mathfrak{S}_r$  tel que  $|a_{\sigma}| \geq 1$ . On obtient donc  $\|\xi\| \geq \alpha^r \prod_{i=1}^r \|e_i\|$ .

Si de plus  $V$  est non-nul, on désigne par  $\widehat{\mu}(\overline{V})$  le quotient  $\widehat{\deg}(\overline{V})/\mathrm{rg}(V)$ . D'après la proposition 3.1, l'inégalité d'Hadamard (20) et son inégalité inverse (21), on obtient que, si

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V$$

est un drapeau de sous-espaces vectoriels de  $V$ , alors on a

$$(22) \quad \widehat{\deg}(\overline{V}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\deg}(\overline{V}_i/\overline{V}_{i-1}),$$

où on a considéré des normes sous-quotient.

On désigne par  $\widetilde{P}_{\overline{V}}$  la fonction sur  $[0, r]$  dont le graphe est la borne supérieure de l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  de la forme  $(\mathrm{rg}(W), \widehat{\deg}(\overline{W}))$ , où  $W$  parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $V$ . C'est une fonction concave qui est affine sur chacun des intervalles  $[i-1, i]$  ( $i \in \{1, \dots, r\}$ ). Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on désigne par  $\widehat{\mu}_i(\overline{V})$  la pente de cette fonction sur  $[i-1, i]$ . On introduit la version normalisée de la fonction  $\widetilde{P}_{\overline{V}}$  en posant

$$\forall t \in [0, 1], \quad P_{\overline{V}}(t) = \frac{1}{\mathrm{rg}(V)} \widetilde{P}_{\overline{V}}(t \mathrm{rg}(V)).$$

Soit en outre  $Z_{\overline{V}}$  une variable aléatoire dont la loi de probabilité est

$$\frac{1}{\mathrm{rg}(V)} \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(V)} \delta_{\widehat{\mu}_i(\overline{V})}.$$

La relation suivante est aussi vérifiée dans le cas non-archimédien :

$$(23) \quad \widehat{\mu}(\overline{V}) = P_{\overline{V}}(1) = \mathbb{E}[Z_{\overline{V}}].$$

Les résultats de §2.3, notamment la proposition 2.4 et le corollaire 2.6, sont encore valables pour les éléments de  $\mathcal{C}_k$  (et les démonstrations sont similaires). On résume ces énoncés dans la suite.

**Proposition 3.6.** — *Soit  $(V, \varphi, \psi)$  un objet de  $\mathcal{C}_k$ . Soient  $\varphi'$  et  $\psi'$  deux normes ultramétriques sur  $V$ .*

(1) *Si  $\psi' \leq \psi$ , alors  $\widetilde{P}_{(V, \varphi, \psi')} \leq \widetilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}$ .*

(2) *Si  $\varphi' \geq \varphi$ , alors  $\widetilde{P}_{(V, \varphi', \psi)} \leq \widetilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}$ .*

(3) *En général, on a*

$$\forall t \in [0, \mathrm{rg}(V)], \quad |\widetilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}(t) - \widetilde{P}_{(V, \varphi', \psi')} (t)| \leq (d(\varphi, \varphi') + d(\psi, \psi'))t.$$

La proposition suivante pourrait être considérée comme un analogue ultramétrique du théorème de Courant-Fischer.

**Proposition 3.7.** — *Soit  $\overline{V} = (V, \varphi, \psi)$  un élément de  $\mathcal{C}_k$  qui est de rang  $r \geq 1$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on a*

$$(24) \quad \widetilde{P}_{\overline{V}}(i) = \sup_{\substack{W \subset V \\ \mathrm{rg}(W)=i}} \widehat{\deg}(\overline{W}).$$

*Démonstration.* — Montrons par récurrence sur  $r$  que, pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , il existe une base de  $V$  qui est simultanément  $\alpha$ -orthogonale aux normes  $\varphi$  et  $\psi$ . Le cas où  $r = 1$  est trivial. Supposons que cet énoncé a été justifié pour tout élément de  $\mathcal{C}_k$  de rang  $< r$ . On choisit  $e_1 \in V \setminus \{0\}$  tel que

$$(25) \quad \frac{\|e_1\|_\psi}{\|e_1\|_\varphi} \leq (\sqrt[4]{\alpha})^{-1} \inf_{0 \neq x \in V} \frac{\|x\|_\psi}{\|x\|_\varphi}.$$

D'après la proposition 3.1, il existe un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  de rang  $r - 1$  tel que

$$(26) \quad \forall y \in W, \quad \|e_1 + y\|_\varphi \geq \sqrt[4]{\alpha} \max(\|e_1\|_\varphi, \|y\|_\varphi).$$

D'après (25) et (26), on a

$$\forall y \in W, \quad \|e_1 + y\|_\psi \geq \sqrt[4]{\alpha} \cdot \|e_1 + y\|_\varphi \cdot \frac{\|e_1\|_\psi}{\|e_1\|_\varphi} \geq \sqrt{\alpha} \cdot \|e_1\|_\psi.$$

En outre, comme la norme  $\psi$  est ultramétrique, si  $\|y\|_\psi > \|e_1\|_\psi$ , alors on a  $\|e_1 + y\|_\psi = \|y\|_\psi$ . On obtient donc

$$(27) \quad \|e_1 + y\|_\psi \geq \sqrt{\alpha} \max(\|e_1\|_\psi, \|y\|_\psi).$$

Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base  $(e_2, \dots, e_r)$  de  $W$  qui est simultanément  $\sqrt{\alpha}$ -orthogonale pour les normes  $\varphi$  et  $\psi$ . Montrons que  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base  $\alpha$ -orthogonale pour les normes  $\varphi$  et  $\psi$ . Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  un élément de  $k^r$  avec  $\lambda_1 \neq 0$ . D'après (26), on a

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r\|_\varphi &\geq \sqrt[4]{\alpha} \cdot \max(|\lambda_1| \cdot \|e_1\|_\varphi, \|\lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_r e_r\|_\varphi) \\ &\geq \sqrt[4]{\alpha} \cdot \max(|\lambda_1| \cdot \|e_1\|_\varphi, \sqrt{\alpha} \cdot \max(|\lambda_2| \cdot \|e_2\|_\varphi, \dots, |\lambda_r| \cdot \|e_r\|_\varphi)) \\ &\geq \alpha \max(|\lambda_1| \cdot \|e_1\|_\varphi, \dots, |\lambda_r| \cdot \|e_r\|_\varphi), \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité provient de l'hypothèse que  $(e_2, \dots, e_r)$  est une base  $\sqrt{\alpha}$ -orthogonale de  $W$  pour la norme  $\|\cdot\|_\varphi$ . Cette inégalité est aussi vraie lorsque  $\lambda_1 = 0$  (on utilise directement l'hypothèse que  $(e_2, \dots, e_r)$  est une famille  $\sqrt{\alpha}$ -orthogonale). De façon similaire, on déduit de la relation (27) que  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base  $\alpha$ -orthogonale de  $V$  pour la norme  $\|\cdot\|_\psi$ .

Montrons alors le résultat de la proposition. On traite d'abord le cas où il existe une base  $(s_1, \dots, s_r)$  qui est simultanément orthogonale pour les normes  $\varphi$  et  $\psi$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $a_i$  le logarithme du rapport  $\|s_i\|_\psi / \|s_i\|_\varphi$ . Sans perte de généralité, on peut supposer  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r$ . Pour tout entier  $m \in \{1, \dots, r\}$ , les vecteurs  $s_{i_1} \wedge \dots \wedge s_{i_m}$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq r$ ) forment une base de  $\Lambda^m(V)$  qui est orthogonale par rapport à  $\varphi$  et  $\psi$  simultanément. Étant donné un sous-espace vectoriel  $W$  de rang  $m$  de  $V$ , quitte à écrire un élément non-nul de  $\Lambda^m W$  comme une combinaison linéaire des  $s_{i_1} \wedge \dots \wedge s_{i_m}$ , on peut montrer que

$$\widehat{\deg}(W) \leq a_1 + \dots + a_m,$$

et l'égalité est atteinte lorsque  $W$  est engendré par  $s_1, \dots, s_m$ .

Dans le cas général, d'après l'énoncé que l'on a démontré plus haut, on peut construire une suite d'objets  $(V, \varphi_n, \psi_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de  $\mathcal{C}_k$  tels que<sup>(5)</sup>

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\varphi_n, \varphi) + d(\psi_n, \psi) = 0$$

et que, pour chaque  $n$ , il existe une base de  $V$  qui est orthogonale par rapport aux normes  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  simultanément. D'un côté, on a

$$\tilde{P}_{(V, \varphi_n, \psi_n)}(i) = \sup_{\substack{W \subset V \\ \text{rg}(W)=i}} \widehat{\text{deg}}(W, \varphi_n, \psi_n),$$

de l'autre côté, on a

$$|\tilde{P}_{(V, \varphi_n, \psi_n)}(t) - \tilde{P}_{(V, \varphi, \psi)}(t)| \leq (d(\varphi_n, \varphi) + d(\psi_n, \psi))t,$$

et pour tout sous-espace vectoriel  $W$  de  $V$ , on a

$$|\widehat{\text{deg}}(W, \varphi_n, \psi_n) - \widehat{\text{deg}}(W, \varphi, \psi)| \leq (d(\varphi_n, \varphi) + d(\psi_n, \psi)) \text{rg}(W).$$

Par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient le résultat souhaité.  $\square$

**3.3. Troncature.** — Les résultats du sous-paragraphe §2.5 sont encore valables pour les objets dans  $\mathcal{C}_k$ . La démonstration est plus simple car on ne considère que des normes ultramétriques. Si  $V$  est un espace vectoriel de rang fini sur  $k$  et si  $\varphi$  est une norme ultramétrique sur  $V$ , pour tout nombre réel  $a$ , on désigne par  $\varphi(a)$  la norme sur  $V$  telle que

$$\forall x \in V, \quad \|x\|_{\varphi(a)} = e^a \|x\|_{\varphi}.$$

Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux normes ultramétriques sur  $V$ , on désigne par  $\varphi \vee \psi$  la norme sur  $V$  telle que

$$\forall x \in V, \quad \|x\|_{\varphi \vee \psi} = \max(\|x\|_{\varphi}, \|x\|_{\psi}).$$

C'est aussi une norme ultramétrique sur  $V$ .

**Proposition 3.8.** — Soit  $\overline{V} = (V, \varphi, \psi)$  un élément non-nul de  $\mathcal{C}_k$  et  $a$  un nombre réel. On a

$$\widehat{\text{deg}}(V, \varphi, \psi \vee \varphi(a)) = \sum_{i=1}^{\text{rg}(V)} \max(\widehat{\mu}_i(\overline{V}), a)$$

*Démonstration.* — On commence par le cas où  $V$  possède une base  $(e_1, \dots, e_r)$  qui est orthogonale simultanément par rapport aux normes  $\varphi$  et  $\psi$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\ln \frac{\|e_i\|_{\psi}}{\|e_i\|_{\varphi}} = \widehat{\mu}_i(\overline{V}).$$

5. Comme dans le cas complexe, pour tout couple  $(\eta, \eta')$  de normes ultramétriques sur  $V$ , on note

$$d(\eta, \eta') = \sup_{0 \neq x \in V} \left| \ln \|x\|_{\eta} - \ln \|x\|_{\eta'} \right|.$$

Il s'avère que  $(e_1, \dots, e_r)$  est également orthogonale par rapport à la norme  $\psi \vee \varphi(a)$ , et on a

$$\ln \frac{\|e_i\|_\psi}{\|e_i\|_\varphi} = \max(\widehat{\mu}_i(\overline{V}), a).$$

On obtient alors l'égalité annoncée. Pour le cas général, on peut approximer  $(\varphi, \psi)$  par une suite de couples  $((\varphi_n, \psi_n))_{n \geq 1}$  telle que, pour chaque  $n$ , l'espace vectoriel  $V$  possède une base orthogonale par rapport à  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  simultanément (cf. la démonstration de la proposition 3.7). Par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient le résultat.  $\square$

#### 4. Énergie à l'équilibre

On fixe dans ce paragraphe un corps valué  $k$ , qui est ou bien le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$  muni de la valeur absolue habituelle, ou bien un corps muni d'une valeur absolue non-archimédienne qui est complet. Si  $k = \mathbb{C}$ , l'expression  $\mathcal{C}_k$  désigne la classe  $\mathcal{C}$  définie dans §2.3.

**4.1. Base monomiale et semi-groupe d'Okounkov.** — Dans ce sous-paragraphe, on rappelle la construction de semi-groupe d'Okounkov pour un système linéaire gradué. On renvoie les lecteurs dans [14, 13, 5] pour plus de détails.

Considérons un schéma projectif intègre  $X$  de dimension  $d \geq 1$  défini sur le corps  $k$ . On suppose que le schéma  $X$  possède un point rationnel régulier  $x$ . L'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est ainsi un anneau local régulier de dimension  $d$ . On fixe une suite régulière  $(z_1, \dots, z_d)$  dans son idéal maximal  $\mathfrak{m}_x$ . Le complété formel de  $\mathcal{O}_{X,x}$  par rapport à l'idéal maximal  $\mathfrak{m}_x$  est isomorphe à l'algèbre des séries formelles engendrée par les paramètres  $z_1, \dots, z_d$  (cf. [11, proposition 10.16]).

Si on choisit une relation d'ordre monomiale<sup>(6)</sup>  $\leq$  sur  $\mathbb{N}^d$ , on obtient une  $\mathbb{N}^d$ -filtration décroissante (appelée la *filtration d'Okounkov*)  $\mathcal{F}$  sur  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$  telle que  $\mathcal{F}^\alpha(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})$  soit l'idéal engendré par les monômes de la forme  $z^\beta$  avec  $\beta \geq \alpha$ . Cette filtration est multiplicative : on a

$$\mathcal{F}^\alpha(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})\mathcal{F}^\beta(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}) \subset \mathcal{F}^{\alpha+\beta}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}).$$

La filtration  $\mathcal{F}$  induit par passage au graduation un anneau  $\mathbb{N}^d$ -gradué  $\text{gr}(\mathcal{O}_{X,x})$  qui est isomorphe<sup>(7)</sup> à  $k[z_1, \dots, z_d]$ . En particulier, pour chaque  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ,  $\text{gr}^\alpha(\mathcal{O}_{X,x})$  est un espace vectoriel de rang 1 sur  $k$ .

Si  $L$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible, quitte à choisir une trivialisatation autour du point  $x$ , on peut identifier  $L_x$  à  $\mathcal{O}_{X,x}$ . Ainsi la filtration  $\mathcal{F}$  induit par restriction une  $\mathbb{N}^d$ -filtration décroissante sur  $H^0(X, L)$  qui ne dépend pas du choix de la trivialisatation. Pour tout  $s \in H^0(X, L)$ , on désigne par  $\text{ord}(s)$  la borne supérieure de l'ensemble des  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  tels que  $s \in \mathcal{F}^\alpha H^0(X, L)$ . On a

$$\forall s, s' \in H^0(X, L), \quad \text{ord}(s + s') \geq \min(\text{ord}(s), \text{ord}(s')).$$

6. C'est une relation d'ordre totale  $\leq$  sur  $\mathbb{N}^d$  telle que  $0 \leq \alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  et que  $\alpha \leq \alpha'$  implique  $\alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$  pour tous  $\alpha, \alpha'$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{N}^d$ .

7. Cela provient du fait que  $\mathcal{O}_{X,x}$  est dense dans  $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ .

En outre, pour tout  $s \in H^0(X, L)$  et tout  $a \in k^\times$ , on a  $\text{ord}(s) = \text{ord}(as)$ .

Soit  $L$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible. On désigne par  $V_\bullet(L)$  l'algèbre graduée  $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, nL)$  (où le produit tensoriel de faisceaux inversibles est noté additivement). On appelle *système linéaire gradué* de  $L$  toute sous-algèbre graduée de  $V_\bullet(L)$ . Étant donné un système linéaire gradué  $V_\bullet$  de  $L$ , quitte à choisir une trivialisations de  $L$  dans un voisinage de  $x$ , on peut identifier  $V_\bullet$  à une sous-algèbre graduée de l'algèbre des polynômes  $\mathcal{O}_{X,x}[T]$ . La filtration  $\mathcal{F}$  induit une  $\mathbb{N}^d$ -filtration décroissante sur chaque composante homogène  $V_n$ . On désigne par  $\text{gr}(V_\bullet)$  la  $k$ -algèbre  $\mathbb{N}^{d+1}$ -graduée induite par cette filtration. C'est une sous- $k$ -algèbre  $\mathbb{N}^{d+1}$ -graduée de  $\text{gr}(\mathcal{O}_{X,x}[T]) \cong k[z_1, \dots, z_d, T]$ . En particulier, les éléments  $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^{d+1}$  tels que  $\text{gr}^{(n, \alpha)}(V_\bullet) \neq \{0\}$  forment un sous-semi-groupe de  $\mathbb{N}^{d+1}$  que l'on note comme  $\Gamma(V_\bullet)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $\Gamma(V_n)$  le sous-ensemble de  $\mathbb{N}^d$  des éléments  $\alpha$  tels que  $(n, \alpha) \in \Gamma(V_\bullet)$ .

**4.2. Normes monomiales.** — Comme dans le sous-paragraphe précédent, on considère un schéma intègre  $X$  de dimension  $d \geq 1$  sur  $\text{Spec } k$ . On fixe en outre un point rationnel régulier  $x \in X(k)$  (dont on suppose l'existence), un système de paramètres  $z = (z_1, \dots, z_d)$  en  $x$  et une relation d'ordre monomiale sur  $\mathbb{N}^d$ . Soient  $L$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible et  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $L$ . On suppose que chaque  $k$ -espace vectoriel  $V_n$  est muni de deux normes  $\varphi_n$  et  $\psi_n$ , qui sont ultramétriques si  $k$  est non-archimédien. On suppose en outre que ces normes sont sous-multiplicatives, autrement dit, pour tout  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  et tout  $(s_n, s_m) \in V_n \times V_m$ , on a

$$(28) \quad \|s_n \otimes s_m\|_{\varphi_{n+m}} \leq \|s_n\|_{\varphi_n} \cdot \|s_m\|_{\varphi_m}, \quad \|s_n \otimes s_m\|_{\psi_{n+m}} \leq \|s_n\|_{\psi_n} \cdot \|s_m\|_{\psi_m}.$$

Dans ce sous-paragraphe, on étudie le comportement asymptotique de  $\widehat{\text{deg}}(V_n, \varphi_n, \psi_n)$ . Faute de la functorialité de la filtration de Harder-Narasimhan pour les objets dans  $\mathcal{C}_k$ , on ne peut pas directement utiliser la méthode développée dans [6] pour étudier ce problème. Cette difficulté est contournée par la méthode de la filtration d'Okounkov. En effet, les normes  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  induisent par passage au quotient des normes sur chacun des sous-quotients  $\text{gr}^\alpha(V_n)$  ( $\alpha \in \Gamma(V_n)$ ) que l'on notera encore comme  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  par abus de langage. En outre, les résultats que l'on a établis dans le paragraphe précédent, notamment les relations (12) et (22), montre que

$$\left| \widehat{\text{deg}}(V_n, \varphi_n, \psi_n) - \sum_{\alpha \in \Gamma(V_n)} \widehat{\text{deg}}(\text{gr}^\alpha(V_n), \varphi_n, \psi_n) \right| \leq A_k(\text{rg}(V_n)),$$

où  $A_k(r) = r \ln(r)$  si  $k = \mathbb{C}$ , et  $A_k(r) = 0$  si  $k$  est non-archimédien. On en déduit

$$(29) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\widehat{\mu}(V_n, \varphi_n, \psi_n)}{n} - \frac{1}{n \#\Gamma(V_n)} \sum_{\alpha \in \Gamma(V_n)} \widehat{\text{deg}}(\text{gr}^\alpha(V_n), \varphi_n, \psi_n) \right| = 0.$$

En outre, si on munit l'espace vectoriel

$$\text{gr}(V_n) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma(V_n)} \text{gr}^\alpha(V_n)$$

des normes  $\hat{\varphi}_n$  et  $\hat{\psi}_n$  de sorte que les sous-espaces (de rang 1)  $\text{gr}^\alpha(V_n)$  sont orthogonaux et admettent  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  (normes sous-quotient) comme normes respectivement, alors on a

$$\sum_{\alpha \in \Gamma(V_n)} \widehat{\text{deg}}(\text{gr}^\alpha(V_n), \varphi_n, \psi_n) = \widehat{\text{deg}}(\text{gr}(V_n), \hat{\varphi}_n, \hat{\psi}_n).$$

Ainsi on peut se ramener à étudier la  $k$ -algèbre du semi-groupe  $\Gamma(V_\bullet)$  (qui est en fait isomorphe à  $\text{gr}(V_\bullet)$ ) munie des normes adéquates. Comme le semi-groupe  $\Gamma(V_\bullet)$  forme une base multiplicative de l'algèbre  $k[\Gamma(V_\bullet)]$ , on peut construire une nouvelle norme  $\eta_n$  sur chaque espace  $\text{gr}(V_n)$ , qui est multiplicative : pour tout  $\gamma \in \Gamma(V_\bullet)$ , on désigne par  $s_\gamma$  l'image canonique de  $\gamma \in \Gamma(V_\bullet)$  dans l'algèbre  $k[\Gamma(V_\bullet)]$ , et on munit

$$\text{gr}(V_n) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma(V_n)} ks_{(n,\alpha)}$$

de la norme  $\eta_n$  telle que les vecteurs  $s_{n,\alpha}$  soient orthogonales et de norme 1. À l'aide de ces normes auxiliaires, on peut écrire le nombre  $\widehat{\text{deg}}(\text{gr}(V_n), \hat{\varphi}_n, \hat{\psi}_n)$  comme une différence

$$\widehat{\text{deg}}(\text{gr}(V_n), \hat{\varphi}_n, \eta_n) - \widehat{\text{deg}}(\text{gr}(V_n), \hat{\psi}_n, \eta_n),$$

ou encore comme

$$\sum_{\alpha \in \Gamma(V_n)} \widehat{\text{deg}}(\text{gr}^\alpha(V_n), \varphi_n, \eta_n) - \sum_{\alpha \in \Gamma(V_n)} \widehat{\text{deg}}(\text{gr}^\alpha(V_n), \psi_n, \eta_n).$$

Il s'avère que les fonctions  $(n, \alpha) \mapsto \widehat{\text{deg}}(\text{gr}^\alpha(V_n), \varphi_n, \eta_n)$  et  $(n, \alpha) \mapsto \widehat{\text{deg}}(\text{gr}^\alpha(V_n), \psi_n, \eta_n)$  de  $\Gamma(V_\bullet)$  vers  $\mathbb{R}$  sont sur-additives, on peut ainsi utiliser la méthode développée dans [6] pour étudier leur comportement asymptotique.

**4.3. Théorème de limite.** — Dans ce sous-paragraphe, on fixe un entier  $d \geq 1$  et un sous-semi-groupe  $\Gamma$  de  $\mathbb{N}^{d+1}$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $\Gamma_n$  l'ensemble  $\{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid (n, \alpha) \in \Gamma\}$ . On suppose que le semi-groupe  $\Gamma$  vérifie les conditions suivantes (cf. [13, §2.1]) :

- (a)  $\Gamma_0 = \{\mathbf{0}\}$ ,
- (b) il existe un sous-ensemble fini  $B$  de  $\{1\} \times \mathbb{N}^d$  tel que  $\Gamma$  soit contenu dans le sous-monoïde de  $\mathbb{N}^{d+1}$  engendré par  $B$ ,
- (c) le groupe  $\mathbb{Z}^{d+1}$  est engendré par  $\Gamma$ .

On désigne par  $\Sigma(\Gamma)$  le cône convexe (fermé) dans  $\mathbb{R}^{d+1}$  engendré par le semi-groupe  $\Gamma$ . Sous les conditions comme ci-dessus, la projection de  $\Sigma \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^d)$  dans  $\mathbb{R}^d$  est un corps convexe dans  $\mathbb{R}^d$ , que l'on note comme  $\Delta(\Gamma)$ . En outre, on a (cf. [13, proposition 2.1])

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\Gamma_n}{n^d} = \text{vol}(\Delta(\Gamma)),$$

où  $\text{vol}(\cdot)$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ .

On dit qu'une fonction  $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  est *sur-additive* si  $\Phi(\gamma + \gamma') \geq \Phi(\gamma) + \Phi(\gamma')$ . Dans la suite, on étudie le comportement asymptotique des fonctions sur-additives.

**Lemme 4.1.** — *Soit  $\Phi$  une fonction sur-additive définie sur  $\Gamma$  telle que  $\Phi(0, 0) = 0$ .*

- (1) Pour tout nombre réel  $t$ , l'ensemble  $\Gamma_{\Phi}^t := \{(n, \alpha) \in \Gamma \mid \Phi(n, \alpha) \geq nt\}$  est un sous-semi-groupe de  $\Gamma$ .
- (2) Si  $t \in \mathbb{R}$  est un nombre réel tel que

$$t < \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in \Gamma_n} \frac{1}{n} \Phi(n, \alpha),$$

alors  $\Gamma_{\Phi}^t$  vérifie les conditions (a)–(c) introduites plus haut.

*Démonstration.* — (1) Comme la fonction  $\Phi$  est sur-additive, si  $(n, \alpha)$  et  $(m, \beta)$  sont deux éléments de  $\Gamma_{\Phi}^t$ , on a

$$\Phi(n + m, \alpha + \beta) \geq \Phi(n, \alpha) + \Phi(m, \beta) \geq nt + mt = (n + m)t,$$

d'où  $(n + m, \alpha + \beta) \in \Gamma_{\Phi}^t$ .

(2) On vérifie facilement que les conditions (a) et (b) sont vérifiées par le semi-groupe  $\Gamma_{\Phi}^t$ . Montrons la condition (c) dans la suite. Soit  $A$  un sous-ensemble fini de  $\Gamma$  qui engendre  $\mathbb{Z}^{d+1}$  comme un groupe. Par l'hypothèse de la proposition, il existe  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma = (m, \beta) \in \Gamma$  tels que  $\Phi(m, \beta) \geq (t + \varepsilon)m$ . Par conséquent, pour tout  $(n, \alpha) \in \Gamma$ , on a

$$\frac{\Phi(km + n, k\beta + \alpha)}{km + n} \geq \frac{\Phi(n, \alpha) + k\Phi(m, \beta)}{km + n} \geq \frac{\Phi(n, \alpha) + km(t + \varepsilon)}{km + n} \geq t$$

lorsque  $k$  est assez grand. On en déduit ainsi l'existence d'un entier  $k_0 \geq 1$  tel que  $k\gamma + \xi \in \Gamma_{\Phi}^t$  quel que soient  $\xi \in A$  et  $k \geq k_0$ , d'où  $\Gamma_{\Phi}^t$  engendre  $\mathbb{Z}^{d+1}$  comme groupe.  $\square$

**Remarque 4.2.** — La sur-additivité de la fonction  $\Phi$  montre que

$$\Delta(\Gamma_{\Phi}^{\varepsilon t_1 + (1-\varepsilon)t_2}) \supset \varepsilon \Delta(\Gamma_{\Phi}^{t_1}) + (1 - \varepsilon) \Delta(\Gamma_{\Phi}^{t_2}).$$

D'après le théorème de Brunn-Minkowski, la fonction  $t \mapsto \text{vol}(\Delta(\Gamma_{\Phi}^t))^{1/d}$  est concave sur  $] -\infty, \theta[$ , où

$$\theta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in \Gamma_n} \frac{1}{n} \Phi(n, \alpha),$$

donc elle est continue sur cet intervalle. En outre, comme l'ensemble (qui est dense dans  $\Delta(\Gamma)$ )

$$\{\alpha/n : (n, \alpha) \in \Gamma, n \geq 1\}$$

est contenu dans  $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Delta(\Gamma_{\Phi}^t)$ , on obtient

$$\text{vol}(\Delta(\Gamma)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{vol}(\Delta(\Gamma_{\Phi}^t)).$$

Le résultat suivant est un théorème de limite pour les fonctions sur-additives définies sur le semi-groupe  $\Gamma$ . C'est une généralisation naturelle de [6, théorème 1.11]

**Théorème 4.3.** — Soit  $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction sur-additive telle que

$$(30) \quad \theta := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in \Gamma_n} \frac{1}{n} \Phi(n, \alpha) < +\infty.$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on considère  $Z_n = \Phi(n, \cdot)$  comme une variable aléatoire sur l'ensemble  $\Gamma_n$  muni de la mesure de probabilité équirépartie. Alors la suite de variables

aléatoires  $(Z_n/n)_{n \geq 1}$  converge en loi<sup>(8)</sup> vers une variable aléatoire limite  $Z$  dont la loi de probabilité vérifie

$$\mathbb{P}(Z \geq t) = \frac{\text{vol}(\Delta(\Gamma_\Phi^t))}{\text{vol}(\Delta(\Gamma))}, \quad t \neq \theta.$$

*Démonstration.* — D'après la remarque 4.2, la fonction  $F(t) := \text{vol}(\Delta(\Gamma_\Phi^t))/\text{vol}(\Delta(\Gamma))$  définie sur  $t \in \mathbb{R} \setminus \{\theta\}$  est décroissante et continue, et on a  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 1$ . En outre, la condition (30) montre que  $F(t) = 0$  lorsque  $t$  est assez positif. Par conséquent, si on étend le domaine de définition de  $F$  en  $\mathbb{R}$  en prenant  $F(\theta)$  comme la limite de  $F(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $\theta$  depuis la gauche, on obtient une fonction de répartition (continue à gauche) sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout nombre réel  $t$ , on a

$$\mathbb{P}(Z_n \geq t) = \frac{\#\Gamma_{\Phi,n}^t}{\#\Gamma_n},$$

où  $\Gamma_{\Phi,n}^t$  est l'ensemble des  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  tel que  $(n, \alpha) \in \Gamma_\Phi^t$ . D'après le lemme précédent, on obtient

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) = F(t)$$

pour tout  $t < \theta$ . En outre, si  $t > \theta$ , alors  $\Gamma_{\Phi,n}^t$  est vide pour tout  $n \geq 1$ , et  $\Delta(\Gamma_\Phi^t)$  est vide. Donc la relation (31) est aussi valable pour  $t > \theta$ . Enfin, si la fonction  $F$  est continue en  $\theta$ , alors la décroissance de  $t \mapsto \mathbb{P}(Z_n \geq t)$  et celle de la fonction  $F$  montre que l'on a également  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq \theta) = F(\theta)$ , le résultat est ainsi démontré.  $\square$

**Remarque 4.4.** — On peut aussi interpréter la loi limite dans le théorème précédent comme l'image directe de la mesure de Lebesgue sur  $\Delta(\Gamma)$  par une fonction déterminée par  $\Phi$ . On désigne par  $G_\Phi : \Delta(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  l'application qui envoie  $x$  en  $\sup\{t \in \mathbb{R} : x \in \Delta(\Gamma_\Phi^t)\}$ . Cette fonction est concave et prend valeurs réelles dans<sup>(9)</sup>  $\Delta(\Gamma)^\circ$ . Donc la fonction  $G_\Phi$  est continue sur  $\Delta(\Gamma)^\circ$ . En outre, par définition la loi limite est égale à l'image directe de la mesure de Lebesgue normalisée sur  $\Delta(\Gamma)$  par la fonction  $G_\Phi$ . En particulier, si  $h$  est une fonction continue et bornée, alors on a

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(\Phi(n, \alpha)/n)}{\#\Gamma_n} = \frac{1}{\text{vol}(\Delta(\Gamma))} \int_{\Delta(\Gamma)^\circ} G_\Phi(x) \text{vol}(dx)$$

On peut ainsi concrétiser la variable aléatoire  $Z$  comme la fonction  $G_\Phi$  définie sur le corps convexe  $\Delta(\Gamma)$  muni de sa tribu borélienne et la mesure de Lebesgue normalisée (pour être une mesure de probabilité).

Dans la suite, on applique le résultat à la situation décrite dans §4.2. On considère un schéma projectif et intègre  $X$  de dimension  $d \geq 1$  défini sur le corps  $k$  et un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible  $L$ . On fixe aussi un point rationnel régulier (dont on suppose

8. On dit qu'une suite de variables aléatoires  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $Z$  si la loi de  $Z_n$  converge faiblement vers celle de  $Z$ , i.e., pour toute fonction continue et bornée  $h$  sur  $\mathbb{R}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[h(Z_n)] = \mathbb{E}[h(Z)]$ , ou de façon équivalente, la fonction de répartition de  $Z_n$  converge vers celle de  $Z$  en tout point  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbb{P}(Z = x) = 0$ .

9. L'ensemble  $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Delta(\Gamma_\Phi^t)$  est convexe et son volume est égal à  $\text{vol}(\Delta(\Gamma))$ , donc il contient  $\Delta(\Gamma)^\circ$ .

l'existence)  $x \in X(k)$ , un système de paramètres  $(z_1, \dots, z_d)$  et une relation d'ordre monomiale sur  $\mathbb{N}^d$ . Soit en outre  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $L$  dont le semi-groupe d'Okounkov  $\Gamma(V_\bullet)$  vérifie<sup>(10)</sup> les trois conditions présentées au début du sous-paragraphe. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on munit l'espace vectoriel  $V_n$  de deux normes  $\varphi_n$  et  $\psi_n$ , qui sont ultramétriques lorsque  $k$  est non-archimédien.

**Théorème 4.5.** — *On suppose que les normes  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  vérifient les conditions suivantes :*

- (1) *le système de normes  $(\varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sous-multiplicatif, i.e., satisfait à la condition (28) ;*
- (2) *on a  $d(\varphi_n, \psi_n) = O(n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  ;*
- (3) *il existe une constante  $C > 0$  telle que<sup>(11)</sup>  $\inf_{\alpha \in \Gamma(V_n)} \ln \|s_{(n,\alpha)}\|_{\hat{\varphi}_n} \geq -Cn$  quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ .*

*Alors la suite  $(\frac{1}{n}\widehat{\mu}(V_n, \varphi_n, \psi_n))_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* — On introduit des normes monomiales auxiliaires  $\eta_n$  comme dans §4.2. Soit  $\Phi : \Gamma(V_\bullet) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction qui envoie  $(n, \alpha) \in \Gamma(V_\bullet)$  en  $\widehat{\deg}(\text{gr}^\alpha(V_n), \varphi_n, \eta_n)$ . C'est une fonction sur-additive. La condition (3) montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in V_n} \frac{1}{n} \Phi(n, \alpha) < +\infty.$$

On désigne par  $Z_{\Phi,n} = \Phi(n, \cdot)$  la variable aléatoire sur  $\Gamma(V_n)$  (munie de la mesure de probabilité équirépartie). D'après le théorème 4.3, on obtient que la suite de variables aléatoires  $(Z_{\Phi,n}/n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $Z_\Phi$  définie sur  $\Delta(\Gamma(V_\bullet))$  (comme dans la remarque 4.4). De façon similaire, les conditions (2) et (3) montrent que la condition (3) est aussi satisfaite par les normes  $\hat{\psi}_n$ . Si on désigne par  $\Psi : \Gamma(V_\bullet) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction qui envoie  $(n, \alpha) \in \Gamma(V_\bullet)$  en  $\widehat{\deg}(\text{gr}^\alpha(V_n), \psi_n, \eta_n)$  et par  $Z_{\Psi,n} = \Psi(n, \cdot)$  la variable aléatoire sur  $\Gamma(V_n)$ , où  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , alors la suite de variables aléatoires  $(Z_{\Psi,n}/n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $Z_\Psi$  définie sur  $\Delta(\Gamma(V_\bullet))$ . En outre, la condition (2) montre que la fonction  $|Z_\Phi - Z_\Psi|$  est bornée sur  $\Delta(\Gamma(V_\bullet))^\circ$ .

D'après la relation (29) et l'égalité

$$\widehat{\deg}(\text{gr}^\alpha(V_n), \varphi_n, \psi_n) = \widehat{\deg}(\text{gr}^\alpha(V_n), \varphi_n, \eta_n) - \widehat{\deg}(\text{gr}^\alpha(V_n), \psi_n, \eta_n),$$

pour établir le résultat annoncé dans le théorème, il suffit de montrer que la suite  $(\mathbb{E}[Z_{\Phi,n}/n] - \mathbb{E}[Z_{\Psi,n}/n])_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{R}$ . La condition (2) du théorème montre

10. Ces trois conditions sont satisfaites notamment quand  $V_\bullet$  contient un diviseur ample, autrement dit,  $V_n \neq \{0\}$  lorsque  $n$  est assez grand, et il existe un entier  $p \geq 1$ , un  $\mathcal{O}_X$ -module ample  $A$  et une section globale non-nulle  $s$  de  $pL - A$ , tels que

$$\text{Im}(H^0(X, nA) \xrightarrow{\cdot s^n} H^0(X, npL)) \subset V_{np}$$

quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . On renvoie les lecteurs dans [13, lemme 2.12] pour une preuve.

11. Voir §4.2 pour les notations.

que les fonctions  $\frac{1}{n}|Z_{\Phi,n} - Z_{\Psi,n}|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont uniformément bornée. Soit  $A > 0$  une constante telle que

$$\forall n \geq 1, \quad |Z_{\Phi,n} - Z_{\Psi,n}| \leq An.$$

Comme  $(Z_{\Phi,n}/n)_{n \geq 1}$  et  $(Z_{\Psi,n}/n)_{n \geq 1}$  convergent en loi vers  $Z_{\Phi}$  et  $Z_{\Psi}$  respectivement, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $T_0 > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall T \geq T_0, \forall n \geq n_0, \quad \mathbb{P}(Z_{\Phi,n} \leq -nT) < \varepsilon \text{ et } \mathbb{P}(Z_{\Psi,n} \leq -nT) < \varepsilon.$$

On obtient ainsi

$$(33) \quad \begin{aligned} & |\mathbb{E}[Z_{\Phi,n}/n] - \mathbb{E}[Z_{\Psi,n}/n] - \mathbb{E}[\max(Z_{\Phi,n}/n, -T)] + \mathbb{E}[\max(Z_{\Psi,n}/n, -T)]| \\ & \leq 2\varepsilon \mathbb{E}[|Z_{\Phi,n}/n - Z_{\Psi,n}/n|] \leq 2\varepsilon A \end{aligned}$$

dès que  $T \geq T_0$  et  $n \geq n_0$ . En outre, comme les variables aléatoires  $Z_{\Phi,n}/n$  et  $Z_{\Psi,n}/n$  sont uniformément bornée supérieurement, la convergence en loi des suites  $(Z_{\Phi,n}/n)_{n \geq 1}$  et  $(Z_{\Psi,n}/n)_{n \geq 1}$  montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\max(Z_{\Phi,n}/n, -T)] - \mathbb{E}[\max(Z_{\Psi,n}/n, -T)] = \mathbb{E}[\max(Z_{\Phi}, -T) - \max(Z_{\Psi}, -T)].$$

De plus, comme la fonction  $|Z_{\Phi} - Z_{\Psi}|$  est bornée, le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\max(Z_{\Phi}, -T) - \max(Z_{\Psi}, -T)] = \mathbb{E}[Z_{\Phi} - Z_{\Psi}].$$

La relation (33) montre alors que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}[Z_{\Phi,n}/n] - \mathbb{E}[Z_{\Psi,n}/n] - \mathbb{E}[Z_{\Phi} - Z_{\Psi}]| \leq 2\varepsilon A.$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \widehat{\mu}(V_n, \varphi_n, \psi_n) = \mathbb{E}[Z_{\Phi} - Z_{\Psi}].$$

□

La condition (3) dans le théorème précédent est satisfaite notamment lorsque les normes  $\varphi_n$  proviennent d'une métrique continue sur le  $\mathcal{O}_X$ -module inversible  $L$ . Pour cela il faut considérer une relation d'ordre monomiale  $\leq$  sur  $\mathbb{N}^d$  telle que<sup>(12)</sup>  $\alpha_1 + \dots + \alpha_d < \beta_1 + \dots + \beta_d$  implique  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) < (\beta_1, \dots, \beta_d)$ . Soient  $X^{\text{an}}$  l'espace analytique associé au  $k$ -schéma  $X$  (au sens de Berkovich [1] si  $k$  est non-archimédien) et  $L^{\text{an}}$  le tire en arrière de  $L$  sur  $X^{\text{an}}$ . On désigne par  $\mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^0$  le faisceau d'anneaux des fonctions continues à valeurs réelles sur  $X^{\text{an}}$ . Par *métrique continue* sur  $L$  on entend un morphisme de faisceaux d'ensembles  $\|\cdot\|$  de  $L^{\text{an}} \otimes \mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^0$  vers  $\mathcal{C}_{X^{\text{an}}}^0$  qui induit pour chaque point  $x \in X^{\text{an}}$  une norme  $\|\cdot\|(x)$  sur la fibre  $L^{\text{an}}(x)$ . Étant donnée une métrique continue  $\varphi$  sur  $X$ , on peut munir  $H^0(X, L)$  de la norme sup  $\|\cdot\|_{\varphi, \text{sup}}$  telle que

$$\forall s \in H^0(X, L), \quad \|s\|_{\varphi, \text{sup}} := \sup_{x \in X^{\text{an}}} \|s\|_{\varphi}(x).$$

12. Dans le cas où  $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = \beta_1 + \dots + \beta_d$  on peut considérer l'ordre lexicographique par exemple.

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , la métrique  $\varphi$  induit par passage au produit tensoriel une métrique continue  $\varphi^{\otimes n}$  sur  $nL$ . Si on désigne par  $\varphi_n$  la norme sup sur  $H^0(X, nL)$  induite par  $\varphi^{\otimes n}$  (ou sa restriction à  $V_n$ , par abus de langage), alors le système de normes  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  satisfait à la condition (3) du théorème 4.5. C'est une conséquence du lemme de Schwarz (complexe ou non-archimédien, cf. [8, pp.205-206]). On obtient ainsi le corollaire suivant.

**Corollaire 4.6.** — *Soient  $X$  un schéma projectif et intègre défini sur le corps  $k$  et  $L$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible, muni de deux métriques continue  $\varphi$  et  $\psi$ . Soit  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $L$ , tel que  $\Gamma(V_\bullet)$  satisfasse aux conditions (a)–(c) présentées au début du sous-paragraphe. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , soient  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  les normes sup sur  $V_n$  associées aux métriques  $\varphi^{\otimes n}$  et  $\psi^{\otimes n}$  respectivement. Alors la suite  $(\widehat{\mu}(V_n, \varphi_n, \psi_n)/n)_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* — Le système de normes  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  est sous-multiplicatif. En effet, si  $s$  et  $s'$  sont des éléments de  $V_n$  et  $V_m$  respectivement, on a

$$\begin{aligned} \|s \otimes s'\|_{\varphi_{n+m}} &= \sup_{x \in X^{\text{an}}} \|s \otimes s'\|_{\varphi^{\otimes(n+m)}}(x) \\ &\leq \left( \sup_{x \in X^{\text{an}}} \|s\|_{\varphi^{\otimes n}}(x) \right) \cdot \left( \sup_{x \in X^{\text{an}}} \|s'\|_{\varphi^{\otimes m}}(x) \right) = \|s\|_{\varphi_n} \cdot \|s'\|_{\varphi_m}. \end{aligned}$$

De même on peut vérifier que le système de normes  $(\psi_n)_{n \geq 0}$  est aussi sous-multiplicatif. En outre, comme l'espace topologique  $X^{\text{an}}$  est compact, on obtient

$$\sup_{x \in X^{\text{an}}} d(\|\cdot\|_{\varphi}(x), \|\cdot\|_{\psi}(x)) < +\infty.$$

Ainsi  $d(\varphi_n, \psi_n) = O(n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Enfin, comme les normes  $\varphi_n$  satisfont à la condition (3) du théorème 4.5, on obtient la convergence de  $(\widehat{\mu}(V_n, \varphi_n, \psi_n)/n)_{n \geq 1}$  en appliquant le théorème.  $\square$

**Remarque 4.7.** — Ce résultat peut être comparé à un travail de Witt Nyström [16, théorème 1.4]. Toutes ces deux approches utilisent la base monomiale pour construire des fonctions sur(sous)-additive sur le semi-groupe d'Okounkov. Cependant, la méthode de [16] repose sur la comparaison entre la métrique  $L^2$  et la métrique sup ; tandis qu'ici on applique le formalisme de Harder-Narasimhan. Cette nouvelle approche a une grande souplesse et permet d'établir le résultat dans un cadre très général de système linéaire sous-multiplicativement normé sous des conditions modérées, qui est valable à la fois dans les cas complexe et non-archimédien.

## 5. Répartition asymptotique des spectres logarithmiques

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème principal.

**5.1. Un critère de convergence.** — Dans ce sous-paragraphe, on démontre un critère de convergence. Si  $x$  est un nombre réel, on utilise l'expression  $x_+$  pour désigner  $\max(x, 0)$ .

**Proposition 5.1.** — Soit  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires uniformément bornées. On suppose que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la suite  $(\mathbb{E}[(Z_n - t)_+])_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{R}$ . Alors la suite de variables aléatoires  $(Z_n)_{n \geq 1}$  converge en loi.

*Démonstration.* — Soit  $h$  une fonction lisse à support compact. On a

$$\mathbb{E}[h(Z_n)] = - \int_{\mathbb{R}} h(t) d\mathbb{P}(Z_n \geq t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Z_n \geq t) h'(t) dt,$$

où la deuxième égalité provient de l'intégration par partie. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_a^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geq t) dt = \mathbb{E}[(Z_n - a)_+].$$

Donc on obtient

$$\mathbb{E}[h(Z_n)] = - \int_{\mathbb{R}} h'(t) d\mathbb{E}[(Z_n - t)_+] = \int_{\mathbb{R}} h''(t) \mathbb{E}[(Z_n - t)_+] dt.$$

Comme les variables aléatoires  $Z_n$  sont uniformément bornées, le théorème de convergence dominée montre que la suite  $(\mathbb{E}[h(Z_n)])_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $I(h)$  sa limite. La fonctionnelle  $I(\cdot)$  est continue par rapport à la norme sup sur l'espace des fonctions lisses à support compact. Donc elle s'étend par continuité en une forme linéaire positive sur l'espace des fonctions continues à support compact, donc définit une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}$ . Enfin, comme les variables aléatoires  $Z_n$  sont uniformément bornées, on obtient que  $I(\cdot)$  est une mesure de probabilité borélienne sur  $\mathbb{R}$ . Le résultat est ainsi démontré.  $\square$

**5.2. Répartition asymptotique des spectres.** — Dans la suite, on fixe un corps valué  $k$  qui est ou bien  $\mathbb{C}$  muni de sa valeur absolue usuelle, ou bien un corps non-archimédien complet. Soit  $X$  un schéma projectif intègre de dimension  $d \geq 1$  défini sur  $k$ , qui possède un point rationnel régulier. Le but du sous-paragraphe est de démontrer le théorème suivant (cf. §2.3 et §3.2 pour les notations).

**Théorème 5.2.** — Soient  $L$  un  $\mathcal{O}_X$ -module inversible et  $V_\bullet$  un système linéaire gradué de  $L$ , dont le semi-groupe d'Okounkov vérifie les conditions (a)–(c) présentées dans §4.3. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux métriques continues sur  $L$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , soient  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  les normes sup sur  $V_n$  induites par les métriques produit tensoriel  $\varphi^{\otimes n}$  et  $\psi^{\otimes n}$  respectivement. Alors,

- (1) la suite de variables aléatoires  $(\frac{1}{n}Z_{(V_n, \varphi_n, \psi_n)})_{n \geq 1}$  converge en loi vers une mesure de probabilité borélienne sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) la suite de polygones  $(P_{(V_n, \varphi_n, \psi_n)})_{n \geq 1}$  converge uniformément vers une fonction concave sur  $[0, 1]$ ;

*Démonstration.* — Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , on utilise l'expression  $Z_n$  pour désigner la variable aléatoire  $\frac{1}{n}Z_{(V_n, \varphi_n, \psi_n)}$ . On a

$$|Z_n| \leq \sup_{x \in X^{\text{an}}} d(\|\cdot\|_\varphi(x), \|\cdot\|_\psi(x))$$

quel que soit  $n \geq 1$ . Donc la suite de variables aléatoires  $(Z_n)_{n \geq 1}$  est uniformément bornée. D'après [9, proposition 1.2.9], le deuxième énoncé est une conséquence du premier.

Dans la suite, on établit le premier énoncé en utilisant le critère de convergence démontré dans les propositions 5.1 et le résultat de limite démontré dans le corollaire 4.6. Pour tout paramètre réel  $a$ , on désigne par  $\varphi(a)$  la métrique continue sur  $L$  telle que

$$\forall x \in X^{\text{an}}, \quad \|\cdot\|_{\varphi(a)}(x) = e^a \|\cdot\|_{\varphi}(x).$$

Soit en outre  $\psi \vee \varphi(a)$  la métrique sur  $L$  telle que

$$\forall x \in X^{\text{an}}, \quad \|\cdot\|_{\psi \vee \varphi(a)}(x) = \max(\|\cdot\|_{\psi}(x), \|\cdot\|_{\varphi(a)}(x)).$$

Nous avons que la norme sup sur  $V_n$  associée à la métrique  $(\psi \vee \varphi(a))^{\otimes n}$  est  $\psi_n \vee \varphi_n(an)$ , suivant les notations introduites dans §2.5 ou §3.3. Le corollaire 4.6 appliqué à  $\varphi$  et  $\psi \vee \varphi(a)$  montre que la suite  $(\widehat{\mu}(V_n, \varphi_n, \psi_n \vee \varphi_n(na))/n)_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathbb{R}$ . En outre, d'après les propositions 2.8 et 3.8, on a

$$\left| \frac{1}{n} \widehat{\mu}(V_n, \varphi_n, \psi_n \vee \varphi_n(na)) - \mathbb{E}[(Z_n - a)_+] \right| \leq \frac{1}{n} A(r_n),$$

où  $r_n = \text{rg}(V_n)$  et

$$\forall r \in \mathbb{N}, r \geq 1, \quad A(r) := 2 \ln(r) + \frac{1}{2} \ln(2).$$

Comme  $r_n = O(n^d)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(r_n)/n = 0$ . On obtient donc la convergence de la suite  $(\mathbb{E}[(Z_n - a)_+]_{n \geq 1})$ . D'après la proposition 5.1, le résultat est démontré.  $\square$

**Remarque 5.3.** — Le résultat du théorème précédent est encore valable si on remplace  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  par des normes  $\varphi'_n$  et  $\psi'_n$  telles que

$$\max(d(\varphi_n, \varphi'_n), d(\psi_n, \psi'_n)) = o(n), \quad n \rightarrow +\infty,$$

et les lois limite sont la même. En effet, si on désigne par  $Z'_n$  la variable aléatoire  $\frac{1}{n} Z_{(V_n, \varphi'_n, \psi'_n)}$ , alors pour tout  $a \in \mathbb{R}$  on a

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[(Z_n - a)_+] - \mathbb{E}[(Z'_n - a)_+] \right| \\ & \leq \frac{1}{n} \left| \widehat{\mu}(V_n, \varphi_n, \psi_n \vee \varphi_n(an)) - \widehat{\mu}(V_n, \varphi'_n, \psi'_n \vee \varphi_n(an)) \right| + \frac{1}{n} A(r_n) \\ & \leq \frac{1}{n} (d(\varphi_n, \varphi'_n) + d(\psi_n, \psi'_n) + A(r_n)). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(Z'_n - a)_+] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(Z_n - a)_+].$$

Cette observation nous permet notamment d'appliquer le théorème aux normes  $L^2$  dans le cas où  $k$  est le corps des nombres complexe -voir, par exemple, Lemme 3.2 de [2].

**Remerciements.** — Nous sommes reconnaissants à Sébastien Boucksom pour avoir tiré notre attention à l'article [3] de Berndtsson.

## Références

- [1] V. G. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [2] R. BERMAN & S. BOUCKSOM – « Growth of balls of holomorphic sections and energy at equilibrium », *Inventiones Mathematicae* **181** (2010), no. 2, p. 337–394.
- [3] B. BERNDTSSON – « Probability measures associated to geodesic in the space of Kähler metrics », prépublication, 2009.
- [4] J.-B. BOST – « Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d’après D. Masser et G. Wüstholz) », *Astérisque* (1996), no. 237, p. Exp. No. 795, 4, 115–161, Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/1995.
- [5] S. BOUCKSOM – « Corps d’okounkov (d’après Andri Okounkov, Robert Lazarsfeld et Mircea Mustață, Kiumars Kavech et Askold Khovanskii) », Séminaire Bourbaki, Vol. 2011/2012, à paraître.
- [6] S. BOUCKSOM & H. CHEN – « Okounkov bodies of filtered linear series », *Compositio Mathematica* **147** (2011), no. 4, p. 1205–1229.
- [7] N. BOURBAKI – *Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5*, new éd., Masson, Paris, 1981, Éléments de mathématique.
- [8] A. CHAMBERT-LOIR – « Théorèmes d’algébricité en géométrie diophantienne (d’après J.-B. Bost, Y. André, D. & G. Chudnovsky) », *Astérisque* (2002), no. 282, p. Exp. No. 886, viii, 175–209, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.
- [9] H. CHEN – « Convergence des polygones de Harder-Narasimhan », *Mémoires de la Société Mathématique de France* **120** (2010), p. 1–120.
- [10] \_\_\_\_\_, « Harder-Narasimhan categories », *Journal of Pure and Applied Algebra* **214** (2010), no. 2, p. 187–200.
- [11] D. EISENBUD – *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry.
- [12] É. GAUDRON – « Pentès de fibrés vectoriels adéliques sur un corps globale », *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **119** (2008), p. 21–95.
- [13] R. LAZARSFELD & M. MUSTAȚĂ – « Convex bodies associated to linear series », *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Quatrième Série* **42** (2009), no. 5, p. 783–835.
- [14] A. OKOUNKOV – « Brunn-Minkowski inequality for multiplicities », *Inventiones Mathematicae* **125** (1996), no. 3, p. 405–411.
- [15] A. C. THOMPSON – *Minkowski geometry*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [16] D. WITT NYSTRÖM – « Transforming metrics on a line bundle to the okounkov body », prépublication, 2011.

---

21 avril 2013

HUAYI CHEN, Institut Fourier, Université Joseph Fourier – Grenoble I

CATRIONA MACLEAN, Institut Fourier, Université Joseph Fourier – Grenoble I