



**HAL**  
open science

## Sur un problème de normes de racines

Julien Puydt

► **To cite this version:**

| Julien Puydt. Sur un problème de normes de racines. 2013. hal-00816232

**HAL Id: hal-00816232**

**<https://hal.science/hal-00816232>**

Preprint submitted on 20 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur un problème de normes de racines

J. Puydt

20 avril 2013

## Résumé

Le but de l'article est de répondre à un problème qui circule actuellement parmi les enseignants de CPGE et certains jury de concours, concernant les solutions complexes d'un système du type suivant, où  $n \geq 2$  est fixé :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^n + b^n + c^n = 0 \end{cases}$$

La question est : existe-t-il des solutions dont les modules sont tous différents ? La réponse apportée dans ce texte est qu'il n'en existe pas (à part bien sûr le triplet  $(0; 0; 0)$  !).

## 1 Introduction

On va traiter le problème en plusieurs étapes, chacune apportant un peu plus d'information sur les solutions.

La première étape est de se placer dans le plan projectif complexe en section 2.1, ce qui permet en section 3.1 de se ramener au cas d'un ensemble fini de cardinal connu.

La deuxième étape consiste à découper l'ensemble fini obtenu en différentes familles en section 2.2.1.

La troisième et dernière étape se décompose à son tour en plusieurs temps :

1. on étudie les familles les plus simples en sections 2.2.2 et 2.2.3,
2. on discute la question de la multiplicité en section 3.2
3. on n'obtient en section 4.2 qu'une minoration du nombre de solutions de la dernière famille introduite en section 2.2.4.

Heureusement, cette minoration est assez fine pour qu'un simple argument de dénombrement permette en section 5 de conclure que l'on a décrit toutes les solutions sans trouver de cas où tous les modules sont distincts.

## 2 Environnement

### 2.1 Plan projectif

Le système de départ est tel que si  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  est une solution, alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , le point  $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$  est aussi une solution.

Cette observation élémentaire conduit à éliminer le triplet  $(0, 0, 0)$ , et à identifier les triplets situés sur la même droite; si  $(a, b, c)$  est un triplet, on notera  $(a : b : c)$  l'ensemble suivant :

$$\{(\lambda a, \lambda b, \lambda c) | \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$$

En particulier, on a par exemple :  $(1 : 2 : 3) = (2 : 4 : 6)$ .

Pour la culture, l'ensemble des droites dans l'espace tel qu'on le considère ici est appelé le *plan projectif*, et cette façon de dénoter les points du plan projectif est le système de *coordonnées de Plücker*.

On est donc amené à considérer les solutions du système non pas comme un ensemble de points de l'espace, mais comme un ensemble de points du plan projectif. On verra que ce point de vue simplifie grandement la situation. Contentons-nous pour l'instant de remarquer que la propriété pour un triplet d'être composé de complexes de modules tous différents est conservée par tous les représentants d'un même point du plan projectif; le changement de point de vue ne complique pas la situation sous cet angle.

## 2.2 Action des permutations

### 2.2.1 Définition

Si on se donne un point du plan projectif  $x = (x_0 : x_1 : x_2)$  et  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\llbracket 0; 2 \rrbracket$ , alors  $(x_{\sigma(0)} : x_{\sigma(1)} : x_{\sigma(2)})$  est un autre point du plan projectif, que l'on notera  $\sigma.x$ . On obtient ainsi une *action* du groupe  $\mathcal{S}_3$  sur le plan projectif.

De plus, on remarque que si un point  $x$  satisfait le système qui nous intéresse, alors  $\sigma.x$  aussi, pour toute permutation  $\sigma$ . Le groupe  $\mathcal{S}_3$  agit donc sur nos solutions.

Rappelons un peu de vocabulaire et résultats sur les actions de groupes :

- si on fixe le point  $x$  et que l'on fait varier  $\sigma$ , on obtient une partie de l'espace, appelée l'*orbite* du point;
- si on fixe le point  $x$  et que l'on considère l'ensemble des  $\sigma$  tels que  $\sigma.x = x$ , on obtient une partie du groupe appelée le *stabilisateur*, qui est même un sous-groupe;
- l'espace est l'union disjointe des orbites;
- si le groupe est fini, pour tout point  $x$ , son stabilisateur et son orbite sont finis et le produit de leurs cardinaux est le cardinal du groupe.

Dans le cas qui nous intéresse, le cardinal du groupe est 6, donc les orbites ont comme cardinaux possibles 1, 2, 3 et 6 uniquement. On va étudier successivement ces possibilités.

Déjà, un point  $(a : b : c)$  dont l'orbite est de cardinal 1 est nécessairement de la forme  $(a : a : a)$ , et un tel point ne peut pas être solution du système (rappelons que l'on a écarté le triplet  $(0; 0; 0)$ !). Il ne reste donc que trois cas à détailler.

### 2.2.2 Solutions triviales

Si l'orbite d'un point  $(a : b : c)$  solution du système est de cardinal 3, alors son stabilisateur est de cardinal 2, donc engendré par un élément de  $\mathcal{S}_3$  d'ordre 2, c'est-à-

dire une transposition.<sup>1</sup>

Supposons que l'effet de cette transposition soit :  $(a : b : c) = (a : c : b)$ . Il existe alors un nombre complexe  $\lambda$  non nul tel que :

$$\begin{cases} a &= \lambda a \\ b &= \lambda c \\ c &= \lambda b \end{cases}$$

Si  $a = 0$ , alors l'équation  $a + b + c = 0$  permet de dire  $c = -b$  (et non nuls car on exclut toujours le triplet nul), et l'équation  $a^n + b^n + c^n = 0$  devient alors  $[1 + (-1)^n]b^n = 0$  avec  $b \neq 0$ , ce qui n'est possible que si  $n$  est impair.

Si  $a \neq 0$ , alors  $\lambda = 1$  et  $b = c$ ; l'équation  $a + b + c = 0$  fournit  $a = -2b$  (au passage on voit que  $b$  est non nul) et l'équation  $a^n + b^n + c^n = 0$  devient  $[2 + (-2)^n]b^n = 0$ , qui est impossible.

Finalement, si on prend en compte les situations obtenues pour les autres transpositions possibles, on voit que l'on a prouvé :

**Proposition 1** *L'ensemble des points qui sont solution du système et dont l'orbite est de cardinal 3 est vide si  $n$  est pair, et est constitué d'une seule orbite si  $n$  est impair :*

$$\{(0 : 1 : -1); (1 : 0 : -1); (1 : -1 : 0)\}$$

Chacun de ces points est stable par le sous-groupe engendré par une des trois transpositions de  $\mathcal{S}_3$ .

On parlera de solutions triviales.

### 2.2.3 Solutions cyclotomiques

Supposons maintenant que l'orbite d'un point  $(a : b : c)$  solution du système soit de cardinal 2; son stabilisateur est alors de cardinal 3, donc un 3-cycle, donc engendré par (120) ou par (102).

Supposons :  $(a : b : c) = (b : c : a)$  pour fixer les idées; comme précédemment, il existe alors un nombre complexe  $\lambda$  non nul tel que :

$$\begin{cases} a &= \lambda b \\ b &= \lambda c \\ c &= \lambda a \end{cases}$$

Une remarque immédiate est que ce système force  $abc \neq 0$ , car si l'un était nul, tous le seraient, ce que l'on a exclu. L'équation  $a + b + c = 0$  devient alors  $(\lambda^2 + \lambda + 1)a = 0$ . On en déduit que  $\lambda$  est l'un de  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  ou  $j^2$ . L'équation  $a^n + b^n + c^n = 0$  fournit maintenant  $1 + j^n + j^{2n} = 0$ ; cette égalité est fautive si  $n$  est divisible par 3 et vraie sinon.

Finalement, si on prend en compte la situation obtenue pour l'autre 3-cycle, on voit que l'on a prouvé :

---

1. Dans  $\mathcal{S}_4$ , une telle conclusion serait fautive comme le montre la permutation (01)(23).

**Proposition 2** *L'ensemble des points qui sont solution du système et dont l'orbite est de cardinal 2 est vide si  $n$  est un multiple de 3, et est constitué d'une seule orbite sinon :*

$$\{(1 : j : j^2); (1 : j^2 : j)\}$$

*Chacun de ces points est stable par le sous-groupe engendré par un des 3-cycles de  $S_3$ .*

### 2.2.4 Héxaorbites

Le cas des points dont l'orbite est de cardinal 6 est le plus délicat, et on n'en fera pas une étude complète tout de suite. On va se contenter d'appeler ces orbites "héxaorbites", et de les découper en deux familles :

- les normales, dont tous les représentants ont deux coordonnées de même module ;
- les exceptionnelles, dont tous les représentants ont des coordonnées de modules tous distincts.

L'objectif est de montrer qu'il n'y a pas d'héxaorbite exceptionnelle !

## 3 Finitude et multiplicités

### 3.1 Nombre de solutions

Considérons une solution du système dont  $(1; b; c)$  est un représentant. La première équation fournit  $c = -1 - b$  et la seconde devient  $1 + b^n + (-1 - b)^n = 0$ .  $b$  est donc une racine du polynôme  $Q_n = 1 + X^n + (-1 - X)^n$ . Si  $n$  est pair, il est de degré  $n$  et a  $n$  solutions.

Si  $n$  est impair, ce polynôme est de degré  $n - 1$  et a  $n - 1$  solutions. Mais on sait que  $(0 : 1 : -1)$  est aussi une solution du système, qui n'a pas de représentant de la forme  $(1; b; c)$ .

Finalement, on a prouvé :

**Proposition 3** *Le système a toujours un nombre fini de solutions dans le plan projectif; et il y en a toujours  $n$ , comptées avec multiplicité.*

On voit là l'intérêt du passage au plan projectif : on travaille dans un ensemble fini !

Remarquons aussi que si l'on a raisonné ci-dessus avec une disjonction de cas sur la nullité ou non de la première composante, toute orbite contient un représentant de la forme  $(1; b; c)$ , donc  $Q_n$  permet d'étudier toutes les orbites.

### 3.2 Multiplicité

On remarque assez facilement les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} nQ_n - XQ'_n &= n[1 - (-1 - X)^{n-1}] \\ Q_n(-1 - X) &= Q_n(X) \end{cases}$$

De la première, on déduit que si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est une racine multiple de  $Q_n$ , alors  $-1-\alpha$  est une racine  $(n-1)$ -ème de l'unité. De la seconde, on déduit que  $\alpha$  aussi est nécessairement une racine  $(n-1)$ -ème de l'unité.

Mais la transformation du plan  $z \mapsto -1-z$  est la symétrie par rapport à la droite  $\Re(z) = -1/2$ , et en considérant le cercle trigonométrique et son image par cette application, on voit que le seul cas pour lequel un point et son image sont sur le cercle simultanément ne se produit que pour  $j$  et  $j^2$ . Par symétrie, seul le cas  $j$  est à discuter.

On calcule aisément :

$$Q_n(j) = 1 + j^n + (j^n)^2 = \begin{cases} 3 & (n \equiv 0[3]) \\ 0 & (n \equiv 1[3]) \\ 0 & (n \equiv 2[3]) \end{cases}$$

puis :

$$Q'_n(j) = n[j^{n-1} - (j^{n-1})^2] = \begin{cases} n(j^2 - j) & (n \equiv 0[3]) \\ 0 & (n \equiv 1[3]) \\ n(j - j^2) & (n \equiv 2[3]) \end{cases}$$

et finalement :

$$Q''_n(j) = n(n-1)[j^{n-2} + (j^{n-2})^2] = \begin{cases} -n(n-1) & (n \equiv 0[3]) \\ -n(n-1) & (n \equiv 1[3]) \\ 2n(n-1) & (n \equiv 2[3]) \end{cases}$$

On a donc prouvé :

**Proposition 4** *Les solutions cyclotomiques sont les seules qui peuvent être éventuellement multiples, et :*

- si  $n \equiv 0[3]$ , elles ne sont pas solution ;
- si  $n \equiv 1[3]$ , elles sont doubles ;
- si  $n \equiv 2[3]$ , elles sont simples.

## 4 Héxaorbites normales

### 4.1 Le polynôme caractéristique

Considérons une héxaorbite normale, dont on choisit un représentant de la forme  $(1 : b : c)$  ; on a donc  $|b| = |c| = \rho > 0$ . De l'équation  $1 + b + c = 0$ , on déduit en considérant la partie imaginaire que les parties imaginaires de  $b$  et  $c$  sont opposées, ce qui compte tenu de l'égalité de leurs modules signifie qu'ils sont conjugués. Leur partie réelle commune est donc  $-1/2$  et on peut supposer que  $b$  est de partie imaginaire strictement positive ; il existe donc  $\theta$  dans l'intervalle  $]\pi/2, \pi]$  tel que :

$$\begin{cases} b &= \rho e^{i\theta} \\ c &= \rho e^{-i\theta} \end{cases}$$

L'équation  $1 + b^n + c^n = 0$  montre que  $1 + 2\rho^n \cos(n\theta) = 0$ , ce qui compte tenu de la relation  $\rho \cos(\theta) = -1/2$  montre que l'on a :

$$\cos(n\theta) + (-1)^n 2^{n-1} \cos(\theta)^n = 0$$

Si on note  $T_n$  le  $n$ -ème polynôme de Tchebyshev, la relation ci-dessus affirme que  $\cos(\theta)$  est nécessairement une racine réelle dans  $[-1; 0[$  du polynôme :

$$C_n = T_n + \frac{(-1)^n}{2}(2X)^n$$

Réciproquement, toute racine de ce type permet de reconstruire une héxaorbite normale; pour prouver s'il existe ou non des héxaorbites exceptionnelles, il suffit donc de dénombrer ces solutions réelles pour conclure.

Ce polynôme est donc caractéristique des héxaorbites normales.

## 4.2 Minoration du nombre de racines

Si  $k \in \mathbb{Z}$ , on remarque que l'encadrement :

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{k\pi}{n} \leq \frac{2\pi}{3}$$

équivaut à  $n \leq 2k$  et  $3k \leq 2n$ . Si  $n$  est de la forme  $6m + u$  avec  $u \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ , cela équivaut à :

- si  $u = 0$ , alors  $k \in \llbracket 3m, 4m \rrbracket$ ;
- si  $u = 1$ , alors  $k \in \llbracket 3m + 1, 4m \rrbracket$ ;
- si  $u = 2$ , alors  $k \in \llbracket 3m + 1, 4m + 1 \rrbracket$ ;
- si  $u = 3$ , alors  $k \in \llbracket 3m + 1, 4m + 2 \rrbracket$ ;
- si  $u = 4$ , alors  $k \in \llbracket 3m + 2, 4m + 2 \rrbracket$ ;
- si  $u = 5$ , alors  $k \in \llbracket 3m + 3, 4m + 3 \rrbracket$ .

Si on suppose que  $k$  est dans un de ces intervalles, on a alors :

$$\begin{aligned} C_n \left( \cos \left( \frac{k\pi}{n} \right) \right) &= T_n \left( \cos \left( \frac{k\pi}{n} \right) \right) + \frac{(-1)^n}{2} \left( 2 \cos \left( \frac{k\pi}{n} \right) \right)^n \\ &= \cos(k\pi) + \frac{(-1)^n}{2} \left( 2 \cos \left( \frac{k\pi}{n} \right) \right)^n \\ &= (-1)^k + \frac{(-1)^n}{2} \left( 2 \cos \left( \frac{k\pi}{n} \right) \right)^n \end{aligned}$$

expression dans laquelle le signe du premier terme varie avec  $k$  et l'encadrement sur  $k$  assure que le second terme est dominé par  $1/2$ , donc ne change pas le signe.

On met ainsi en évidence autant de changements de signes de  $C_n$  que la largeur de l'intervalle entier. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (par continuité), on en déduit que  $C_n$  a autant de racines dans  $] -1/2; 0[$  que cette largeur moins un.

On a prouvé la minoration suivante du nombre de racines :

**Proposition 5** *Si  $n = 6m + u$  avec  $u \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ , alors  $C_n$  a dans l'intervalle  $] -1/2; 0[$  au moins :*

- $m$  racines si  $u \neq 1$ ;
- $m - 1$  racines si  $u = 1$ .

## 5 Conclusion

On a mis en évidence l'existence d'un certain nombre de solutions du problème initial; mais comme on avait auparavant calculé le nombre maximal de solutions, il s'avère que la liste obtenue est exhaustive :

**Théorème 1** *Si  $n \geq 2$  s'écrit  $6m + u$  avec  $u \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$ , alors le système :*

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^n + b^n + c^n = 0 \end{cases}$$

*vu comme décrivant un ensemble de points du plan projectif sur  $\mathbb{C}$ , a pour solutions :*

- *si  $u = 0$ ,  $m$  héxaorbites normales ;*
- *si  $u = 1$ ,  $m - 1$  héxaorbites normales, trois solutions triviales simples et deux solutions cyclotomiques doubles ;*
- *si  $u = 2$ ,  $m$  héxaorbites normales et deux solutions cyclotomiques simples ;*
- *si  $u = 3$ ,  $m$  héxaorbites normales et trois solutions triviales simples ;*
- *si  $u = 4$ ,  $m$  héxaorbites normales et deux solutions cyclotomiques doubles ;*
- *si  $u = 5$ ,  $m$  héxaorbites normales, trois solutions triviales simples et deux solutions cyclotomiques simples.*

*En particulier, il n'existe pas d'héxaorbite exceptionnelle.*