



**HAL**  
open science

**Un exemple d'application des mathématiques à  
l'environnement littoral: La dynamique à long terme  
des dunes marines dans les zones soumises à la marée.  
Modélisation, Analyse, Homogénéisation et Simulation**

Emmanuel Frenod

► **To cite this version:**

Emmanuel Frenod. Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral: La dynamique à long terme des dunes marines dans les zones soumises à la marée. Modélisation, Analyse, Homogénéisation et Simulation. Matapli, 2013, pp.129 –140. hal-00816149

**HAL Id: hal-00816149**

**<https://hal.science/hal-00816149>**

Submitted on 20 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un exemple d'application des mathématiques à  
l'environnement littoral :  
La dynamique à long terme des dunes marines dans les zones  
soumises à la marée.  
Modélisation, Analyse, Homogénéisation et Simulation

Emmanuel Frénod \*

20 avril 2013

## 1 Motivations

Les environnements littoraux sont le lieu de multiples interfaces : interface entre océan et continent, interface entre eau salée et eau douce, interface entre vie marine et vie terrestre et interface entre un milieu hostile à l'homme et son milieu naturel. Cela leur confère une grande importance. Nous pensons à leur importance économique : pêche, aquaculture, zones portuaires et tourisme. De plus, une proportion importante de l'humanité vit à proximité des mers et des océans. Ainsi, les questions d'envasement, d'ensablement, d'érosion et de niveau des océans concernent fortement l'activité des sociétés. Sur un plan plus fondamental, comme cela est expliqué dans Guélorget & Perthuisot [12], ces environnements furent le lieu de l'émergence de la vie et sont toujours celui de certaines de ses évolutions les plus importantes.

Les comprendre, pour les protéger, pour agir sur eux, pour en tirer un profit, pour s'en protéger ou pour comprendre les origines et les évolutions de la vie est donc un des enjeux majeurs des années à venir.

## 2 Difficultés

La modélisation est un outil important pour ouvrir la voie à la compréhension des environnements littoraux.

Une analyse naïve pourrait aboutir à la conclusion que la modélisation des environnements littoraux est une tâche aisée car ne consisterait qu'en une superposition de couches de modèles bien connus : une couche pour la dynamique de l'eau, une autre pour l'évolution des sédiments et une troisième pour la biologie. Une analyse plus attentive révèle que cette

---

\*LMBA (UMR CNRS 6205), Université de Bretagne-Sud & Inria Nancy-Grand Est, Équipe-Projet : Calvi/Tonus.

analyse naïve est essentiellement non pertinente. En effet, d’une part, certains phénomènes fondamentaux importants ayant lieu dans les environnements littoraux ne sont pas bien décrits ni compris. D’autre part - et surtout, les phénomènes de chacune des couches sont en interaction forte les uns avec les autres, et la plupart de ces interactions ne sont absolument pas comprises. De plus, ils impliquent beaucoup d’échelles de temps et d’espace.

En conséquence, progresser dans la modélisation des environnements littoraux demande de combler les lacunes dans les modèles décrivant les phénomènes fondamentaux mal compris y ayant court. Ensuite, cela demande de construire des hiérarchies de modèles adaptées aux environnements littoraux permettant de filtrer les échelles en jeu et de quantifier les interactions ; en intégrant des démarches de modélisation mathématique, d’analyse asymptotique, d’analyse numérique et de calcul scientifique.

Le travail que nous présentons ici, qui concerne la dynamique des dunes sous-marines dans les océans côtiers soumis à la marée, est représentatif de ce que nous venons d’expliquer : Dans un premier temps, un modèle du transport de sable adapté à la situation visée a été déduit depuis un modèle de transport de sable connu par une démarche de modélisation mathématique. Ensuite, un résultat d’existence a été établi pour ce modèle. Cela a demandé l’établissement d’estimations concernant sa solution, qui sont le reflet de propriétés des phénomènes en jeu à l’échelle de temps qui nous intéresse. Puis, un résultat d’homogénéisation de ce modèle a été trouvé. Ce résultat amène une description qualitative de l’évolution des dunes. Il a également permis de développer une méthode numérique spécifique pour simuler l’évolution des dunes sous-marines à l’échelle de temps pertinente de leur évolution.

### 3 Modélisation

L’équation modélisant l’évolution d’un fond sableux sous l’action d’un courant est déduite de l’équation d’Exner (voir Van Rijn [17] et Idier [13]) et s’écrit :

$$\frac{\partial z'}{\partial t'} + \alpha \nabla \cdot \left[ \chi \left( D_G \rho \frac{|\mathbf{u}'|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \left( \frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|} - \lambda \nabla z' \right) \right] = 0. \quad (1)$$

Ici, les champs dépendent du temps  $t' \in [0, T')$ , pour  $T' > 0$ , de la position dans la direction horizontale  $x' = (x'_1, x'_2) \in \Omega$ , où  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^2$ . Le champ  $z' = z'(t', x')$  désigne l’altitude du fond en la position  $x$  et à l’instant  $t$ . Les opérateurs  $\nabla$  et  $\nabla \cdot$  désignent le gradient et la divergence. Le coefficient  $\alpha > 0$  est lié à la géométrie des grains de sable,  $D_G$  désigne leur diamètre et  $\rho$  est la densité de l’eau. La fonction  $\chi = \chi(\sigma)$  vaut 0 si  $\sigma < 0$  et  $|\sigma|^{3/2}$  si  $\sigma \geq 0$ . Le champ  $\mathbf{u}'$  désigne la vitesse de l’eau au voisinage du fond et  $u_c$  est la vitesse critique partir de laquelle le courant met en mouvement le sable considéré si le fond est plat. Le paramètre  $C$  vaut  $\ln(\frac{12d}{3D_G})$  où  $d$  est la hauteur d’eau au-dessus du fond et  $\lambda$  est l’inverse de la pente maximale (physiquement possible) des dunes de sable lorsque la vitesse de l’eau est nulle.

Cette équation traduit que, lorsqu’il y a un courant avec une vitesse suffisante, celui-ci transporte le sable et que ce transport est augmenté ou diminué par l’effet conjugué de la direction du courant et celle de la pente des dunes. Nous la prenons comme modèle de

référence, et nous commençons par l'adimensionner. Pour cela nous introduisons un temps caractéristique d'observation  $\bar{t}$  et une longueur caractéristique d'observation  $\bar{L}$  puis nous définissons les variables sans dimension  $t$  et  $x$  par

$$t' = \bar{t}t, \quad x' = \bar{L}x, \quad (2)$$

ce qui donne à  $\bar{t}$  et de  $\bar{L}$  le statut d'unité. Nous définissons également  $\bar{z}$  la hauteur caractéristique des dunes et la hauteur adimensionnée du fond

$$z(t, x) = \frac{1}{\bar{z}}z'(\bar{t}t, \bar{L}x). \quad (3)$$

En ce qui concerne les coefficients de l'équation, nous considérons la vitesse caractéristique de l'eau  $\bar{u}$ , la hauteur d'eau moyenne  $H$  et la valeur  $\bar{M}$  caractéristique du marnage (la variation de hauteur due à la marée). Puis, nous définissons les champs adimensionnés de courant  $\mathbf{u}$  et de variation de hauteur d'eau  $\mathbf{m}$  par

$$\mathbf{u}(t, x) = \frac{1}{\bar{u}}\mathbf{u}'(\bar{t}t, \bar{L}x), \quad \mathbf{m}(t, x) = \frac{1}{\bar{M}}(d(\bar{t}t, \bar{L}x) - H). \quad (4)$$

En prenant alors en compte que  $\frac{\bar{M}}{H}$  est petit et que donc  $C \simeq \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right) + \frac{\bar{M}}{H}\mathbf{m}$ , nous faisons l'approximation suivante :

$$\frac{1}{C^3} \simeq \left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^{-3} \left(1 - 3\frac{\bar{M}}{H}\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\mathbf{m}\right)^{-1}. \quad (5)$$

En utilisant des relations du type  $\nabla z(\bar{t}t, \bar{L}x) = \frac{1}{\bar{z}\bar{L}}\nabla z(t, x)$ , nous obtenons la version adimensionnée de (1) que nous recherchions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} - \lambda\alpha \frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^3 \bar{L}^2} \nabla \cdot \left( \left(1 - 3\frac{\bar{M}}{H}\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\mathbf{m}\right) \chi\left(|\mathbf{u}|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}\right) \nabla z \right) \\ = \alpha \frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^3 \bar{L}\bar{z}} \nabla \cdot \left( \left(1 - 3\frac{\bar{M}}{H}\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\mathbf{m}\right) \chi\left(|\mathbf{u}|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}\right) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Ensuite, nous attribuons aux valeurs caractéristiques les valeurs correspondant à la situation que nous souhaitons étudier, ce qui va faire apparaître un petit paramètre. La situation choisie ici est celle de dunes faites de gros grains de sable, c'est à dire avec un diamètre  $D_G \sim 5 \cdot 10^{-3} m$ , auxquels est associée une vitesse de mise en mouvement  $u_c = 0.5 m/s$ . Selon Flemming [8] et Idier [13], avec un tel sable les dunes générées font quelques dizaines de mètres de hauteur et quelques centaines de mètres de longueur. Cela nous amène à poser  $\bar{z} = 50 m$  et  $\bar{L} = 300 m$ . Vu que les dunes marines ne connaissent pas d'évolution significative sur des périodes inférieures à quelques mois, nous fixons pour la longueur de la période d'observation  $\bar{t} : 100 \text{ jours} \sim 2400 \text{ heures} \sim 8.6 \cdot 10^6 s$ . En introduisant la fréquence de marée  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{t}$  doit être comparée à la période de marée  $1/\bar{\omega} \sim 13 \text{ heures} \sim 4.7 \cdot 10^4 s$ , ce qui met en évidence un petit paramètre  $\epsilon = 1/(\bar{t}\bar{\omega}) \sim 1/200$ . Sachant que les dunes sous-marines du type

que nous étudions existent dans des océans côtiers dont le socle rocheux est relativement plat, avec une hauteur d'eau d'environ 50 mètres, avec une marée ayant des courants plutôt forts mais un marnage modéré, nous posons :  $\bar{u} = 1m/s$ ,  $H = 50m$  et  $\bar{M} = 5m$ . Comme de plus  $\lambda$  est de l'ordre de 1, un calcul directe amène l'évaluation suivante des coefficients de l'équation (6) :

$$\lambda\alpha \frac{\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^3 \bar{L}^2} \sim \frac{1}{2\epsilon}, \lambda\alpha \frac{\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^3 \bar{L}\bar{z}} \sim \frac{5}{\epsilon}, \frac{3\bar{M}}{H \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)} \sim 3\epsilon, \quad (7)$$

et l'équation (6) se réécrit :

$$\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{2\epsilon} \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \nabla z^\epsilon \right) = \frac{5}{\epsilon} \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right), \quad (8)$$

où nous notons  $z = z^\epsilon$  pour mettre en évidence sa dépendance au petit paramètre  $\epsilon$ .

En ce qui concerne les champs fluides  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{m}$ , comme ils sont les versions dimensionnées de fonctions périodiques à amplitude modulée et de période la période de marée, nous supposons

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathcal{U}\left(t, \frac{t}{\epsilon}, x\right), \quad \mathbf{m}(x, t) = \mathcal{M}\left(t, \frac{t}{\epsilon}, x\right), \quad (9)$$

pour deux fonctions régulières  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{M}$  telles que  $\theta \mapsto (\mathcal{U}(t, \theta, x), \mathcal{M}(t, \theta, x))$  est périodique de période 1, avec une valeur moyenne nulle.

Enfin, comme les dunes de la situation considérée constituent très généralement des champs de dunes, il n'est pas déraisonnable de considérer un domaine périodique pour la variable  $x$ . Ainsi nous considérons que la solution  $z^\epsilon = z^\epsilon(t, x)$  de (8) est définie pour  $x \in \mathbb{T}$  où  $\mathbb{T}$  est le tore  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Concernant la variable de temps, nous considérons que  $t \in [0, T)$ , pour  $T > 0$ . Il faut naturellement adjoindre à l'équation (8) une donnée initiale

$$z^\epsilon|_{t=0} = z_0. \quad (10)$$

L'équation (8) est celle qu'il faut étudier pour comprendre la situation que nous avons choisie, pour mettre en évidence des phénomènes qualitatifs qui en sont représentatifs ou pour simuler l'évolution des dunes qu'elle génère.

## 4 Analyse

L'équation (8) est une EDP parabolique, linéaire, à coefficients non constants et avec un second membre. Établir l'unicité de sa solution fait appel à une routine classique consistant à supposer qu'il existe deux solutions à (8) puis à établir que la différence entre ces deux solutions vérifient une équation similaire à (8), mais sans second membre et dotée d'une condition initiale réduite à 0. Une estimation simple sur cette équation montre que sa solution unique est la fonction nulle. Donc les deux solutions supposées de (8) sont identiques.

Établir l'existence d'une solution à (8) dont la norme (dans un espace fonctionnel à préciser) est indépendante de  $\epsilon$  est une tâche plus longue. Nous ne ferons que la résumer ici.

Pour plus de détail sur cette preuve (et pour la preuve de résultats dans d'autres situations) nous renvoyons à Faye, FrénoD & Seck [7, 5].

Deux difficultés nous font face pour établir cette existence : la présence du facteur  $1/\epsilon$  devant le terme de diffusion et devant le second membre et le fait que le coefficient de diffusion s'annule, empêchant son caractère régularisant. Cependant, ces difficultés sont compensées par le fait que le facteur  $1/\epsilon$  pousse  $z^\epsilon$  à se rapprocher d'une fonction périodique de fréquence  $1/\epsilon$  et par le fait que lorsque le coefficient de diffusion s'annule, le second membre s'annule aussi, supprimant son action dérégularisante. De plus, si  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{M}$  sont régulières, les actions dérégularisantes du coefficient de diffusion et du second membre ne sont pas trop fortes.

Pour établir notre résultat, nous faisons l'hypothèse suivante qui peut se traduire par : à chaque marée, pendant un certain temps, le courant met le sable en mouvement partout ; et, l'onde de marée quitte toujours l'étale marée basse et celui de marée haute de manière uniforme :

**Hypothèse 4.1.**  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{M}$  sont régulières ; pour tout  $t$  et tout  $x$ , il existe un intervalle  $[\theta_\alpha, \theta_\omega]$  inclus dans  $[0, 1]$  tel que  $\mathcal{U}(t, \theta, x)$  soit strictement supérieur à  $1/2$  pour tout  $\theta$  dans cet intervalle ; et, partout où  $\mathcal{U}$  est inférieur ou égal à  $1/2$ ,  $\mathcal{U}$  ne dépend ni de  $t$  ni de  $x$ .

Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème 4.2.** Pour tout  $T > 0$  et tout  $\epsilon > 0$ , si l'hypothèse 4.1 est satisfaite, et si  $z_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$ , alors il existe une unique fonction  $z^\epsilon \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))$ , solution de (8) et (10). Pour tout  $t \in [0, T]$ , cette solution vérifie

$$\frac{d \left( \int_{\mathbb{T}^2} z^\epsilon(t, x) dx \right)}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))} \leq \tilde{\gamma}, \quad (11)$$

pour une constante  $\tilde{\gamma}$  indépendante de  $\epsilon$ .

**Résumé de la démonstration.** Dans une première étape, nous régularisons l'équation (8) en ajoutant un terme positif dans le coefficient de diffusion. Nous considérons donc, pour tout  $\nu$  strictement positif,  $z^{\epsilon, \nu}$  solution de

$$\frac{\partial z^{\epsilon, \nu}}{\partial t} - \frac{1}{2\epsilon} \nabla \cdot \left( \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) + \nu \right) \nabla z^{\epsilon, \nu} \right) = \frac{5}{\epsilon} \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right), \quad (12)$$

associée à la donnée initiale (10). Comme dans cette équation le coefficient de diffusion est strictement positif, en utilisant des méthodes classiques de théorie des EDP paraboliques (voir par exemple Lazyzenskaja, Solonnikov & Ural'ceva [14] ou Lions [15]), nous pouvons montrer que  $z^{\epsilon, \nu}$  existe et qu'elle vérifie une estimation du type  $\|z^{\epsilon, \nu}\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))} \leq \gamma/\epsilon$  pour une constante  $\gamma$  ne dépendant ni de  $\nu$  ni de  $\epsilon$ . En faisant ensuite tendre  $\nu$  vers 0, nous pouvons montrer que  $z^\epsilon$  existe et qu'elle vérifie  $\|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))} \leq \gamma/\epsilon$ .

La deuxième étape, consiste à considérer  $\mathcal{S}^\nu = \mathcal{S}^\nu(t, \theta, x)$ , périodique de période 1 en  $\theta$ , solution de l'équation paramétrisée par  $t$  :

$$\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} - \nabla \cdot ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot) + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot), \quad (13)$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \theta, x) = \frac{1}{2} \left( (1 - 3\epsilon \mathcal{M}(t, \theta, x)) \chi(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|^2 - \frac{1}{2}) + \nu \right), \quad (14)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \theta, x) = 5 \left( (1 - 3\epsilon \mathcal{M}(t, \theta, x)) \chi(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|} \right), \quad (15)$$

Cette équation est posée dans un domaine complètement périodique (en  $x$  et en  $\theta$ ). Donc elle ne nécessite pas de conditions initiale ou aux limites. En adaptant à ce contexte périodique les méthodes usuelles des EDP paraboliques, il est possible de montrer l'existence et l'unicité de  $\mathcal{S}^\nu(t, \cdot, \cdot)$  dans  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , sous réserve de satisfaire la condition suivante, pour tout  $t$  et tout  $\theta$  :

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{S}^\nu(t, \theta, x) dx = 0. \quad (16)$$

(Ci-dessus  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$  désigne l'ensemble des fonctions de variable  $\theta$ , périodique de période 1, à valeur dans  $L^2(\mathbb{T}^2)$  et localement de carré intégrable.)

Cette construction nous donne des estimations de la norme  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$  de  $\mathcal{S}^\nu$  et de celles de ses dérivées premières par rapport à toutes ses variables (y compris  $t$ ) qui dépendent de  $\nu$ .

L'étape suivante a pour objet d'utiliser l'hypothèse 4.1 pour établir des estimations de ces normes qui sont indépendantes de  $\nu$ . Grâce à ces estimations, nous pouvons établir, en faisant tendre  $\nu$  vers 0, l'existence et l'unicité de la solution  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t, \cdot, \cdot)$  dans  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$ , pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot) \nabla \mathcal{S}) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot), \quad (17)$$

dès lors que nous imposons la condition suivante, pour tout  $t$  et tout  $\theta$  :

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{S}(t, \theta, x) dx = 0. \quad (18)$$

La norme  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$  de  $\mathcal{S}$  et de celles de ses dérivées par rapport à toutes ses variables sont bornées.

La quatrième étape consiste à considérer  $\mathcal{Z}^\epsilon = \mathcal{Z}^\epsilon(t, x) = \mathcal{S}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ . Comme

$$\frac{\partial \mathcal{Z}^\epsilon}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \quad (19)$$

nous pouvons déduire de (17) que  $\mathcal{Z}^\epsilon$  est solution d'une équation qui est proche de celle dont  $z^\epsilon$  est solution (voir (8)) :

$$\frac{\partial \mathcal{Z}^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla \mathcal{Z}^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x). \quad (20)$$

Ainsi nous pouvons déduire que  $z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon$  est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial (z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon)}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla (z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon)) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \\ (z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon)|_{t=0} = z_0 - \mathcal{S}(0, 0, \cdot). \end{cases} \quad (21)$$

L'étape de conclusion consiste alors à dire, grâce à (21), que  $z^\epsilon$ , dont on sait qu'elle existe (depuis la première étape), ne s'éloigne pas trop de  $\mathcal{Z}^\epsilon$ . Et comme  $\mathcal{Z}^\epsilon$  est une fonction périodique prise en  $t/\epsilon$  elle reste bornée. Cela apporte l'inégalité concernant  $\|z^\epsilon\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{T}^2))}$ . L'autre partie de (11) s'obtient assez directement. ■

## 5 Homogénéisation

Grâce au fait que la norme  $L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{T}^2))$  de  $z^\epsilon$  est bornée indépendamment de  $\epsilon$ , nous pouvons déduire un résultat d'homogénéisation qui permet de décrire qualitativement le comportement de  $z^\epsilon$  mais aussi de construire des méthodes de simulation numérique dites "Méthodes Numériques à Deux Échelles". Ce résultat d'homogénéisation s'énonce comme suit.

**Théorème 5.1.** *Pour tout  $T > 0$ , sous des hypothèses identiques à celles du Théorème 4.2, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , la solution  $z^\epsilon$  de (8) Converge à Deux Échelles vers  $U \in L^\infty([0,T],L^\infty_\#(\mathbb{R},L^2(\mathbb{T}^2)))$  qui est la solution unique de*

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla U) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}, \quad (22)$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) = \frac{1}{2} \chi \left( |\mathcal{U}(t, \theta, x)|^2 - \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) = 5 \chi \left( |\mathcal{U}(t, \theta, x)|^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|}. \quad (23)$$

Pour la définition précise de ce que signifie "Converger à Deux Échelles" nous renvoyons à Nguetseng [16], Allaire [3] and Frénod [9]. Ici nous retiendrons qu'affirmer que  $z^\epsilon$  Converge à Deux Échelles vers  $U$  signifie que pour toute fonction  $\psi(t, \theta, x)$  régulière, à support compact en  $t$  et  $x$  et périodique de période 1 en  $\theta$ ,

$$\int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T z^\epsilon(t, x) \psi(t, \frac{t}{\epsilon}, x) dt dx \rightarrow \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T U(t, \theta, x) \psi(t, \theta, x) dt dx d\theta \quad (24)$$

et que, d'un point de vue intuitif, cela traduit que  $z^\epsilon(t, x)$  est proche de  $U(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ .

**Résumé de la démonstration.** La preuve de ce théorème est basée sur une formulation faible avec des fonctions test oscillantes de l'équation (8). Celle-ci s'obtient en multipliant (8) par  $\phi(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$  pour toute fonction  $\phi(t, \theta, x)$  régulière, à support compact en  $t$  et  $x$  et périodique de période 1 en  $\theta$  et à intégrer le résultat par parties en utilisant

$$\frac{\partial \left[ \phi(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \right]}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right). \quad (25)$$

Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T z^\epsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) + \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \nabla \phi \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) \right) \right) dx dt \\ &= -\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right) \phi \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) dt dx = \int_{\mathbb{T}^2} z_0(x) \phi(0, 0, x) dx. \quad (26) \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par  $\epsilon$ , en utilisant les expressions de  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{u}$  (voir (9)), en remarquant que  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ ,  $\nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathcal{M}) \chi(|\mathcal{U}|^2 - \frac{1}{2}) \nabla \phi \right)$  et  $\nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathcal{M}) \chi(|\mathcal{U}|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathcal{U}}{|\mathcal{U}|} \right) \phi$  peuvent jouer le rôle de  $\psi$  dans (24) et en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 nous obtenons

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T U \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \nabla \cdot \left( \tilde{\mathcal{A}} \nabla \phi \right) \right) dx dt d\theta = \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \phi dx dt d\theta, \quad (27)$$

pour toute fonction  $\phi(t, \theta, x)$  régulière, à support compact en  $t$  et  $x$  et périodique de période 1 en  $\theta$ , qui est une formulation faible de (22). ■

## 6 Simulations

Vu que l'équation (8) génère dans sa solution  $z^\epsilon$  des oscillations de taille  $\epsilon$ , la simuler numériquement directement demande de prendre des pas de temps notablement plus petits que  $\epsilon$ , ce qui rend le coût de la simulation élevé. Pour palier à cela, nous cherchons à développer une Méthode Numérique à Deux-Échelles. Pour résumer la mise en place de cette méthode, dont une ébauche est exposée dans Faye, Frénod & Seck [6], nous dirons qu'elle consiste, dans un premier temps, à construire une approximation numérique de l'équation (22). Cette équation ne génère pas d'oscillations de taille  $\epsilon$  dans sa solution  $U$ . Une approximation de  $U$  peut donc être calculée en utilisant un pas de temps (qui ici est  $\theta$ ) beaucoup plus grand que celui que nous aurions à utiliser pour calculer une approximation de  $z^\epsilon$  directement. Dans un deuxième temps, nous construisons une approximation numérique du fait que  $z^\epsilon(t, x)$  est proche de  $U(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ . Cela nous donne alors une bonne approximation de  $z^\epsilon(t, x)$ .

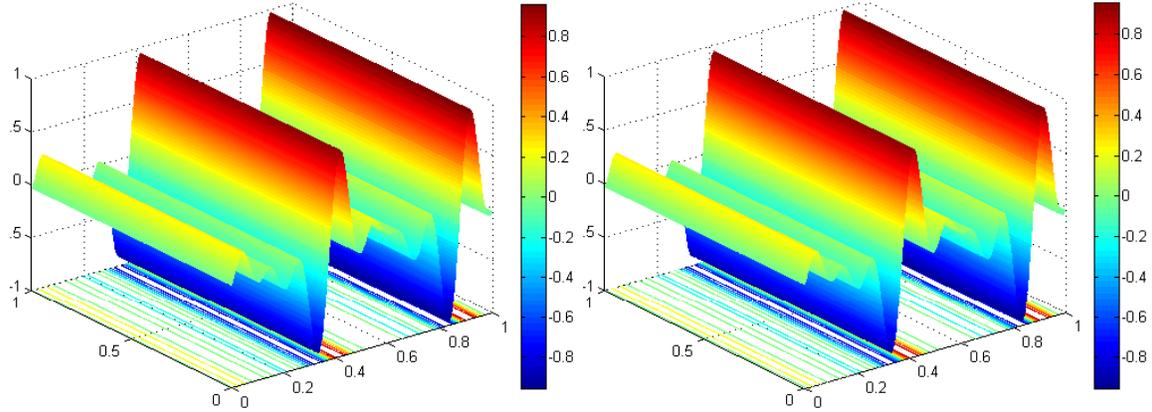


FIGURE 1 – Gauche : Un champ de dunes calculé par une simulation direct de (8) (avec  $\epsilon = 0.005$ , à  $t = 0.375$ ). Droite : Le même champ de dunes calculé par la Méthode Numérique à Deux-Échelles décrite en section 6.

La pertinence de cette approche est illustrée par la Figure 1. Sur la gauche de cette figure, est représentée une approximation numérique de l'équation (8) pour une valeur de  $\epsilon = 0.005$ , à  $t = 0.375$ . Elle est calculée par une discrétisation directe de (8), basée sur des séries de Fourier en  $x$  et sur un schéma d'Euler en temps. L'image de droite, présente cette solution, au même instant, mais calculée en utilisant la Méthode Numérique à Deux-Échelles dont le

principe a été expliqué ci-dessus. Les deux solutions sont très proches l'une de l'autre, et, la solution numérique calculée par la Méthode Numérique à Deux-Échelles demande environ 10 fois moins de temps de calcul pour une même précision.

Ces deux solutions ont été calculées en utilisant un code développé sous Matlab, faisant appel à la Transformation de Fourier Rapide.

## 7 Conclusion

Au delà de la contribution des mathématiques à la compréhension de la formation et de l'évolution des dunes sous-marines, le travail décrit dans cette note est représentatif de ce que les mathématiques peuvent apporter aux science de la terre. Elles offrent en effet une panoplie d'outils performants, couvrant un large spectre allant de la modélisation à la simulation, en passant par l'analyse fine et l'exhibition de comportement qualitatifs; permettant une vision globale des questions que ces sciences posent.

Des démarches similaires sont en cours sur d'autres thèmes issus des science de la terre. Par exemple dans Frénod & Goubert [10], Frénod & Rousseau [11] et Bernard, Frénod & Rousseau [4] une contribution mathématique au concept de confinement paratique est en développement. Dans Ailliot, Frénod & Monbet [1, 2] un travail sur la dérive d'objets dans l'océan côtier soumis à la marée est mené.

## Références

- [1] P. Ailliot, E. Frénod, and V. Monbet. Long term object drift forecast in the ocean with tide and wind. *Multiscale Modeling and Simulations*, 5(2) :514–531, 2006.
- [2] P. Ailliot, E. Frénod, and V. Monbet. Modeling the coastal ocean over a time period of several weeks. *Journal of Differential Equations*, 248 :639–659, 2010.
- [3] G. Allaire. Homogenization and Two-scale Convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6) :1482–1518, 1992.
- [4] Jean-Philippe Bernard, Emmanuel Frenod, and Antoine Rousseau. Modeling confinement in Etang de Thau : numerical simulations and multi-scale aspects. *Submitted*.
- [5] I. Faye, E. Frénod, and D. Seck. Long term behaviour of singularly perturbed parabolic degenerated equation. *Submitted*.
- [6] I. Faye, E. Frénod, and D. Seck. Two-scale numerical simulation of sand transport problems. *Submitted*.
- [7] I. Faye, E. Frénod, and D. Seck. Singularly perturbed degenerated parabolic equations and application to seabed morphodynamics in tided environment. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S A*, 29(3) :1001–1030, 2011.
- [8] B.W. Flemming. The role of grain size, water depth and flow velocity as scaling factors controlling the size of subaqueous dunes. In A. Trentesaux and T. Garlan, editors, *Marine Sandwave Dynamics, International Workshop, March 23-24 2000*. University of Lille 1, France, 2000.
- [9] E. Frenod. Two-Scale Convergence. *ESAIM : Proceedings*, 38 :1–35, 2012.

- [10] E. Frénod and E. Goubert. A first step towards modelling confinement of paralic ecosystems. *Ecological Modelling*, 200(1-2) :139–148, jan 2007.
- [11] E. Frénod and A. Rousseau. Paralic Confinement - models and simulations. *Acta Applicanda Mathematicae*, 123(1) :1–19, 2013.
- [12] O. Guélorget and J.-P. Perthuisot. Structure et évolution des peuplements benthiques en milieux paralique. Comparaison entre un modèle déssalé (l'Étang du Prévost, France) et un modèle sursalé (La Bahiere el Biban, Tunisie). Conséquences biologiques et géologiques. *Journal de Recherche Océanographique, Paris*, 7 :2–11, 1982.
- [13] D. Idier. *Dunes et bancs de sables du plateau continental : observations in-situ et modélisation numérique*. PhD thesis, 2002.
- [14] O. A. Ladyzenskaja, Solonnikov V. A., and Ural'ceva N. N. *Linear and Quasi-linear Equation of Parabolic Type*, volume 23. AMS, Translation of Mathematical Monographs, vol. 23.
- [15] J.-L. Lions. Remarques sur les équations différentielles ordinaires. *Osaka Math. J.*, 15 :131–142, 1963.
- [16] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20(3) :608–623, 1989.
- [17] L. C. Van Rijn. Handbook on sediment transport by current and waves. Technical Report H461 :12.1–12.27, Delft Hydraulics, 1989.