



**HAL**  
open science

## Recovery of the effective wavenumber and dynamical mass density for materials with inclusions

Guillaume Lepert, Christophe Aristégui, Olivier Poncelet, Thomas Brunet,  
Christian Audoly, Patrick Parneix

► **To cite this version:**

Guillaume Lepert, Christophe Aristégui, Olivier Poncelet, Thomas Brunet, Christian Audoly, et al..  
Recovery of the effective wavenumber and dynamical mass density for materials with inclusions.  
Acoustics 2012, Apr 2012, Nantes, France. hal-00811114

**HAL Id: hal-00811114**

**<https://hal.science/hal-00811114>**

Submitted on 23 Apr 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# ACOUSTICS 2012

## Recovery of the effective wavenumber and dynamical mass density for materials with inclusions

G. Lepert<sup>a</sup>, C. Aristégui<sup>a</sup>, O. Poncelet<sup>a</sup>, T. Brunet<sup>a</sup>, C. Audoly<sup>b</sup> and P. Parneix<sup>c</sup>

<sup>a</sup>University of Bordeaux, CNRS, UMR 5295, I2M - Bâtiment A4, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France

<sup>b</sup>DCNS Research, CEMIS, 83076 Toulon, France

<sup>c</sup>DCNS Research, CESMAN, 44620 La Montagne, France  
g.lepert@i2m.u-bordeaux1.fr

For many years, the study of material with locally resonant inclusions has known a great interest. Due to their attractive macroscopic acoustic properties, which do not exist in natural materials, many applications governed by the contrast between the constituent properties can be achieved: cloaking, enhanced absorption, flat plate lens, wave trapping... Such structures containing inclusions are usually modeled as effective homogeneous materials with complex-valued and frequency-dependent effective wave number and mass density. In this context, we derived a method for the simultaneous determination of both parameters using an immersed sample. First, its reliability is demonstrated using theoretical input data with simulated measurement noise. Finally, the characterization method is applied to experimental waveforms measured on a standard glass panel.

## 1 Introduction

Les milieux inclusionnaires sont étudiés depuis longtemps dans le domaine de l'acoustique [1-5]. Ces milieux hétérogènes présentent des propriétés acoustiques intéressantes, allant d'une forte absorption jusqu'au concept de métamatériau, pour lesquels la masse et la compressibilité dynamiques peuvent être négatives.

Ces milieux hétérogènes sont généralement modélisés par des milieux homogènes ayant un comportement équivalent au milieu inclusionnaire. À l'instar des milieux viscoélastiques qui, afin de traduire l'atténuation causée par les pertes visco-thermiques, ont une rigidité à valeurs complexes et dépendant de la fréquence, les milieux homogènes équivalents aux milieux hétérogènes sont également définis à l'aide d'une rigidité à valeurs complexes et dépendant de la fréquence, afin de traduire les phénomènes de perte acoustique par diffusion au sein du milieu, en plus des pertes viscoélastiques éventuelles. De plus, afin de traduire les phénomènes inertiels liés aux différentes phases de l'agrégat, la masse volumique du milieu homogène équivalent est de même définie à valeurs complexes et dépendant de la fréquence.

Il existe de nombreuses méthodes de caractérisation de la célérité de phase et de l'atténuation d'un matériau, mais peu d'entre elles permettent d'identifier la masse volumique à partir des données acoustiques. Adamowski [6] développa une méthode de caractérisation de la masse volumique d'un liquide en utilisant une série de signaux réfléchis à différentes interfaces. He [7] développa quant à lui une méthode de caractérisation de la célérité de phase et de l'atténuation d'un matériau homogène en utilisant les signaux réfléchis et transmis par l'échantillon. Ces deux techniques ne peuvent être utilisées ici car elles font des hypothèses sur les paramètres du matériau qui ne sont pas applicables à un matériau inclusionnaire (masse volumique réelle). De par l'absence de modèles décrivant l'évolution en fonction de la fréquence des paramètres, il sera donc nécessaire d'identifier les paramètres du matériau inclusionnaire fréquence par fréquence.

Une procédure d'identification à l'aide de la mesure de la réflexion et de la transmission acoustique par une plaque immergée est développée ici. Cette méthode est basée sur la méthode de Fokin [8] qui proposa une identification du nombre d'onde et de la masse volumique à valeurs complexes à partir des coefficients de réflexion et de transmission d'une plaque. La méthode de Fokin est adaptée au dispositif expérimental présenté dans la partie 2. Afin de l'éprouver, cette méthode est appliquée ici à un matériau réellement homogène, aux longueurs d'ondes utilisées dans ce travail. Sa fiabilité sur un cas simple nous assurera une part de fiabilité sur la caractérisation de matériaux inclusionnaires fortement aléatoires. De plus, la sensibilité de la technique aux erreurs de mesure est ici étudiée à l'aide de données synthétiques bruitées.

## 2 Méthode d'identification

### 2.1 Dispositif expérimental

L'identification des paramètres se base ici sur des mesures acoustiques des coefficients de transmission et de réflexion d'un échantillon. Le dispositif expérimental comprend une cuve d'eau dans laquelle est immergée l'échantillon à caractériser. Deux transducteurs disposés de part et d'autre de la plaque permettent de mesurer les signaux transmis et réfléchis par la plaque (Fig. 1). Les transducteurs utilisés en régime impulsionnel émettent un signal temporel d'une certaine longueur temporelle, contenant une certaine bande de fréquences centrée autour de la fréquence centrale du transducteur. Au total, six signaux sont acquis par le dispositif expérimental.

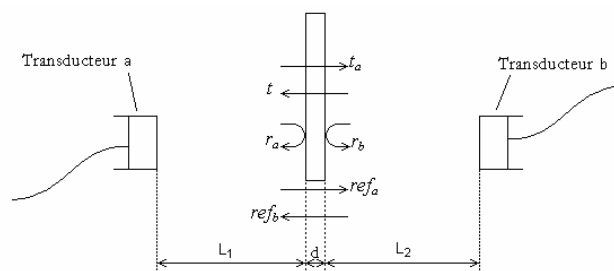


Figure 1 : schéma du dispositif expérimental, et ensemble des signaux mesurés.

Selon la nature du matériau constituant la plaque, les signaux réfléchis et transmis sont sensiblement différents (Fig. 2). En effet, si le matériau est trop absorbant, aucun signal n'est transmis par la plaque. À ce moment là, la méthode décrite ici n'est pas applicable. Dans le cas contraire, l'épaisseur du matériau va déterminer si il est possible de séparer les différents échos liés aux allers et retours dans l'épaisseur de la plaque. En effet, plus l'épaisseur de la plaque est importante, plus les échos vont être éloignés temporellement les uns des autres. Il sera alors plus aisé de les séparer et de sélectionner les échos voulus. Il est à noter que, compte tenu de l'absorption du matériau, les échos successifs ont une amplitude de plus en plus faible, jusqu'à l'absorption totale du signal. Le nombre d'échos observés est directement lié à l'absorption et à l'épaisseur de la plaque. Maintenant, si l'épaisseur de la plaque est trop faible pour pouvoir séparer les différents échos, l'ensemble des échos sera contenu dans le signal principal, le nombre d'échos contenus dans ce signal étant *a priori* inconnu. En effet, ce nombre peut être important si l'absorption du matériau n'est pas très élevée, mais on peut également avoir, dans le cas contraire, uniquement le signal direct.

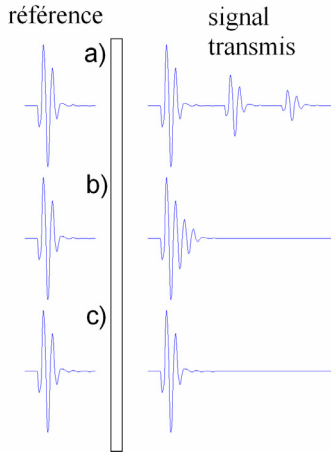


Figure 2 : différentes configurations possibles selon le matériau. a) les différents échos sont séparables (épaisseur suffisante). b) tous les échos sont contenus dans le signal principal. c) le matériau a absorbé tous les échos, seul le signal direct apparaît.

Dans tout ce qui suit, l'indice 0 désignera les propriétés du milieu extérieur (l'eau), l'indice 1 celles du matériau homogène équivalent constituant la plaque,  $c$  la célérité de phase des ondes longitudinales et  $\omega$  leur pulsation. Les paramètres que l'on va chercher à identifier sont le nombre d'onde à valeurs complexes  $k = \omega/c + i\alpha$ , ainsi que la masse volumique à valeurs complexe  $\rho = \rho' + i\rho''$ .

Soient  $t_a$ ,  $t_b$ , les signaux temporels transmis à travers la plaque respectivement du transducteur a vers le transducteur b, et du transducteur b vers le transducteur a. Les signaux  $r_a$  et  $r_b$  sont, de la même manière, les signaux réfléchis par la plaque. Enfin,  $ref_a$  et  $ref_b$  sont les signaux de référence s'étant uniquement propagés dans l'eau.

## 2.2 Méthode d'identification

### 2.2.1 Identification à partir de la réflexion et de la transmission totale

Soient  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $Ref_a$  et  $Ref_b$  les spectres des six signaux mesurables par le dispositif expérimental. Ces spectres s'expriment en fonction des fonctions de transfert en réflexion et en transmission de la plaque, respectivement  $R(\omega)$  et  $T(\omega)$ , ainsi que des fonctions de transfert en émission et en réception des transducteurs (respectivement  $X_a$ ,  $X_b$  et  $Y_a$ ,  $Y_b$ ) :

$$\begin{aligned} T_a(\omega) &= X_a e^{ik_0 L_1} T e^{ik_0 L_2} Y_b, \\ T_b(\omega) &= X_b e^{ik_0 L_2} T e^{ik_0 L_1} Y_a, \\ R_a(\omega) &= X_a e^{ik_0 L_1} R e^{ik_0 L_1} Y_a, \\ R_b(\omega) &= X_b e^{ik_0 L_2} R e^{ik_0 L_2} Y_b, \\ Ref_a(\omega) &= X_a e^{ik_0(L_1+d+L_2)} Y_b, \\ Ref_b(\omega) &= X_b e^{ik_0(L_2+d+L_1)} Y_a, \end{aligned} \quad (1)$$

où  $k_0 = \omega/c_0$  et où le terme  $e^{-i\alpha t}$  a été négligé. Les équations du système (1) font l'hypothèse que les fonctions de transfert  $R$  et  $T$  de la plaque sont les mêmes dans les deux sens de propagation. Cette hypothèse permet, par la

suite, en combinant ces six spectres, d'extraire les coefficients  $R$  et  $T$  (Eq. 2) :

$$\begin{aligned} \frac{T_a}{Ref_a} &= \frac{T_b}{Ref_b} = T e^{-ik_0 d}, \\ \frac{R_a}{Ref_a} &= \frac{R_b}{Ref_b} = R^2 e^{-2ik_0 d}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ces combinaisons de spectres permettent de s'affranchir des fonctions de transfert des transducteurs qui sont inconnues, ainsi que des distances entre les transducteurs et la plaque. Il est à noter que cette procédure de mesure des signaux dans les deux sens permet de contourner le problème lié à la connaissance d'un signal de référence nécessaire aux mesures de signaux réfléchis.

Les expressions théoriques de  $R$  et  $T$  pour une plaque homogène s'expriment en fonction des propriétés de la plaque [8] (Eq. 3) :

$$R = \frac{\left(\frac{1}{Z} - Z\right) \tan(k_1 d) i}{2 - \left(\frac{1}{Z} + Z\right) \tan(k_1 d) i}, \quad (3)$$

$$T = \frac{2}{\cos(k_1 d) \left[2 - \left(\frac{1}{Z} + Z\right) \tan(k_1 d) i\right]},$$

avec  $Z = \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{\rho_1 k_0}{\rho_0 k_1}$ .

À partir des mesures expérimentales de ces coefficients, une méthode d'identification des paramètres est développée ci-après. Elle consiste à manipuler les expressions analytiques des coefficients (Eq. 3), afin de mettre en évidence des expressions pour  $k_1$  et  $\rho_1$ . Le nombre d'onde  $k_1$  satisfait alors la formulation suivante :

$$\cos(k_1 d) = \frac{1 - R^2 + T^2}{2T} = A,$$

et donc  $k_1 = \frac{\pm \cos^{-1}(A) + 2\pi n}{d}, (n \in \mathbb{Z}) \quad (4)$

$$\left(\frac{1}{Z} + Z\right) = \left(2 - \frac{2}{T \cos(k_1 d)}\right) \frac{1}{i \tan(k_1 d)} = B,$$

et donc  $Z = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4}}{2}. \quad (5)$

Le nombre d'onde  $k_1$  est défini à un signe près, ainsi qu'à  $2\pi$  près. Le signe du nombre d'onde est déterminé afin que sa partie imaginaire soit positive. En effet, une partie imaginaire négative du nombre d'onde correspond à une amplification de l'onde pendant sa propagation à l'intérieur du matériau (matériau non passif). L'impédance acoustique est également définie à un signe près (Eq. 5).

## 2.2.2 Identification à partir de la réflexion et de la transmission partielles

Il est également possible, lorsque les signaux sont séparables, d'identifier les paramètres à l'aide des coefficients de réflexion directe  $R_1$  et de transmission directe  $T_1$ , sans les échos des multi-réflexions dans la plaque. Ces coefficients s'expriment, à l'instar de  $R$  et  $T$ , en fonction des propriétés de la plaque (Eq. 6) :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1-Z}{1+Z}, \\ T_1 &= \frac{4Z}{(1-Z)^2} e^{ik_1 d}. \end{aligned} \quad (6)$$

On identifie de la même manière les paramètres de la plaque (Eq. 7), soit :

$$\begin{aligned} e^{ik_1 d} &= \frac{T_1}{1-R_1^2} = C, \\ \text{et donc } k_1 &= \frac{-i \ln(C) + 2\pi n}{d}, (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{Z}{(1+Z)^2} &= \frac{T_1}{4} e^{-ik_1 d} = D, \\ \text{et donc } Z &= \frac{1-2D \pm \sqrt{1-4D}}{2D}. \end{aligned} \quad (8)$$

## 3 Stabilité de l'identification

Afin de quantifier la stabilité de l'identification, nous simulons le dispositif expérimental à l'aide de données synthétiques. Le matériau choisi ici est un matériau viscoélastique ( $c_1(\omega) \in \mathbb{C}, \rho \in \mathbb{R}^+$ ), respectant les relations de causalité entre célérité de phase et atténuation [9,10] (Fig. 3). Ce système mécanique causal repose sur des fonctions de relaxation considérant des densités de probabilités des temps de relaxation appropriées. Ces choix judicieux conduisent entre autre à des relations explicites entre les caractéristiques mécaniques d'un milieu homogène viscoélastique linéaire et les propriétés acoustiques observables (nombre d'onde).

Les signaux en transmission et en réflexion sont simulés à l'aide des coefficients  $R$  et  $T$ . Le signal de référence est un signal expérimental, mesuré avec deux transducteurs de fréquence centrale 150 kHz (Fig. 4)

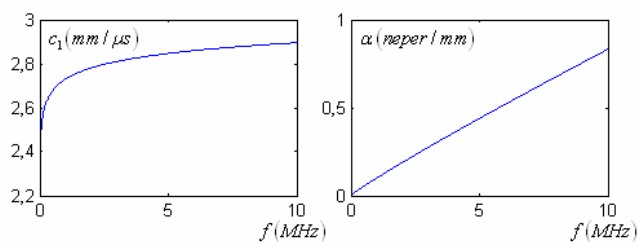


Figure 3 : célérité de phase et atténuation en fonction de la fréquence du matériau respectant les relations de causalité. ( $\rho = 1,56 \text{ g/cm}^3$ ).

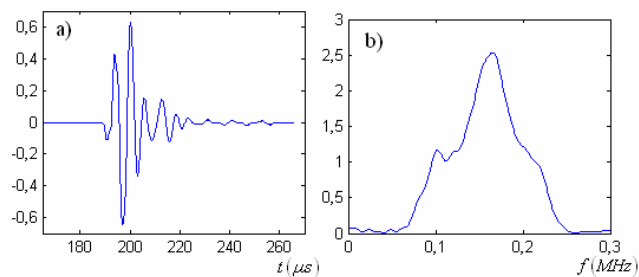


Figure 4 : a) signal de référence (ua). b) module du spectre du signal de référence (ua)

La méthode d'identification appliquée aux signaux synthétiques donne parfaitement les paramètres utilisés pour la simulation des signaux. L'enjeu est donc d'observer le comportement de l'identification sur des signaux bruités. Le bruit est exprimé en niveau de rapport signal à bruit en dB. Il correspond au rapport d'énergie entre le signal non bruité et le bruit. Ainsi, plus ce rapport est petit, plus il y a de bruit. On choisira ici un rapport signal à bruit de 24 dB. Les signaux ont été simulés avec deux épaisseurs de plaque (10 mm et 1 mm). Les signaux simulés et bruités sont représentés sur les figures 5 et 6, et les résultats de l'identification sont représentés figures 7 et 8.

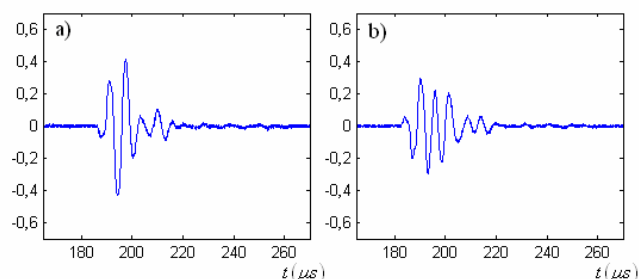


Figure 5 : signaux temporels simulés en transmission a) et en réflexion b) par une plaque de 10 mm d'épais avec un rapport signal à bruit de 24 dB.

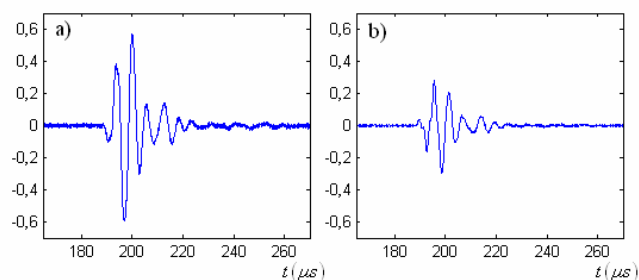


Figure 6 : signaux temporels simulés en transmission a) et en réflexion b) par une plaque de 1 mm d'épaisseur avec un rapport signal à bruit de 24 dB.

On constate que pour un même niveau de bruit, l'identification du nombre d'onde est beaucoup moins précise pour une faible épaisseur de matériau. Concernant l'identification de la masse volumique, la précision est aussi bonne que pour la célérité dans le premier cas, et elle ne se dégrade pas si l'épaisseur de l'échantillon diminue. Ce résultat est directement lié à la taille de la longueur d'onde par rapport à l'épaisseur de l'échantillon. En effet, si la longueur d'onde est très grande par rapport à l'épaisseur de

l'échantillon, la propagation dans le matériau sera très faible, et le signal transmis par la plaque sera très peu dépendant de cette propagation. De ce fait, l'identification du nombre d'onde dans cette configuration sera très sensible au bruit. A la fréquence centrale du signal de référence (0,16 MHz), la longueur d'onde dans le matériau est de 16 mm, longueur largement plus grande que l'épaisseur de la plaque, qui est, dans le cas le plus défavorable, de 1 mm.

Il apparaît donc qu'une épaisseur plus grande ou de l'ordre de la longueur d'onde dans le matériau est souhaitable pour avoir une identification précise des paramètres.

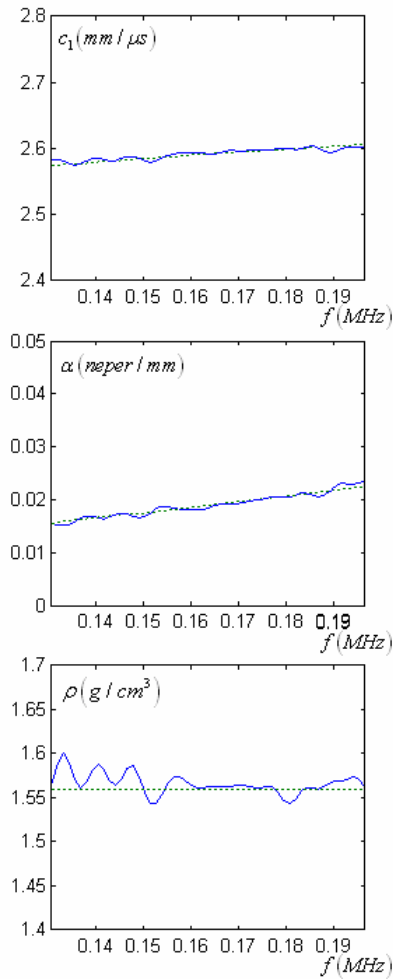


Figure 7 : célérité de phase, atténuation et masse volumique (identifiées en bleu, données de départ en vert), identifiées à partir des signaux simulés à travers une plaque de 10 mm d'épaisseur avec un rapport signal à bruit de 24 dB.

### 4 Résultats expérimentaux

Les coefficients de transmission et de réflexion ont été mesurés sur une plaque de verre de 7,97 mm d'épais (avec des transducteurs de fréquence centrale 5 MHz).

La figure 9 présente les résultats obtenus par la méthode d'identification présentée dans le paragraphe 2. Les paramètres ont été identifiés à l'aide des coefficients de réflexion et de transmission directs  $R_I$  et  $T_I$ . La célérité de phase identifiée correspond aux valeurs données dans la littérature pour le verre. L'atténuation est, en revanche,

élevée par rapport à ce que l'on pourrait attendre. Cette surévaluation de l'atténuation trouve son explication dans le dispositif expérimental. Ce genre d'expérience en transmission / réflexion surestime généralement l'atténuation. En effet, un mauvais alignement des transducteurs induit une perte de signal en transmission, et donc une surélévation artificielle de l'atténuation.

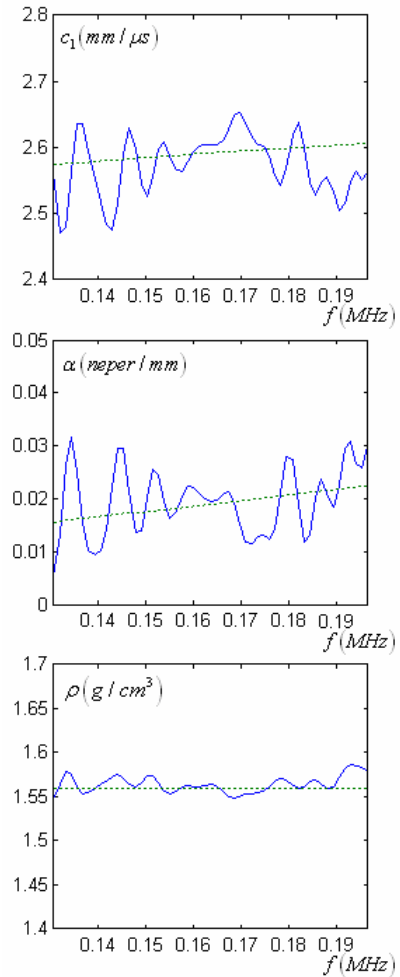


Figure 8 : célérité de phase, atténuation et masse volumique (identifiées en bleu, données de départ en vert), identifiées à partir des signaux simulés à travers une plaque de 1 mm d'épaisseur avec un rapport signal à bruit de 24 dB.

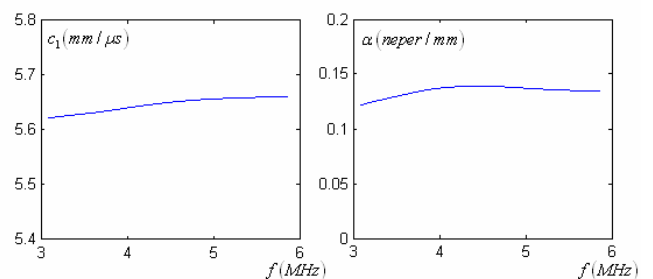


Figure 9 : célérité de phase et atténuation identifiées à partir de la mesure de la transmission et de la réflexion d'une plaque de verre de 7,97 mm d'épaisseur.

L'identification de la masse volumique est, quant à elle, représentée figure 10. Elle donne deux valeurs différentes, l'impédance étant définie à un signe près (Eq. 5). La partie

réelle de la masse volumique correspond à la densité du verre ( $2,51 \text{ g.cm}^{-3}$ ).

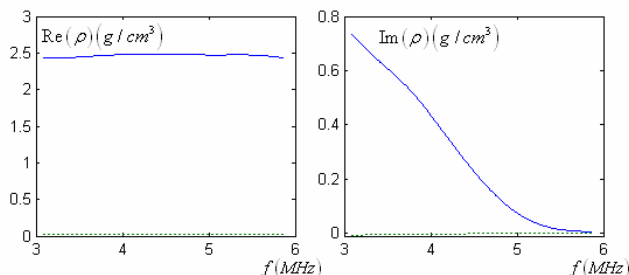


Figure 10 : masse volumique (partie réelle et partie imaginaire) identifiée à partir de la mesure de la transmission et de la réflexion d'une plaque de verre de 7,97 mm d'épaisseur. Une solution en trait plein, et l'autre en pointillés.

## 5 Conclusions

Une méthode d'identification des paramètres longitudinaux d'un matériau quelconque a été développée. Elle consiste à extraire nombre d'onde et masse volumique à partir de la mesure de la réflexion et de la transmission d'une plaque immergée dans l'eau. Des formules directes donnant ces paramètres à partir des coefficients de réflexion et de transmission ont été établies.

Une étude numérique de sensibilité au bruit de la méthode d'identification a été menée. Cette étude a montré que plus l'épaisseur de l'échantillon est faible, plus les résultats obtenus sont sensibles au bruit (notamment sur la célérité de phase et l'atténuation).

Enfin, cette méthode a été appliquée à une plaque de verre dont les propriétés sont bien connues. L'identification présente une surestimation de l'atténuation

La méthode d'identification présentée dans ce papier permet d'extraire à la fois le nombre d'onde et la masse volumique en fonction de la fréquence. L'identification fréquentielle de ces paramètres est indispensable pour caractériser des matériaux inclusionnaires, dont le comportement inhabituel pourrait ainsi être observé.

## Références

- [1] G. T. Kuster, M. N. Toksöz, "Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: Part I. Theoretical formulations", *Geophysics* 39 (5), p. 587-606 (1974)
- [2] V. K. Kinra, M. S. Petraitis, S. K. Datta, "Ultrasonic wave propagation in a random particulate composite", *International Journal of Solids and Structures* 16, p. 301-312 (1979)
- [3] P. C. Waterman, R. Truell, "Multiple scattering of waves", *Journal of Mathematical Physics* 2 (4), p. 512 (1961)
- [4] C. Aristégui, Y. C. Angel, "Effective mass density and stiffness derived from P-wave multiple scattering", *Wave Motion* 44, p. 153-164 (2007)
- [5] C. Audoly, "Acoustic analysis of panels made with viscoelastic materials containing resonant cavities", *Acta acustica* 2, p. 393-402 (1994)
- [6] J. C. Adamowski, F. Buiocchi, C. Simon, E. C. N. Silva, "Ultrasonic measurement of density of liquids", *Journal of the Acoustical Society of America* 97 (1), p. 354-361 (1995)
- [7] P. He, "Measurement of acoustic dispersion using both transmitted and reflected pulses", *J. Acoust. Soc. Am.* 107 (2), p. 801-807 (2000)
- [8] V. Fokin, M. Ambati, C. Sun, X. Zhang, "Method for retrieving effective properties of locally resonant acoustic metamaterials", *Physical review B* 76, 144302 (2007)
- [9] H. J. Wintle, "Kramers-Kronig analysis of polymer acoustic data", *Journal of Applied Physics* 85 (1), p. 44-48 (1999)
- [10] H. J. Wintle, "Power law absorption in polymers and other systems", *Journal of the Acoustical Society of America* 107 (3), p. 1770-1773 (2000)

## Remerciements

Je remercie toutes les personnes qui sont intervenues de près ou de loin à mon travail, et plus particulièrement Benoît Mascaro qui est intervenu dans la partie expérimentale de mes travaux.