



HAL
open science

**Méthodologie d'identification du modèle probabiliste
mésoscopique du champ de tenseur d'élasticité pour des
microstructures complexes avec des mesures aux échelles
mésoscopiques et macroscopiques**

M.-T. Nguyen, Christophe Desceliers, Christian Soize

► **To cite this version:**

M.-T. Nguyen, Christophe Desceliers, Christian Soize. Méthodologie d'identification du modèle probabiliste mésoscopique du champ de tenseur d'élasticité pour des microstructures complexes avec des mesures aux échelles mésoscopiques et macroscopiques. CSMA 2013, 11e Colloque National en Calcul des Structures, May 2013, Presqu'île de Giens, Giens (Var), France. pp.1-6. hal-00808855

HAL Id: hal-00808855

<https://hal.science/hal-00808855>

Submitted on 7 Apr 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodologie d'identification du modèle probabiliste mésoscopique du champ de tenseur d'élasticité pour des microstructures complexes avec des mesures aux échelles mésoscopiques et macroscopiques

M.-T. Nguyen¹, C. Desceliers¹, C. Soize¹

¹ Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle, MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-La-Vallée, Cedex 2, France

Résumé — Une méthodologie complète est proposée pour l'identification du champ de tenseur d'élasticité aléatoire à l'échelle mésoscopique modélisant une microstructure hétérogène et complexe. Des mesures de champs cinématiques aux échelles macroscopique et mésoscopique sont utilisées et l'identification est faite par la résolution d'un problème d'optimisation construit à partir de deux indicateurs numériques. Le premier indicateur permet d'évaluer une distance entre le tenseur d'élasticité macroscopique (identifié à partir des mesures expérimentales macroscopiques) et le tenseur effectif construit en homogénéisant, à l'échelle macroscopique, le champ de tenseur d'élasticité aléatoire mésoscopique. Le second indicateur mesure la différence des niveaux de fluctuations statistiques des champs de déformation obtenus par les observations mésoscopiques et le modèle numérique mésoscopique stochastique de la microstructure.

Mots clés — Problème inverse stochastique, identification multi-échelle, microstructure hétérogène, champ aléatoire, champ d'élasticité aléatoire, échelle mésoscopique, échelle macroscopique

1 Introduction

Les tissus biologiques sont parmi les matériaux les plus complexes à modéliser en ce qui concerne le niveau de complexité de leurs constituants à l'échelle microscopique. C'est le cas de l'os cortical pour lequel plusieurs échelles doivent être définies. A l'échelle macroscopique, un tel milieu est souvent modélisé comme un matériau homogène dont les propriétés mécaniques effectives peuvent être identifiées par des mesures expérimentales. A l'échelle microscopique, ce matériau est non seulement hétérogène et aléatoire, mais il ne peut pas être décrit en termes de constituants mécaniques (voir par exemple [15]). C'est la raison pour laquelle une échelle mésoscopique est introduite pour modéliser les propriétés apparentes du champ de tenseur d'élasticité aléatoire, mais il est alors nécessaire d'identifier en inverse ce champ en utilisant des mesures expérimentales d'un échantillon sous un chargement (voir par exemple [2, 3, 4]). Dans le paragraphe 2, une approche multi-échelle est proposée pour identifier le modèle stochastique *a priori* du champ de tenseur d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique. Des mesures mésoscopiques et macroscopiques des champs de déplacements sont utilisées et sont supposées être obtenues sur un seul échantillon à un chargement donné. Dans le paragraphe 3, un exemple est donné, pour lequel les mesures expérimentales sont construites numériquement.

2 Méthodologie pour l'identification du champ de tenseur par une approche multi-échelle

2.1 Mesures expérimentales aux échelles mésoscopiques et macroscopiques

Soit la microstructure d'un matériau élastique linéaire hétérogène occupant un domaine Ω^{macro} de bord $\partial\Omega^{\text{macro}}$, pour laquelle, à l'échelle mésoscopique, le champ de tenseur d'élasticité apparent est modélisé par un champ de tenseur aléatoire \mathbf{C}^{meso} et, à l'échelle macroscopique, le tenseur d'élasticité effectif, construit par homogénéisation [1, 9, 14], est noté $\mathbf{C}^{\text{macro}}$. On suppose que l'échantillon est soumis à

un chargement extérieur et que des mesures expérimentales du champ de déplacements macroscopiques sont obtenues, par exemple, en utilisant une caméra optique et une méthode de corrélation d'image [8]. En supposant que l'échantillon est encastré sur la partie Γ^{macro} du bord $\partial\Omega^{\text{macro}}$, le chargement extérieur consiste à appliquer une force surfacique $\mathbf{f}^{\text{macro}}$ sur une partie Σ^{macro} du bord $\partial\Omega^{\text{macro}}$. De telles mesures expérimentales à l'échelle macroscopique implique que les déplacements ne sont connus qu'aux noeuds d'une grille macroscopique superposée au domaine macroscopique Ω^{macro} . Celle-ci permet de définir un maillage éléments-finis du domaine Ω^{macro} sur lequel on construit l'interpolation éléments-finis, $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$, des mesures macroscopiques. Le tenseur linéarisé des déformations, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$, associées à $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ est alors calculé. Toutefois, les mesures macroscopiques mesurées dépendent de la taille de la grille macroscopique et, habituellement, celle-ci n'étant pas suffisamment fine pour permettre une observation précise des fluctuations spatiales du champ de déplacement à l'échelle mésoscopique, des mesures du champ de déplacements sont aussi faites dans des sous domaines à l'échelle mésoscopique, chaque sous domaine étant un volume élémentaire représentatif (VER) de la microstructure à l'échelle mésoscopique. Cela signifie que les fluctuations statistiques de $\mathbf{C}^{\text{macro}}$ sont quasi-nulles et donc $\mathbf{C}^{\text{macro}}$ est approximativement déterministe. La méthode expérimentale permet de connaître les valeurs du champ de déplacement mésoscopique aux noeuds d'une grille mésoscopique pour chaque sous domaine Ω^{meso} . Celle-ci permet de définir un maillage éléments-finis du domaine Ω^{meso} sur lequel on construit l'interpolation éléments-finis, $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$, des mesures mésoscopiques. Le champ de tenseur des déformations linéarisées, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$, associées à $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ est alors calculé.

2.2 Identification directe du champ de tenseur élastique à l'échelle macroscopique pour un échantillon

La première étape consiste à résoudre un problème inverse pour l'identification directe du tenseur d'élasticité effectif $\mathbb{C}^{\text{macro}}$ correspondant aux mesures macroscopiques. Pour cela, on suppose qu'il existe un paramétrage du tenseur $\mathbb{C}^{\text{macro}} = \mathbb{C}(\mathbf{a}^{\text{macro}})$, ce qui permet, par exemple, de prendre en compte les symétries matérielles. Le vecteur des paramètres $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ appartient donc à un ensemble admissible A^{macro} . Pour \mathbf{a} donné dans A^{macro} , on note $\mathbf{u}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$, la solution du problème aux limites d'élasticité linéaire pour une microstructure occupant le domaine Ω^{macro} , de tenseur élastique $\mathbb{C}(\mathbf{a})$, encastrée sur Γ^{macro} et soumise à une densité de force surfacique $\mathbf{f}^{\text{macro}}$ sur Σ^{macro} . Le champ des déformations linéarisées associé à $\mathbf{u}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ est noté $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$. L'identification directe de $\mathbb{C}^{\text{macro}} = \mathbb{C}(\mathbf{a}^{\text{macro}})$ consiste alors à calculer $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ comme étant la solution d'un problème d'optimisation

$$\mathbf{a}^{\text{macro}} = \arg \min_{\mathbf{a} \in A^{\text{macro}}} \{ \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{macro}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{macro}}(\mathbf{a})\|^2 \}, \quad (1)$$

où $\|A\| = \int_{\Omega^{\text{macro}}} A(\mathbf{x}) : A(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ pour tout champ de tenseur du second-ordre symétrique A .

2.3 Premier indicateur numérique pour l'identification à l'échelle mésoscopique

On suppose qu'il existe un paramétrage du champ de tenseur aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}} = \mathbf{C}(\mathbf{b}^{\text{meso}})$ pour lequel le vecteur des paramètres \mathbf{b}^{meso} appartient à un ensemble admissible A^{meso} . Pour tout \mathbf{b} donné dans A^{meso} , on note $\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, le champ de déplacement aléatoire indexé sur Ω^{meso} , qui est solution du problème aux limites pour la microstructure aléatoire linéaire élastique hétérogène, occupant le domaine Ω^{meso} , dont le champ de tenseur élastique apparent est $\mathbf{C}(\mathbf{b})$ et pour la condition de Dirichlet $\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ sur $\partial\Omega^{\text{meso}}$ presque-sûrement. Le champ aléatoire des déformations linéarisées associé à $\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ est noté $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$. On définit alors le premier indicateur numérique $I_1(\mathbf{b})$ par

$$I_1(\mathbf{b}) = \frac{\langle |\delta(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{b})) - \delta^*(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}})|^2 \rangle}{\delta^*(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}})^2}, \quad (2)$$

où $\langle \cdot \rangle$ est l'opérateur de moyennage spatial sur Ω^{meso} ; $\delta(\mathbb{A}) = (E\{\|\mathbb{A} - E\{\mathbb{A}\}\|^2\} / E\{\|\mathbb{A}\|^2\})^{\frac{1}{2}}$ est le coefficient de dispersion de tout tenseur du second-ordre symétrique \mathbb{A} et $\delta^*(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}) = (\langle \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}} - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}} \rangle\|^2 / \langle \|\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\|^2 \rangle)^{\frac{1}{2}}$.

2.4 Second indicateur numerique pour l'identification à l'échelle mésoscopique

Pour \mathbf{b} donné dans A^{meso} , l'homogénéisation stochastique permet de construire le tenseur effectif élastique à l'échelle macroscopique, $\mathbb{C}(\mathbf{b})$, à partir de $\mathbb{C}(\mathbf{b})$. Puisque chaque sous domaine Ω^{meso} est supposé être un VER, alors $E\{\mathbb{C}(\mathbf{b})\}$ est approximativement égale à une réalisation quelconque $\mathbb{C}(\mathbf{b}; \theta)$ de $\mathbb{C}(\mathbf{b})$. Le second indicateur numérique, $I_2(\mathbf{b})$, est alors défini comme étant une distance entre $\mathbb{C}^{\text{macro}} = C(\mathbf{a}^{\text{macro}})$ et $E\{\mathbb{C}(\mathbf{b})\} \simeq \mathbb{C}(\mathbf{b}; \theta)$

$$I_2(\mathbf{b}) = \|E\{\mathbb{C}(\mathbf{b})\} - C(\mathbf{a}^{\text{macro}})\|^2. \quad (3)$$

2.5 Problème d'optimisation pour l'identification de \mathbb{C}^{meso}

L'identification du modèle probabiliste du champ aléatoire \mathbb{C}^{meso} est faite en calculant $\mathbf{b}^{\text{macro}}$ comme étant la valeur de \mathbf{b} dans A^{meso} qui minimise simultanément la somme des indicateurs $I_1(\mathbf{b})$ et la somme des indicateurs $I_2(\mathbf{b})$ de chaque sous domaine Ω^{meso} .

3 Application à un exemple numérique

3.1 Configuration expérimentale

On considère une microstructure dont le matériau est linéaire, élastique, isotrope transverse. La géométrie tridimensionnelle de l'échantillon est supposée être celle d'un cube dont les arrêtes ont pour longueur 10^{-2} m. L'échantillon est encastré sur le bord inférieur et une densité de force surfacique est imposée sur le bord supérieur. La symétrie de la configuration expérimentale (géométrie, chargement, isotropie transverse) permet de poser l'hypothèse d'un état de contraintes planes et, par conséquent, Ω^{macro} est un domaine ouvert de \mathbb{R}^2 , représentant l'une des sections transverses du domaine occupé par l'échantillon.

3.2 Paramétrage du tenseur élastique à l'échelle macroscopique

Le paramétrage $C(\mathbf{a})$ est construit en supposant que les propriétés élastiques effectives de la microstructure sont celles d'un milieu isotrope complètement défini par les modules d'Young transverse $e_{T,a}$ et longitudinal $e_{L,a}$, par les coefficients de Poisson transverse $\nu_{T,a}$ et longitudinal $\nu_{L,a}$, par le module de cisaillement transverse $g_{T,a}$. On a alors $\mathbf{a} = (e_{T,a}, e_{L,a}, \nu_{T,a}, \nu_{L,a}, g_{T,a})$.

3.3 Paramétrage du champ de tenseur élastique apparent à l'échelle mésoscopique

Habituellement, $\mathbb{C}(\mathbf{b})$ est associé à un champ aléatoire $[\mathbb{C}(\mathbf{b})]$ à valeurs dans l'ensemble des matrices (6×6) symétriques définies positives. On introduit le champ de matrice de souplesse aléatoire $[\mathbf{S}(\mathbf{b})]$ pris dans l'ensemble SFE^+ (voir [10, 11, 12, 13]). On a donc $[\mathbb{C}(\mathbf{b})] = [\mathbf{S}(\mathbf{b})]^{-1}$. Puisqu'en moyenne le matériau de la microstructure est isotrope transverse, $E\{[\mathbf{S}(\mathbf{b})]\}$ est alors entièrement défini par les modules d'Young transverse $e_{T,b}$ et longitudinal $e_{L,b}$, par les coefficients de Poisson transverse $\nu_{T,b}$ et longitudinal $\nu_{L,b}$, par le module de cisaillement transverse $g_{T,b}$. On a donc $\mathbf{b} = (e_{T,b}, e_{L,b}, \nu_{T,b}, \nu_{L,b}, g_{T,b}, \ell_b, \delta_b)$ où ℓ_b est une longueur de corrélation spatiale et δ_b est un coefficient de dispersion introduits dans la construction de l'ensemble SFE^+ .

3.4 Construction numérique des observations expérimentales méso-macroscopiques

Pour construire les mesures expérimentales, il est nécessaire de modéliser toute la microstructure sur le domaine Ω^{macro} en contraintes planes. Afin de valider la méthodologie proposée, on construit volontairement les mesures expérimentales en utilisant le même modèle mésoscopique des propriétés élastiques apparentes que celui introduit dans le paramétrage $\mathbb{C}(\mathbf{b})$ (voir le paragraphe 3.3). On introduit donc le champ de tenseur aléatoire stationnaire $\widehat{\mathbb{C}}(\mathbf{b}^{\text{macro}})$, indexé sur Ω^{macro} , dont la restriction sur chaque sous domaine Ω^{meso} est $\mathbb{C}(\mathbf{b}^{\text{macro}})$ avec $\mathbf{b}^{\text{macro}} = (e_{T,b}^{\text{macro}}, e_{L,b}^{\text{macro}}, \nu_{T,b}^{\text{macro}}, \nu_{L,b}^{\text{macro}}, g_{T,b}^{\text{macro}}, \ell_b^{\text{macro}}, \delta_b^{\text{macro}})$ où $e_b^{\text{macro}} = 9.9 \times 10^9$ Pa, $\nu_b^{\text{macro}} = 0.38$, $\ell_b^{\text{macro}} = 1.25 \times 10^{-4}$ m et $\delta_b^{\text{macro}} = 40\%$. La configuration expérimentale est modélisée par un problème (déterministe) aux limites sur le domaine Ω^{macro} et pour une

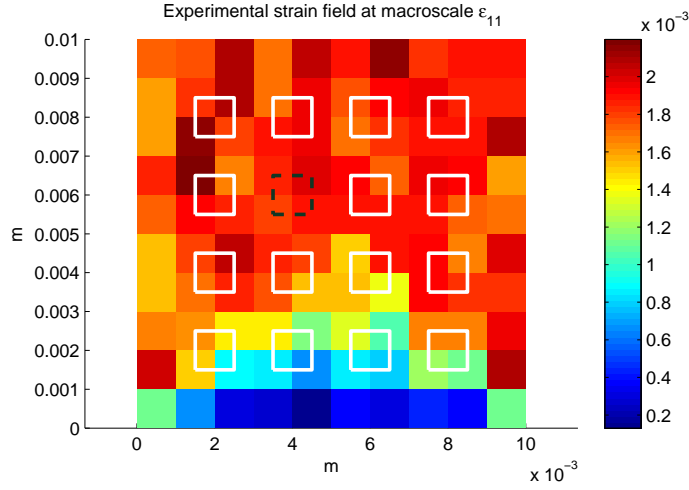


Fig. 1 – Mesures macroscopiques du champ des déformations linéarisées sur la grille macroscopique 10×10 et les 16 sous domaines Ω^{meso} . Graphe de $\mathbf{x} \mapsto \{\epsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}(\mathbf{x})\}_{11}$.

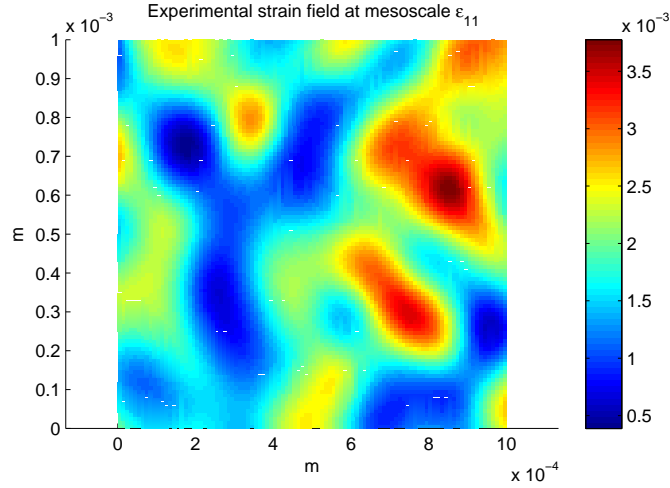


Fig. 2 – Mesures mésoscopiques du champ des déformations linéarisées sur la grille mésoscopique 100×100 d'un sous domaine Ω^{meso} . Graphe de $\mathbf{x} \mapsto \{\epsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}(\mathbf{x})\}_{11}$.

réalisation quelconque $\widehat{\mathbf{C}}(\mathbf{b}^{\text{macro}}; \theta)$ de $\widehat{\mathbf{C}}(\mathbf{b}^{\text{macro}})$. La résolution de ce problème aux limites est faite en utilisant la méthode des éléments finis avec un maillage de dimensions 1000×1000 . Les mesures macroscopique en déplacements sont extraites des valeurs nodales sur une grille 10×10 du domaine Ω^{macro} . Le pas de la grille est donc 10^{-3} m. La figure 1 montre le graphe de $\epsilon_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ ainsi construit et les 16 sous domaines Ω^{meso} . Les mesures mésoscopiques sont extraites des déplacements nodaux sur une grille 100×100 dont le pas est 10^{-5} m. La figure 2 montre le graphe de $\epsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ ainsi construit sur l'un des sous domaines Ω^{meso} .

3.5 Résultats

Dans ce paragraphe, nous ne nous intéressons qu'aux résultats partiels concernant le calcul des valeurs optimales \mathbf{b}^{meso} de \mathbf{b} . La résolution du problème d'optimisation multi-objectif (voir le paragraphe

somme des $I_1(\mathbf{b})$	somme des $I_1(\mathbf{b})$	ℓ_b	δ_b	$e_{T,b}$	$v_{T,b}$
4.013329×10^{-9}	2.612327×10^{-2}	9.666667×10^{-5}	0.383333	1.023000×10^{10}	0.376200
4.059328×10^{-9}	2.318577×10^{-2}	9.666667×10^{-5}	0.383333	1.023000×10^{10}	0.409133

Tableau 1 – Valeurs optimales de $\mathbf{b} = (e_{T,b}, e_{L,b}, v_{T,b}, v_{L,b}, g_{T,b}, \ell_b, \delta_b)$.

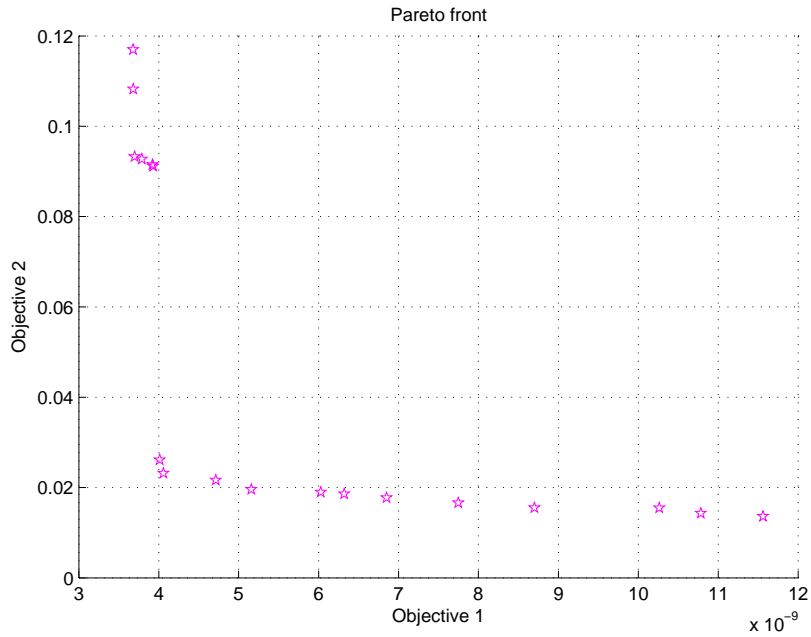


Fig. 3 – Front de Pareto pour le problème d’optimisation multi-objectif. En abscisse : somme des indicateurs $I_1(\mathbf{b})$ sur 16 sous domaines Ω^{meso} . En ordonnée : somme des indicateurs $I_2(\mathbf{b})$ sur 16 sous domaines Ω^{meso} .

2.3) est faite en utilisant un algorithme génétique et le front de Pareto est présenté sur la figure 3 avec, en abscisse, la somme des indicateurs $I_1(\mathbf{b})$ sur 16 sous domaines Ω^{meso} et, en ordonnée, la somme des indicateurs $I_2(\mathbf{b})$ sur 16 sous domaines Ω^{meso} . On remarque que la minimisation des indicateurs $I_1(\mathbf{b})$ est concurrentielle avec la minimisation des indicateurs $I_2(\mathbf{b})$. On ne peut donc trouver de valeurs \mathbf{b}^{meso} qui correspondent simultanément aux minima des indicateurs $I_1(\mathbf{b})$ et des indicateurs $I_2(\mathbf{b})$. Par ailleurs, les 7-ème et 8-ème points du front de Pareto constituent les meilleurs compromis pour l’optimisation multi-objective. Pour ces deux points, les valeurs identifiées sont données dans le tableau 1. La comparaison des valeurs obtenues avec celles de \mathbf{b}^{meso} est très bonne, ce qui valide la méthode.

4 Conclusions

La stratégie proposée pour l’identification du modèle probabiliste du champ d’élasticité apparent à l’échelle mésoscopique, pour une microstructure complexe, hétérogène et aléatoire a été présentée. L’identification est basée sur une approche multi-échelle méso-macroscopique par la résolution de deux problèmes inverses, à l’échelle macroscopique et à l’échelle mésoscopique. Un problème d’optimisation multi-objectif est introduit, lequel consiste à minimiser deux indicateurs numériques aux échelles méso-macroscopiques par rapport aux paramètres d’un modèle *a priori* du champ de tenseur des propriétés élastiques apparentes. L’exemple numérique proposé a montré que l’identification était possible avec un seul échantillon sur lequel des mesures expérimentales mésoscopique et macroscopiques sont effectuées. Néanmoins, pour cet exemple, il est constaté qu’il n’est pas possible de calculer les paramètres du modèle probabiliste *a priori* qui minimisent simultanément les deux indicateurs numériques. Cela signifie que d’autres modèles probabilistes *a priori* (par exemple [5, 6, 7]) sont à tester pour l’identification. Enfin, cette méthode doit être utilisée avec des mesures expérimentales (non construites numériquement).

5 Remerciement

Cette recherche a été supportée par l’Agence Nationale de la Recherche dans le projet TYCHE – ANR-2010-BLAN-0904.

Références

- [1] M. Bornert, T. Bretheau, P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux I. Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*, Hermes Science Publications, 2001.
- [2] C. Desceliers, R. Ghanem, C. Soize. *Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66(6), 978-1001, 2006.
- [3] C. Desceliers, C. Soize, R. Ghanem. *Identification of chaos representations of elastic properties of random media using experimental vibration tests*. Computational Mechanics, 39(6), 831-838, 2007.
- [4] C. Desceliers, C. Soize, Q. Grimal, M. Talmant, S. Naili. *Determination of the random anisotropic elasticity layer using transient wave propagation in a fluid-solid multilayer : Model and experiments*. Journal of the Acoustical Society of America, 125(4), 2027-2034, 2009.
- [5] J. Guillemot, C. Soize. *A stochastic model for elasticity tensors with uncertain material symmetries*. International Journal of Solids and Structures, 47, 22-23, 3121-3130, 2010.
- [6] J. Guillemot, A. Noshadravan, C. Soize, R. Ghanem. *A probabilistic model for bounded elasticity tensor random fields with application to polycrystalline microstructures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200, 17-20, 1637-1648, 2011.
- [7] J. Guillemot, C. Soize. *Non-Gaussian positive-definite matrix-valued random fields with constrained eigenvalues : Application to random elasticity tensors with uncertain material symmetries*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 88(11), 1128-1151, 2011
- [8] F. Hild, S. Roux. *Digital image correlation : from measurement to identification of elastic properties - a review*, Strain, 42, 69-80, 2006.
- [9] K. Sab. *On the homogenization and the simulation of random materials*, European Journal of Mechanics A/Solids, 11(5), 585-607, 1992.
- [10] C. Soize. *Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194, 1333-1366, 2005.
- [11] C. Soize. *Non-Gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 26-64, 2006.
- [12] C. Soize. *Construction of probability distributions in high dimension using the maximum entropy principle : Applications to stochastic processes, random fields and random matrices*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 76, 1583-1611, 2008.
- [13] C. Soize. *Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size*. Probabilistic Engineering Mechanics, 23, 307-323, 2008.
- [14] P. Suquet. *Limit analysis and homogenization*, Comptes Rendus de l'académie des sciences Série II, 296, 1355-1358, 1983.
- [15] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*, Springer, 2002.