



**HAL**  
open science

# Un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier Clifford pour les images couleur : les GCFD3

José Mennesson, Christophe Saint-Jean, Laurent Mascarilla

## ► To cite this version:

José Mennesson, Christophe Saint-Jean, Laurent Mascarilla. Un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier Clifford pour les images couleur : les GCFD3. *Traitement du Signal*, 2012, 29 (3-4-5), pp.359-382. 10.3166/TS.29.359-382 . hal-00808069

**HAL Id: hal-00808069**

**<https://hal.science/hal-00808069>**

Submitted on 4 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier Clifford pour les images couleur : les $GCFD_3$

José Mennesson<sup>1</sup>, Christophe Saint-Jean<sup>1</sup>,  
Laurent Mascarilla<sup>1</sup>

Laboratoire MIA  
Avenue Michel Crépeau  
17000 La Rochelle, France  
{jose.mennesson,christophe.saint-jean,laurent.mascarilla}@univ-lr.fr

---

**RÉSUMÉ.** Dans cet article, nous proposons un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier pour la reconnaissance de formes couleur : les  $GCFD_3$ . Ceux-ci sont construits en utilisant la transformée de Fourier Clifford couleur (TFC) de Batard et al. (2010). Ils sont invariants en translation et en rotation et permettent d'éviter un traitement marginal des images couleur. Contrairement aux  $GCFD_1$  développés dans (Mennesson et al., 2011), l'objectif est d'obtenir des descripteurs admettant une invariance supplémentaire au changement de bivecteur (un plan couleur qui paramètre la TFC) ainsi qu'une réduction du nombre de descripteurs nécessaires à la reconnaissance. Ces descripteurs sont testés dans le cadre de la reconnaissance d'images couleur sur différentes bases d'images, montrant leur capacité à identifier des objets couleur.

**ABSTRACT.** In this paper, a new set of Fourier descriptors for color image recognition, the  $GCFD_3$ , is proposed. These descriptors are computed using the color Clifford Fourier transform (CFT) of Batard et al. (2010). The  $GCFD_3$  are invariant under translation and rotation and avoid a marginal processing of color images. Unlike the  $GCFD_1$  defined in (Mennesson et al., 2011), the goal is to obtain invariant descriptors under bivector change (a color plane parameterizing the CFT) and to reduce the size of the descriptors vector required for image recognition. These descriptors are tested in a color image recognition framework on different well-known image databases, showing their capabilities to identify color objects.

**MOTS-CLÉS :** transformée de Fourier, descripteur couleur, algèbre de Clifford, images couleur, reconnaissance de formes

**KEYWORDS:** Fourier transform, descriptor, Clifford algebra, color images, pattern recognition

---

DOI:10.3166/TS.x.1-24 © 2012 Lavoisier

## 1. Abstract

In the literature, there are many recent advances in terms of image recognition (Antani, 2002 ; Datta *et al.*, 2008). The recognition process depends highly on discriminative and invariant descriptors. Among them, one can cite moment-based descriptors such as Hu invariants (Hu, 1962), Legendre moments or Zernike moments (Flusser *et al.*, 2009). Beside this approach, SIFT (Scale-Invariant Feature Transform) descriptors are a popular choice giving very good results (Lowe, 1999).

An alternative to these methods is to define descriptors in the frequency domain. Among them, 2D Fourier descriptors (Derrode, Ghorbel, 2001 ; Zhang, Lu, 2002 ; Smach *et al.*, 2008) are widely used because of their invariance properties, speed of convergence, low computational time, *etc.* The majority of these frequency-based methods for image recognition are dedicated to grayscale images. Extending these approaches to color images is not straightforward as the images are no longer defined as functions from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}$  but from  $\mathbb{R}^2$  to  $\mathbb{R}^3$ , *i.e.* the value of each pixel is no longer a scalar but a vector.

The extension of descriptors to color images is generally based on a marginal processing of the three color channels (r,g,b) (Smach *et al.*, 2008). Descriptors extracted from each channel are concatenated to form the feature vector. In order to avoid this marginal processing, other approaches consist in encoding the *RGB* color space in the space of pure quaternions (Sangwine, Horne, 1998 ; Denis, 2007 ; Denis *et al.*, 2007), *i.e.*,

$$f_H(x_1, x_2) = r(x_1, x_2)i + g(x_1, x_2)j + b(x_1, x_2)k \quad (1)$$

where  $r(x_1, x_2)$ ,  $g(x_1, x_2)$  and  $b(x_1, x_2)$  are the r,g,b channels of the color image and  $i, j, k$  are pure quaternions.

A more general solution consists in coding the *RGB* color space using Clifford algebras (Hestenes, Sobczyk, 1984) to achieve color treatments. In this framework, Batard *et al.* (2010) propose to code the *RGB* colors as vectors of  $\mathbb{R}_{4,0}$  :

$$f_C(x_1, x_2) = r(x_1, x_2)e_1 + g(x_1, x_2)e_2 + b(x_1, x_2)e_3 \quad (2)$$

Their Clifford Fourier transform (*CFT*) is mathematically rigorous and clarifies relations between the Fourier transform and the action of the translation group through the action of a spinor group. The definition of the *CFT* is

$$\widehat{f}_B(u_1, u_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{1}{2}(x_1 u_1 + x_2 u_2)(B + I_4 B)} f(x_1, x_2) e^{-\frac{1}{2}(x_1 u_1 + x_2 u_2)(B + I_4 B)} dx_1 dx_2 \quad (3)$$

where  $B$  and  $I_4 B$  are unit bivectors of  $\mathbb{R}_{4,0}$ .

The parameter  $B$  corresponds to a color analysis plane for the computation of the *CFT*. The algorithm to compute the Clifford Fourier transform from its decomposi-

tion in a parallel and an orthogonal part is given.

The Generalized Color Fourier Descriptors (*GCFD1*) based on the *CFT* (Mennesson *et al.*, 2010) are then recalled and their non-invariance under the choice of the bivector  $B$  is emphasized. These descriptors consist in computing the Generalized Fourier Descriptors (*GFD1*) of Smach *et al.* (2008) on the parallel and the orthogonal parts of the *CFT*. The two sets of descriptors are then concatenated in a single feature vector which is invariant under translation and rotation by construction.

The core of this article proposes a new set of generalized color Fourier descriptors, the so-called *GCFD3*, invariant under the choice of the bivector. Their construction is inspired by the definition of the *GFD1*. Indeed, the *GCFD3* are computed by integrating the magnitude of the vector values of the reconstructed *CFT* on discrete circles. The invariance under translation is provided by taking the magnitude while the invariance under rotation is obtained by integrating on discrete circles. The invariance under the choice of the bivector is demonstrated. The key point of this demonstration is to considerate the sum of two symmetrical values of the *CFT* with respect to the origin of the frequency domain. In fact, we use a generalized Euler formula for isoclinic rotations of  $\mathbb{R}_{4,0}$  vectors. This allows to transform the sum of two isoclinic rotations (which depend on a bivector) into a simple cosine which is independent of the bivector choice.

The comparison between *GCFD3*, *GFD1* and *GCFD1* is achieved on three well-known databases (COIL-100 (Nene *et al.*, 1996), color FERET (Phillips *et al.*, 1998) and a noisy version of color FERET). A *SVM* (support vector machine) classifier (Chang, Lin, 2001) is used to compute recognition rates with a 10 cross-fold validation algorithm. Experimentations have confirmed that the *GCFD3* are effectively invariant under the choice of the bivector. In most cases, one can assess that in term of recognition rates, the following order applies  $GFD1 < GCFD3 < GCFD1$ . This result is not surprising as *GFD1* contains only frequency information of the parallel part of the *CFT*, *GCFD1* contains the frequency information of the two parts of the *CFT* and *GCFD3* is an aggregation of the frequency information of *GCFD1*. The *GCFD3* give also competitive results versus the quaternionic Fourier-Mellin descriptors of (Guo, Zhu, 2011) and the marginal method of Smach *et al.* (2008).

## 2. Introduction

Dans la littérature, il existe de nombreuses méthodes fréquentielles dédiées à la reconnaissance de formes. Parmi elles, les descripteurs de Fourier 2D (Derrode, Ghorbel, 2001 ; Zhang, Lu, 2002 ; Smach *et al.*, 2008) sont largement utilisés en particulier pour leurs propriétés d'invariance, leur vitesse de convergence et leur faible temps de calcul. La majorité des méthodes fréquentielles pour la reconnaissance d'images s'appliquent aux images en niveaux de gris. L'extension de ces approches aux images couleur n'est pas directe car les images ne sont plus définies comme des fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  mais de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . La valeur de chaque pixel n'est plus un scalaire mais un vecteur.

De nombreuses approches fréquentielles sont étendues à la couleur en utilisant des méthodes *ad hoc* comme la méthode marginale (Smach *et al.*, 2008). D'autres approches consistent à coder l'espace couleur *RVB* par l'espace des quaternions purs (Denis, 2007 ; Denis *et al.*, 2007) ou par les algèbres de Clifford (Batard *et al.*, 2010) pour réaliser les traitements couleur. Dans un travail antérieur, nous avons défini des descripteurs de Fourier couleur en utilisant une transformée de Fourier dédiée aux images couleur (Menesson *et al.*, 2010). Dans cet article, nous définissons un nouvel ensemble de descripteurs couleur.

Cet article est une extension de (Menesson *et al.*, 2012) dans lequel la Transformée de Fourier Couleur (*TFC*) de Batard *et al.* (Batard *et al.*, 2010) est rappelée ainsi que les descripteurs de Fourier couleur généralisés *GCFD1* (Menesson *et al.*, 2011). Un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier couleur *GCFD3*, invariant en translation et en rotation, est ensuite défini. Une série d'expérimentations sur des bases d'images connues de la littérature (COIL-100 (Nene *et al.*, 1996) et color FERET (Phillips *et al.*, 1998)) est menée, montrant l'efficacité de cette approche pour la reconnaissance d'images couleur.

### 2.1. Une transformée de Fourier Clifford couleur (*TFC*)

Les transformées de Fourier classiques (Bracewell, 1986 ; Bornard *et al.*, 1986 ; Ghorbel, 1993) ne sont définies que pour des images en niveaux de gris. La solution la plus immédiate et aussi la plus utilisée pour traiter les images couleur revient à calculer trois transformées de Fourier indépendamment sur chaque canal de l'image. Cette "généralisation" marginale pose un certain nombre de problèmes comme l'apparition de "fausses couleurs" dans le cas du filtrage d'images couleur (Serra, 2009).

Pour éviter ce traitement marginal, Batard *et al.* (2010) ont défini une transformée de Fourier pour les fonctions de  $L^2(\mathbb{R}_2; \mathbb{R}_3)$ . Cette transformée se différencie des autres transformées de Fourier couleur (Sangwine, Ell, 2000 ; Ell, 1992) car celle-ci s'appuie fortement sur une interprétation géométrique. Nous verrons que ce point de vue justifie la nécessité de choisir une direction d'analyse. Elle clarifie les relations entre la transformée de Fourier et l'action du groupe des translations à travers le groupe des spineurs. Il est démontré dans (Batard *et al.*, 2010) que la transformée

de Fourier quaternionique de Sangwine et Ell (2000) est un cas particulier de cette définition.

## 2.2. Définitions et rappels

Une algèbre de Clifford  $Cl(E, Q)$  est une algèbre associative unitaire qui est engendrée par un espace vectoriel  $E$  muni d'une forme quadratique  $Q$ . Cette algèbre géométrique contient des éléments connus comme les scalaires ou les vecteurs, mais aussi d'autres éléments (des bivecteurs, trivecteurs, etc.) qui sont définis à l'aide du produit géométrique qui s'écrit pour deux vecteurs  $u$  et  $v$  :

$$uv = B(u, v) + u \wedge v = u \cdot v + u \wedge v \quad (4)$$

$$u^2 = B(u, u) = Q(u) \quad (5)$$

où  $\cdot$  est le produit intérieur,  $\wedge$  est le produit extérieur et  $B(u, v)$  est la forme bilinéaire de  $E$ . L'expression  $u \wedge v$  n'est plus un vecteur mais un bivecteur assimilable à une portion de plan. Un élément général de l'algèbre de Clifford est appelé multivecteur. Par exemple, soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}_3$ . L'algèbre de Clifford  $\mathbb{R}_{3,0}$  est de dimension 8 et admet pour base  $(1, e_1, e_2, e_3, e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3, e_1e_2e_3)$ . Dans ce cadre, la rotation d'un vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}_{3,0}$  s'écrit

$$v_{rot} = e^{-\frac{\theta}{2}B} v e^{\frac{\theta}{2}B} \quad (6)$$

avec  $B$  un bivecteur unitaire de  $\mathbb{R}_{3,0}$  et  $\theta$  un angle de rotation.

En choisissant de plonger les pixels  $RVB$  d'une image couleur dans l'algèbre  $\mathbb{R}_{4,0}^1$  (les vecteurs de  $\mathbb{R}_{4,0}$ ), on obtient le vecteur :

$$f(x) = r(x)e_1 + v(x)e_2 + b(x)e_3 + 0 e_4. \quad (7)$$

avec  $x = (x_1, x_2)$  et  $r, v, b$  les canaux rouge, vert et bleu d'une image couleur.

La  $TFC$  est paramétrée par un bivecteur unitaire  $B$  (identifiable à un plan d'analyse) et s'écrit :

$$\widehat{f}_B(u) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{1}{2}\langle u, x \rangle B} e^{\frac{1}{2}\langle u, x \rangle I_4 B} f(x) e^{-\frac{1}{2}\langle u, x \rangle B} e^{-\frac{1}{2}\langle u, x \rangle I_4 B} dx \quad (8)$$

où  $I_4$  est le pseudo-scalaire de  $\mathbb{R}_{4,0}$  et  $I_4 B$  est un bivecteur unitaire orthogonal à  $B$ . Un bivecteur unitaire  $B$  peut être obtenu à partir du produit de deux vecteurs unitaires orthogonaux, et nous avons choisi  $B = ce_4 = c \wedge e_4$  où  $c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$ ,  $c$  est un vecteur couleur choisi par l'utilisateur. Cette transformée de Fourier couleur est inversible et son inverse s'écrit :

$$\widetilde{f}_B(u) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}\langle u, x \rangle B} e^{-\frac{1}{2}\langle u, x \rangle I_4 B} f(x) e^{\frac{1}{2}\langle u, x \rangle B} e^{\frac{1}{2}\langle u, x \rangle I_4 B} dx \quad (9)$$

Dans le cadre des algèbres de Clifford, un vecteur peut être décomposé en une partie parallèle et une partie orthogonale par rapport à un bivecteur  $B$  (page 18 de (Hestenes, Sobczyk, 1984)). Pour une image  $f$  et un bivecteur  $B$ , on peut écrire :

$$f = fBB^{-1} = (f \cdot B + f \wedge B)B^{-1} \quad (10)$$

$$= f_{\parallel B} + f_{\perp B} \quad (11)$$

où

$$f_{\parallel B} = P_B(f) \equiv (f \cdot B)B^{-1} \quad (12)$$

$$f_{\perp B} = P_B^\perp(f) \equiv (f \wedge B)B^{-1} \quad (13)$$

$P_B(f)$  (respectivement  $P_B^\perp(f)$ ) représente la projection parallèle (respectivement orthogonale) de  $f$  sur un bivecteur  $B$ .

Après quelques calculs élémentaires, l'équation 8 peut être réécrite selon cette décomposition :

$$\widehat{f}_B(\mathbf{u}) = \widehat{f}_{\parallel B}(\mathbf{u}) + \widehat{f}_{\perp B}(\mathbf{u}) \quad (14)$$

où

$$\widehat{f}_{\parallel B}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle}{2} B} f_{\parallel B}(\mathbf{x}) e^{-\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle}{2} B} d\mathbf{x} \quad (15)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f_{\parallel B}(\mathbf{x}) e^{-\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle B} d\mathbf{x} \quad (16)$$

$$\widehat{f}_{\perp B}(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^2} f_{\perp B}(\mathbf{x}) e^{-\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle I_4 B} d\mathbf{x} \quad (17)$$

Les bivecteurs  $B$  et  $I_4 B$  sont identifiables au complexe imaginaire pur  $i$  car  $B^2 = (I_4 B)^2 = -1$ . Les équations 16 et 17 sont alors calculées à l'aide de deux transformées de Fourier rapides usuelles.

L'algorithme de la transformée de Fourier Clifford est résumé dans la figure 1.

### 2.3. Reconstruction de la TFC

En fonction de l'application, il peut être souhaitable de reconstruire  $\widehat{f}_B$  à partir de  $\widehat{f}_{\parallel B}$  et  $\widehat{f}_{\perp B}$  (Mennesson, 2011). Le vecteur  $\widehat{f}_B$  s'écrit :

$$\widehat{f}_B(\mathbf{u}) = \widehat{f}_{1,B}(\mathbf{u})\mathbf{e}_1 + \widehat{f}_{2,B}(\mathbf{u})\mathbf{e}_2 + \widehat{f}_{3,B}(\mathbf{u})\mathbf{e}_3 + \widehat{f}_{4,B}(\mathbf{u})\mathbf{e}_4 \quad (18)$$

où  $\widehat{f}_{1,B}(\mathbf{u})$ ,  $\widehat{f}_{2,B}(\mathbf{u})$ ,  $\widehat{f}_{3,B}(\mathbf{u})$ ,  $\widehat{f}_{4,B}(\mathbf{u})$  sont des inconnues qu'il convient de déterminer à l'aide de ses projections. L'équation 14 peut être réécrite plus en détails comme :

$$\begin{aligned} \widehat{f}_B(\mathbf{u}) = & \mathbf{c} \left[ (\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{c}) + (\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{c}B)B \right] + \\ & \mathbf{v} \left[ (\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}) + (\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}I_4 B)(I_4 B) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

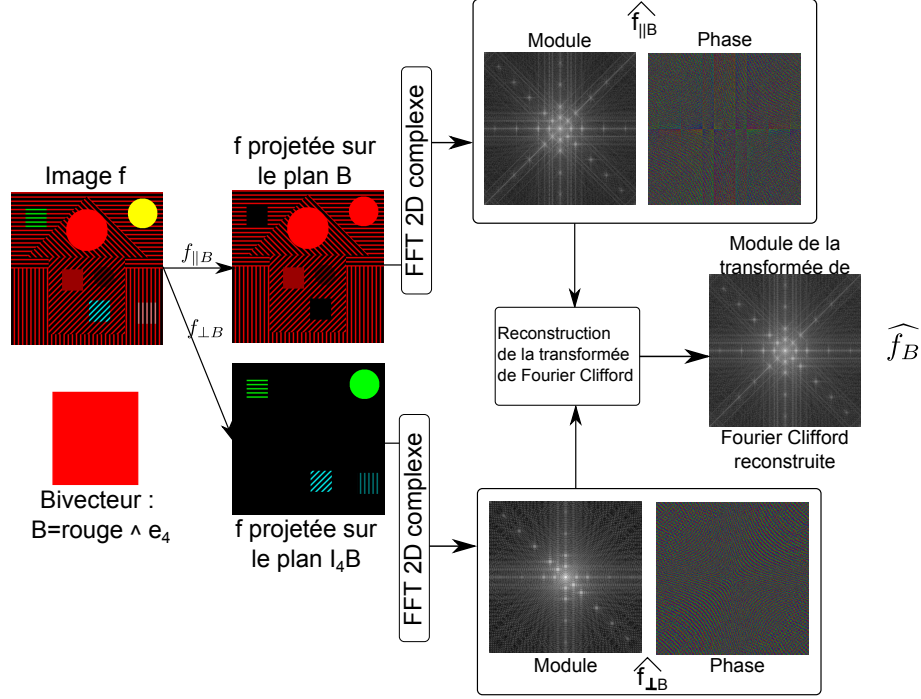


Figure 1. Visualisation de la transformée de Fourier Clifford couleur avec le bivecteur  $B_r = \text{rouge} \wedge e_4$

où  $v$  et  $w$  définissent une base orthonormée dans le plan engendré par  $I_4B$ . Pour la résoudre, on peut alors écrire un système de quatre équations à quatre inconnues (voir le système (1) de la figure 2).

La résolution de ce système d'équations s'écrit

$$\widehat{f}_B(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u})\mathbf{c} + \beta(\mathbf{u})\mathbf{c}B + \xi(\mathbf{u})\mathbf{v} + \psi(\mathbf{u})\mathbf{v}I_4B \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &= [\alpha(\mathbf{u})c_1 + \xi(\mathbf{u})v_1 + \psi(\mathbf{u})w_1] e_1 + \\ & \quad [\alpha(\mathbf{u})c_2 + \xi(\mathbf{u})v_2 + \psi(\mathbf{u})w_2] e_2 + \\ & \quad [\alpha(\mathbf{u})c_3 + \xi(\mathbf{u})v_3 + \psi(\mathbf{u})w_3] e_3 + \beta(\mathbf{u})e_4 \end{aligned} \quad (21)$$

La complexité algorithmique de la transformée de Fourier Clifford couleur, incluant l'étape de reconstruction, est de  $\mathcal{O}(n \log(n))$ . En effet, celle-ci ne nécessite que le calcul de huit projections (en  $\mathcal{O}(n)$ ) et de deux transformées de Fourier rapides (en  $\mathcal{O}(n \log(n))$ ).



$$\begin{array}{c}
\text{cst} \qquad \qquad \qquad \text{cst} \\
f = \underbrace{\boxed{\text{c}}[(f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{c}) + (f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{c}B)B]}_{\text{FFT 2D}} + \underbrace{\boxed{\text{v}}[(f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}) + (f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}I_4B)(I_4B)]}_{\text{FFT 2D}} \\
\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \approx \mathbb{C} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \approx \mathbb{C} \\
\downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
\alpha(\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{u})i \qquad \qquad \qquad \xi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{u})i \\
\boxed{\text{Identifier } i \text{ à } B} \qquad \qquad \qquad \boxed{\text{Identifier } i \text{ à } I_4B} \\
\downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
(\widehat{f}_{\parallel B})_B = \mathbf{c}[\alpha(\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{u})B] \qquad \qquad \qquad \mathbf{v}[\xi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{u})I_4B] = (\widehat{f}_{\perp B})_B \\
\left\{ \begin{array}{l} \alpha(\mathbf{u}) := (\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{c}) \\ \beta(\mathbf{u}) := (\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{c}B) \\ \xi(\mathbf{u}) := (\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}) \\ \psi(\mathbf{u}) := (\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \underbrace{\mathbf{v}I_4B}_{\mathbf{w}}) \end{array} \right. = \begin{array}{l} \widehat{f}_{1,B}c_1 + \widehat{f}_{2,B}c_2 + \widehat{f}_{3,B}c_3 \\ \widehat{f}_{4,B} \\ \widehat{f}_{1,B}v_1 + \widehat{f}_{2,B}v_2 + \widehat{f}_{3,B}v_3 \\ \widehat{f}_{1,B}w_1 + \widehat{f}_{2,B}w_2 + \widehat{f}_{3,B}w_3 \end{array}
\end{array}$$

Figure 2. Système d'équations permettant la reconstruction de la transformée de Fourier Clifford couleur

### 3. Les descripteurs $GCFD1$

Smach *et al.* (2008) proposent entre autres un ensemble de descripteurs de Fourier généralisés invariants en translation et en rotation que nous appelons  $GFD1$ . Ces descripteurs dédiés aux images en niveaux de gris sont étendus à la couleur à l'aide de la méthode marginale. Trois ensembles de descripteurs sont ainsi extraits (un ensemble par canal) et sont concaténés pour former un unique vecteur de descripteurs. Plus récemment, ces descripteurs ont été étendus aux images couleur à l'aide de la  $TFC$  : les  $GCFD$  (Menesson *et al.*, 2010).

Parmi ces nouveaux ensembles de descripteurs couleur, les descripteurs  $GCFD1$  sont définis par :

$$\boxed{GCFD1_{\parallel B}(f) = \left\{ I_{\parallel B}^{(0,0)t}(f), \frac{I_{\parallel B}^{(0,1)t}(f)}{I_{\parallel B}^{(0,0)t}(f)}, \dots, \frac{I_{\parallel B}^{(0,m)t}(f)}{I_{\parallel B}^{(0,0)t}(f)} \right\}} \quad (22)$$

avec

$$I_{\parallel B}^{\xi}(f) = \int_0^{2\pi} |\widehat{f}_{\parallel B}(R_{\theta}(\xi))|^2 d\theta \quad (23)$$

et  $m$  est le nombre de descripteurs calculés,  $\xi$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  et  $R_{\theta}$  est un opérateur de rotation.

De manière similaire,  $GCFD1_{\perp B}$  est défini grâce à  $\widehat{f}_{\perp B}$ . Finalement, le vecteur de descripteurs est de taille  $2 \times m$  :

$$\boxed{GCFD1_B(f) = \{GCFD1_{\parallel B}(f), GCFD1_{\perp B}(f)\}} \quad (24)$$

Le calcul des invariants  $I_{\parallel B}^{\xi}$  et  $I_{\perp B}^{\xi}$  est illustré dans la figure 3.

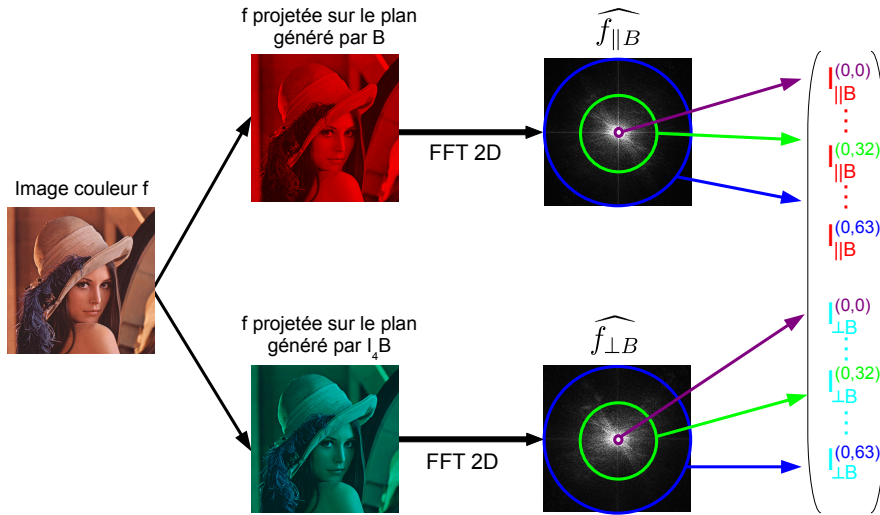


Figure 3. Extraction des invariants  $I_{\parallel B}^{\xi}$  et  $I_{\perp B}^{\xi}$  d'une image couleur avec  $B_r = \text{rouge} \wedge e_4$

Pour calculer l'ensemble des invariants  $I_{\parallel B}^{\xi}$ , les valeurs sur la grille discrète de la transformée de Fourier discrète 2D doivent être intégrées sur un cercle dont le rayon  $r$  est défini pour chaque descripteur (Smach *et al.*, 2008).

Soulignons qu'il résulte de cette approche seulement deux ensembles de descripteurs au lieu de trois pour la méthode marginale. Ces descripteurs contiennent moins de redondances colorimétriques et sont donc plus pertinents. De plus, cette méthode apporte un gain en complexité algorithmique car la transformée de Fourier Clifford ne nécessite que deux transformées de Fourier (au lieu de trois pour la méthode marginale).

Une remarque fondamentale est que ces descripteurs dépendent fortement du bivecteur  $B$ , paramètre de la *TFC* qui spécifie une direction d'analyse. Dans l'objectif de s'affranchir de ce paramètre, nous proposons un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier couleur : les *GCFD3*.

#### 4. Les descripteurs *GCFD3*

Les descripteurs *GCFD1* sont construits en considérant séparément les parties parallèle et orthogonale de la *TFC*. Il en résulte un ensemble de descripteurs dépendant du choix de  $B$ . Dans l'optique d'obtenir des descripteurs invariants à ce choix,

nous proposons un nouvel ensemble de descripteurs à partir de la *TFC* reconstruite (cf partie 2.3) en s'inspirant des descripteurs généralisés de Smach *et al.* (2008).

#### 4.1. Définition des *GCFD3*

La transformée de Fourier Clifford d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}_{4,0}^1$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}_{4,0}^1$  paramétrée par un bivecteur  $B$ . En remplaçant le module d'un complexe par la magnitude d'un vecteur de  $\mathbb{R}_{4,0}$  dans l'équation 23, on obtient l'ensemble des descripteurs réels *GCFD3*( $f$ ) :

$$GCFD3(f) = \left\{ I_B^{(0,0)^t}(f), \frac{I_B^{(0,1)^t}(f)}{I_B^{(0,0)^t}(f)}, \dots, \frac{I_B^{(0,m)^t}(f)}{I_B^{(0,0)^t}(f)} \right\} \quad (25)$$

avec

$$I_B^\xi(f) = \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f}_B(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta \quad (26)$$

où  $\widehat{f}_B$  est la transformée de Fourier Clifford couleur reconstruite calculée pour un bivecteur  $B$  et  $\xi$  est un vecteur.

Nous obtenons alors un vecteur de descripteurs qui est maintenant trois fois plus petit que celui obtenu avec la méthode marginale et deux fois plus petit que celui obtenu avec les *GCFD1*. Comme pour les descripteurs *GCFD1*, deux transformées de Fourier rapides suffisent auxquelles il faut ajouter le coût (linéaire) de la reconstruction.

Il s'avère que les descripteurs *GCFD3* peuvent se déduire à partir des *GCFD1* $_{\parallel B}$  et des *GCFD1* $_{\perp B}$ . En effet, la transformée de Fourier Clifford couleur conserve la propriété d'isométrie de la transformée de Fourier usuelle (égalité de Parseval (Bracewell, 1986)). Cette propriété énonce que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas de la représentation choisie (fréquentielle ou temporelle). Dans notre cas, pour tout bivecteur unitaire  $B$ , on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}_B(\mathbf{u})|^2 d\mathbf{u} \quad (27)$$

D'après la définition de la *TFC*, on prouve que  $|\widehat{f}_B|^2 = |\widehat{f}_{\parallel B}|^2 + |\widehat{f}_{\perp B}|^2$  et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} I_B^\xi(f) &= \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f}_B(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f}_{\parallel B}(R_\theta(\xi)) \right|^2 + \left| \widehat{f}_{\perp B}(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f}_{\parallel B}(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta + \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f}_{\perp B}(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta \\ &= I_{\parallel B}^\xi(f) + I_{\perp B}^\xi(f) \end{aligned} \quad (28)$$

On peut alors écrire :

$$GCFD3(f)_0 = GCFD1_{\parallel B}(f)_0 + GCFD1_{\perp B}(f)_0 \quad (29)$$

et pour les descripteurs  $GCFD3$  d'indice  $i$ ,

$$GCFD3(f)_i = \frac{GCFD1_{\parallel B}(f)_i GCFD1_{\parallel B}(f)_0 + GCFD1_{\perp B}(f)_i GCFD1_{\perp B}(f)_0}{GCFD1_{\parallel B}(f)_0 + GCFD1_{\perp B}(f)_0} \quad (30)$$

Ce résultat ne permet pas d'établir directement l'invariance des descripteurs  $GCFD3$ . Pour cela, on s'appuie sur le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — Pour  $f \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ,  $B_1, B_2$  deux bivecteurs unitaires dans  $\mathbb{R}_{4,0}$  et  $\xi$  un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $I_{B_1}^\xi(f) = I_{B_2}^\xi(f)$ .

PREUVE 2. — Les invariants  $I_B^\xi(f)$  définis dans l'équation 26 s'écrivent :

$$I_B^\xi(f) = \int_0^{2\pi} \left| \widehat{f}_B(R_\theta(\xi)) \right|^2 d\theta \quad (31)$$

$$= \int_0^\pi \left| \widehat{f}_B(R_\theta(\xi)) \right|^2 + \left| \widehat{f}_B(R_{\theta+\pi}(\xi)) \right|^2 d\theta \quad (32)$$

$$= \int_0^\pi \left| \widehat{f}_B(\xi_1 \cos(\theta) + \xi_2 \sin(\theta), -\xi_1 \sin(\theta) + \xi_2 \cos(\theta)) \right|^2 + \left| \widehat{f}_B(\xi_1 \cos(\theta + \pi) + \xi_2 \sin(\theta + \pi), -\xi_1 \sin(\theta + \pi) + \xi_2 \cos(\theta + \pi)) \right|^2 d\theta \quad (33)$$

En posant  $\mathbf{u} = (\xi_1 \cos(\theta) + \xi_2 \sin(\theta), -\xi_1 \sin(\theta) + \xi_2 \cos(\theta))^t$  pour un  $\theta$  fixé (passage du domaine polaire au domaine cartésien), l'égalité suivante est obtenue :

$$|\widehat{f}_B(\mathbf{u})|^2 + |\widehat{f}_B(-\mathbf{u})|^2 = |\widehat{f}_B(\mathbf{u}) + \widehat{f}_B(-\mathbf{u})|^2 + 2\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \widehat{f}_B(-\mathbf{u}) \quad (34)$$

En développant  $|\widehat{f}_B(\mathbf{u}) + \widehat{f}_B(-\mathbf{u})|^2$  et en utilisant une généralisation de la formule d'Euler :

$$e^{\frac{\theta}{2}(B+I_4B)} \mathbf{v} e^{-\frac{\theta}{2}(B+I_4B)} + e^{-\frac{\theta}{2}(B+I_4B)} \mathbf{v} e^{\frac{\theta}{2}(B+I_4B)} = 2\cos(\theta)\mathbf{v}, \quad (35)$$

on obtient

$$\left| \widehat{f}_B(\mathbf{u}) + \widehat{f}_B(-\mathbf{u}) \right|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle}{2}(B+I_4B)} f(\mathbf{x}) e^{-\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle}{2}(B+I_4B)} + e^{-\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle}{2}(B+I_4B)} f(\mathbf{x}) e^{\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle}{2}(B+I_4B)} d\mathbf{x} \right|^2 \quad (36)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^2} 2 \cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2 \quad (37)$$

qui ne dépend pas du bivecteur  $B$ .

Concernant l'expression  $\hat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \hat{f}_B(-\mathbf{u})$ , il faut s'intéresser à la décomposition de  $\hat{f}_B$  en sa partie parallèle  $\hat{f}_{\parallel B}$  et orthogonale  $\hat{f}_{\perp B}$  :

$$\hat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \hat{f}_B(-\mathbf{u}) = \left( \hat{f}_{\parallel B}(\mathbf{u}) + \hat{f}_{\perp B}(\mathbf{u}) \right) \cdot \left( \hat{f}_{\parallel B}(-\mathbf{u}) + \hat{f}_{\perp B}(-\mathbf{u}) \right) \quad (38)$$

$$= \left( \hat{f}_{\parallel B}(\mathbf{u}) \cdot \hat{f}_{\parallel B}(-\mathbf{u}) \right) + \left( \hat{f}_{\perp B}(\mathbf{u}) \cdot \hat{f}_{\perp B}(-\mathbf{u}) \right) \quad (39)$$

Chacune des parties de l'expression précédente peuvent être développées :

$$\hat{f}_{\parallel B}(\mathbf{u}) \cdot \hat{f}_{\parallel B}(-\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \hat{f}_{\parallel B}(\mathbf{u}) \hat{f}_{\parallel B}(-\mathbf{u}) + \hat{f}_{\parallel B}(-\mathbf{u}) \hat{f}_{\parallel B}(\mathbf{u}) \right) \quad (40)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) e^{-\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle B} d\mathbf{x}_1 \int_{\mathbb{R}^2} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) e^{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle B} d\mathbf{x}_2 \right. \\ \left. + \int_{\mathbb{R}^2} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) e^{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle B} d\mathbf{x}_1 \int_{\mathbb{R}^2} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) e^{-\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle B} d\mathbf{x}_2 \right) \quad (41)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^4} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) e^{-\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle B} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) e^{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle B} \right. \\ \left. + f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) e^{\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle B} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) e^{-\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle B} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right) \quad (42)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^4} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) e^{(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) B} \right. \\ \left. + f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) e^{-(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) B} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right) \quad (43)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^4} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) \right. \\ \left. (e^{(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) B} + e^{-(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) B}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right) \quad (44)$$

$$= \left( \int_{\mathbb{R}^4} f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) \cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right) \quad (45)$$

De même,

$$\hat{f}_{\perp B}(\mathbf{u}) \cdot \hat{f}_{\perp B}(-\mathbf{u}) = \left( \int_{\mathbb{R}^4} f_{\perp B}(\mathbf{x}_1) f_{\perp B}(\mathbf{x}_2) \cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right) \quad (46)$$

Alors,

$$(\hat{f}_{\parallel B}(\mathbf{u}) \cdot \hat{f}_{\parallel B}(-\mathbf{u}) + \hat{f}_{\perp B}(\mathbf{u}) \cdot \hat{f}_{\perp B}(-\mathbf{u})) \quad (47)$$

$$= \left( \int_{\mathbb{R}^4} (f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) + f_{\perp B}(\mathbf{x}_1) f_{\perp B}(\mathbf{x}_2)) \cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right) \quad (48)$$

$$= \left( \int_{\mathbb{R}^4} (f_{\parallel B}(\mathbf{x}_1) \cdot f_{\parallel B}(\mathbf{x}_2) + f_{\perp B}(\mathbf{x}_1) \cdot f_{\perp B}(\mathbf{x}_2)) \cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right) \quad (49)$$

$$= \left( \int_{\mathbb{R}^4} (f(\mathbf{x}_1) \cdot f(\mathbf{x}_2)) \cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right) \quad (50)$$

Nous pouvons donc en conclure que :

$$|\widehat{f}_B(\mathbf{u})|^2 + |\widehat{f}_B(-\mathbf{u})|^2 = |\widehat{f}_B(\mathbf{u}) + \widehat{f}_B(-\mathbf{u})|^2 - 2\widehat{f}_B(\mathbf{u}) \cdot \widehat{f}_B(-\mathbf{u}) \quad (51)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^2} 2 \cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2$$

$$+ 2 \left( \int_{\mathbb{R}^4} (f(\mathbf{x}_1) \cdot f(\mathbf{x}_2)) \cos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}_2 \rangle) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \right) \quad (52)$$

Cette expression ne dépendant pas de  $B$ , les  $I_B^\xi(f)$  sont donc invariants au changement de bivecteur. ■

Par application de ce théorème sur l'équation 25, on en déduit l'invariance des  $GCFD3$  au choix du bivecteur  $B$ . Le paramètre  $B$  exprime seulement la décomposition mise en oeuvre pour le calcul de la  $TFC$  reconstruite.

**THÉORÈME 3.** — Soit  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ,  $B$  un bivecteur unitaire dans  $\mathbb{R}_{4,0}$  et  $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)^t$  le vecteur contenant les paramètres de la translation.

Si  $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \Delta)$ , alors  $GCFD3(f) = GCFD3(g)$ .

**PREUVE 4.** — Rappelons qu'une translation dans le domaine spatial induit un déphasage dans le domaine spectral :

$$\widehat{g}_B(\mathbf{u}) = e^{\frac{\langle \mathbf{u}, \Delta \rangle}{2} I_4 B} e^{\frac{\langle \mathbf{u}, \Delta \rangle}{2} B} \widehat{f}_B(\mathbf{u}) e^{-\frac{\langle \mathbf{u}, \Delta \rangle}{2} B} e^{-\frac{\langle \mathbf{u}, \Delta \rangle}{2} I_4 B}. \quad (53)$$

On en déduit que  $|\widehat{f}_B|^2 = |\widehat{g}_B|^2$  et donc l'invariance en translation des  $GCFD3$ . ■

**THÉORÈME 5.** — Soit  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ ,  $B$  un bivecteur unitaire dans  $\mathbb{R}_{4,0}$  et  $\theta$  un angle de rotation.

Si  $g(x_1, x_2) = f(x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta), -x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta))$ ,

alors  $GCFD3(f) = GCFD3(g)$ .

**PREUVE 6.** — Pour la  $TFC$ , l'effet d'une rotation s'écrit :

$$\widehat{g}_B(u_1, u_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{1}{2}(x_1 u_1 + x_2 u_2)(B + I_4 B)} f(x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta), -x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta)) e^{-\frac{1}{2}(x_1 u_1 + x_2 u_2)(B + I_4 B)} dx_1 dx_2 \quad (54)$$

Par changements de variables,

$$x'_1 = x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta) \Rightarrow x_1 = x'_1 \cos(\theta) - x'_2 \sin(\theta) \quad (55)$$

$$x'_2 = -x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) \Rightarrow x_2 = x'_1 \sin(\theta) + x'_2 \cos(\theta) \quad (56)$$

On obtient l'équation suivante

$$\widehat{g}_B(u_1, u_2) = \widehat{f}_B(u_1 \cos(\theta) + u_2 \sin(\theta), -u_1 \sin(\theta) + u_2 \cos(\theta)) \quad (57)$$

Les coordonnées fréquentielles subissent donc une rotation d'angle  $\theta$ . L'invariance des  $GCFD3$  en rotation est obtenue en intégrant les valeurs de la transformée de Fourier sur l'ensemble des  $\theta$ . ■

## 5. Expérimentations

Dans cette partie, nous commençons par décrire le protocole expérimental qui a été choisi pour tester nos descripteurs  $GCFD3$ . Ensuite, une série de tests a été menée dans le but de comparer les descripteurs  $GCFD3$  avec les  $GFD1$ , les  $GCFD1$  et les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques  $\phi_\mu$  (Guo, Zhu, 2011). Un sous-ensemble  $GCFD1b$  a été extrait des descripteurs  $GCFD1$  pour comparaison à taille identique avec les  $GCFD3$ .

### 5.1. Les bases d'images utilisées

Les bases d'images utilisées dans cet article sont les bases COIL-100 (Nene *et al.*, 1996) et color FERET (Phillips *et al.*, 1998) utilisés par ailleurs dans (Smach *et al.*, 2008). Pour vérifier la robustesse des descripteurs au bruit, une version bruitée de la base color FERET a été également réalisée.

– **La base d'images COIL-100 (Columbia Object Image Library)** est composée de 7200 images couleur de taille  $128 \times 128$  de 100 objets différents. Chaque image est composée d'un fond noir et chaque objet est pris sous 72 angles de vue différents.



Figure 4. Les 100 objets de COIL-100 (à gauche) - une image de la base (à droite)

– **La base d'images color FERET** est composée d'images portrait de 1408 personnes prises sous différents angles de vue. Dans nos expérimentations, un ensemble de 2992 images contenant 272 personnes représentées de manière égale par 11 images est sélectionné. La taille de ces images est réduite à  $128 \times 128$ .

– **La base color FERET bruitée** est dérivée de la précédente base par l'ajout sur chacun des canaux RGB d'un bruit gaussien  $\mathcal{N}(0, \sigma = 0.23)$ . Cette construction vise à établir une comparaison avec des travaux antérieurs comme Smach *et al.* (2008).



Figure 5. Quelques images de la base color FERET

### 5.2. L'extraction des descripteurs

Pour les ensembles de descripteurs de Fourier considérés, nous avons effectué une intégration sur des cercles de rayon dans  $[1, 64]$ . Ceci produit un vecteur de descripteurs de taille 64 pour  $GCFD3$  et  $GFD1$  et de taille 128 pour les  $GCFD1$  (partie parallèle et orthogonale). Le calcul des descripteurs  $GCFD1b$  consiste à celui des  $GCFD1$  en prenant un pas de 2 pour le rayon  $r$  de l'équation 22. Les  $GCFD1b$  sont donc représentés par un vecteur de taille 64.

Dans le but de comparer notre proposition avec d'autres descripteurs couleur, nous avons également extrait 64 descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques  $\phi_\mu$  (Guo, Zhu, 2011) en croisant le choix de 8 fréquences radiales et de 8 fréquences angulaires. Pour obtenir un vecteur de taille 128, 11 fréquences radiales et 12 fréquences angulaires ont été croisées avant l'élimination de 4 d'entre elles (plus fortes valeurs). Rappelons que cette méthode requiert la redéfinition du centre de l'image pour la construction de la représentation polaire. Pour les deux bases considérées, nous avons finalement choisi de supprimer cette étape, d'une part en considérant que les objets d'intérêt étaient au centre de l'image et d'autre part en constatant que les résultats obtenus par la méthode décrite dans Guo et Zhu (2011) étaient moins bons. Il est à noter que l'algorithme de calcul utilisé ici diffère de celui dans Mennesson *et al.* (2012). En effet, nous avons utilisé l'implémentation de la transformée polaire de l'image fournie par Kovési (2012) et la décomposition périodique/lisse d'image de Moisan (2011) qui permet de supprimer les effets de bord dans le domaine fréquentiel. Dans tous les cas, le quaternion pur  $\mu = (i + j + k)/\sqrt{3}$  a été choisi pour le calcul de ces descripteurs car il correspond à un choix classique de la littérature (Ell, Sangwine, 2007).

### 5.3. Classification

L'étape de classification est réalisée principalement en utilisant un algorithme de Séparateur Vaste Marge ("Support Vector Machine" *SVM*) standard dans l'implémentation LIBSVM (Chang, Lin, 2001). Les  $GFD$ , les  $GCFD$  et les  $\phi_\mu$  sont utilisés comme des vecteurs d'attributs du classifieur. Ceux-ci sont préalablement ramenés



dans l'intervalle  $[-1; 1]$ . Dans nos tests, le noyau classique à base radiale (noyau gaussien) est utilisé :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{2\sigma^2}} \quad (58)$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont les vecteurs de descripteurs des objets,  $\sigma$  est la largeur de bande. Les paramètres  $\sigma$  et  $C$  (le coefficient de pénalisation) ont été empiriquement déterminés par une méthode de grille pour une 10-validation croisée (Duda *et al.*, 2001). Cette même méthode a été utilisée pour le calcul du taux de reconnaissance.

#### 5.4. Expérimentations préliminaires

Dans cette partie, nous souhaitons évaluer la pertinence de nos descripteurs en les confrontant sur des classificateurs plus simples que le SVM. L'objectif est d'étudier la part de la qualité des résultats qui n'est pas due au seul classificateur. Pour cela, nous avons testé les descripteurs *GDF1*, *GCFD1*, *GCFD1b* et *GCFD3* en considérant :

- la règle du MAP dans l'analyse discriminante linéaire (ADL) ;
- le classifieur  $k$ -ppv ( $k$  plus proches voisins).

Concernant l'algorithme de  $k$ -ppv, le paramètre  $k$  a été choisi égal à 1 ou à 5, tout en observant une faible variabilité du taux d'erreur en fonction de  $k$ . Cette expérimen-

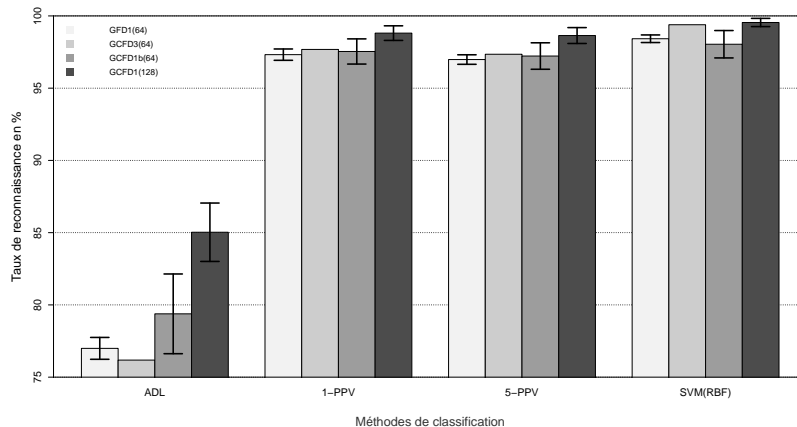


Figure 6. COIL-100 : Performance des *GDF1*, *GCFD3*, *GCFD1b*, *GCFD1* pour 100 bivecteurs aléatoires (moyenne et écart-type)

tation a été reproduite pour 100 bivecteurs aléatoires pour permettre le calcul d'un taux d'erreur moyen ainsi qu'un écart-type pour chacun des descripteurs. Les résultats obtenus sont donnés sur les figures 6 (COIL-100), 7 (color FERET) et 8 (color FERET bruitée). L'écart-type y est représenté par une barre verticale proportionnellement longue, centrée autour de la moyenne. On peut rappeler qu'un tel écart-type n'existe pas pour les *GCFD3* du fait de leur invariance au choix du bivecteur.

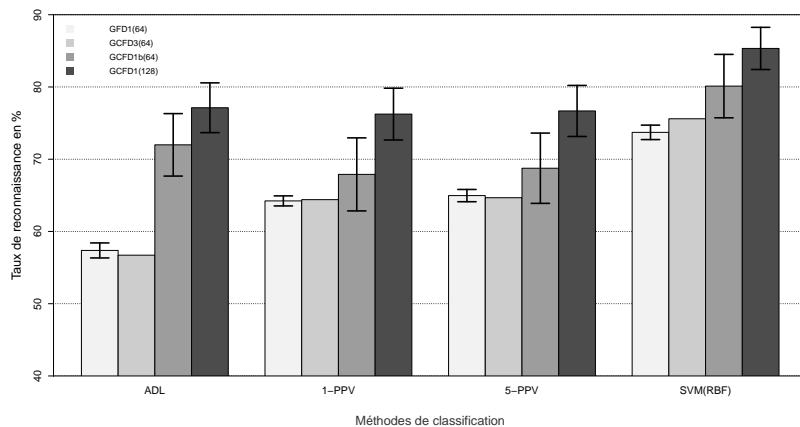


Figure 7. color FERET : Performance des GDF1, GCFD3, GCFD1b, GCFD1 pour 100 bivecteurs aléatoires (moyenne et écart-type)

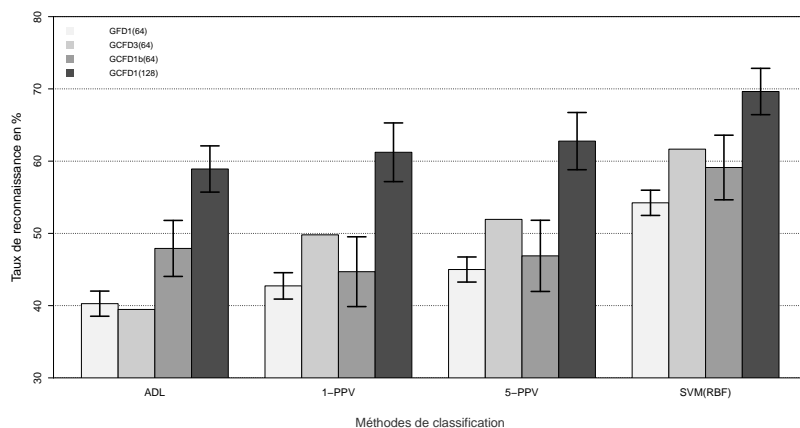


Figure 8. color FERET bruitée : Performance des GDF1, GCFD3, GCFD1b, GCFD1 pour 100 bivecteurs aléatoires (moyenne et écart-type)

Les différents taux de reconnaissance obtenus sont conformes à que l'on pouvait attendre. En effet, la méthode linéaire de classification (ADL) donnent des taux très inférieurs à ceux des classifieurs non-linéaires (k-ppv, SVM). La performance des GCFD3 est en général supérieure à celle des GDF1 et GCFD1b (à part pour la base color FERET) de même taille. Concernant les résultats obtenus avec l'ADL, on peut émettre l'hypothèse que les descripteurs GCFD3 sont moins linéairement séparables que les GDF1. Pour une taille double, les GCFD1 surclassent les autres descripteurs mais introduisent une plus grande sensibilité au choix du bivecteur. Ce résultat est peu surprenant car les GCFD1 concaténent l'information fréquentielle

des plans colorimétriques au lieu de la fusionner comme dans les  $GCFD3$ . En observant les résultats sur la base color FERET et sa version bruitée, on constate que les descripteurs  $GCFD3$  résistent bien mieux au bruit additif gaussien que les  $GFD1$ <sup>1</sup> et les  $GCFD1b$ . En moyenne, la diminution du taux de reconnaissance des  $GCFD3$  est comparable à celle des  $GCFD1$ .

### 5.5. Comparaison avec d'autres descripteurs couleur

Dans cette expérimentation, nous souhaitons établir une comparaison avec les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques (Guo, Zhu, 2011), les  $GFD1$ , les  $GCFD1b$  et les  $GCFD1$  en utilisant les bivecteurs  $B_r = r e_4$ ,  $B_v = v e_4$ ,  $B_\mu = \mu e_4$  et 100 bivecteurs aléatoires. Les tableaux 1, 2 et 3 reprennent les différents résultats obtenus pour le classifieur SVM.

Tableau 1. COIL-100 : Comparaison de 5 descripteurs par SVM(RBF)

COIL-100	$GFD1$ (64)	$GCFD1b$ (64)	$GCFD3$ (64)	$GCFD1$ (128)	$GFD1 B_r + B_v + B_b$ (192)(Smach <i>et al.</i> , 2008)
Bivecteurs	98.04	99.54	99.39	99.83	99.91
$B_r = r e_4$	98.06	98.99		99.56	
$B_v = v e_4$	96.90	99.55		99.86	
$B_b = b e_4$	98.49	98.36		99.25	
$B_\mu = \mu e_4$	$98.42 \pm 0.3$	$98.34 \pm 0.95$		$99.54 \pm 0.3$	
$B_{rand}(\times 100)$ max.	98.87	99.57	99.89	$\phi_\mu(64)$ (Guo, Zhu, 2011) 98.95	$\phi_\mu(128)$ (Guo, Zhu, 2011) 99.25

#### Sur la base COIL-100

On constate que tous les descripteurs testés produisent d'excellents résultats sur cette base d'images dont le contenu est relativement géométrique et de faible variabilité colorimétrique. Les  $GCFD3$  se révèlent être de meilleurs descripteurs que les descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques  $\phi_\mu$ , ceci même lorsque le nombre de descripteurs extraits est supérieur. Le taux des  $GCFD3$  est aussi supérieur à la moyenne des taux de reconnaissance des  $GCFD1b$ , qui varient d'un écart-type 3 fois supérieurs aux taux des  $GCFD1$ . Comme attendu, et ce malgré la redondance de l'information fréquentielle extraite, la version concaténée des 3 descripteurs marginaux  $GFD1$  donne les meilleurs résultats. On peut noter que le paramétrage du bivecteur conduisant à une analyse séparée d'intensité (partie parallèle) et de la chrominance (partie orthogonale) n'est pas un choix optimal pour les descripteurs considérés.

#### Sur la base color FERET et sa version bruitée

Les descripteurs  $GCFD3$  donnent en moyenne un meilleur résultat que les descripteurs  $GFD1$  et  $\phi_\mu$  de taille 64. Le taux obtenu avec les  $GCFD3$  est inférieur à la moyenne des taux des  $GCFD1b$ . Cependant, les taux obtenus avec les bivecteur  $B_v$  et  $B_\mu$  sont bien inférieurs à ceux des  $GCFD3$  et l'écart-type est très important(4.39).

1. Le meilleur choix du bivecteur pour  $GFD1$  donne un taux inférieur à celui de  $GCFD3$

Ce résultat est toutefois bien inférieur à ceux obtenus pour des descripteurs  $GCFD1$ . Ceci peut s'expliquer par une complexité plus grande des images (différences nettes de contenu texture/couleur entre le fond et l'objet d'intérêt) qui est peut-être insuffisamment prise en compte par les  $GCFD3$ . Pour les descripteurs  $\phi_\mu$ , on remarque que l'ajout de fréquences radiales et angulaires ne conduit pas à une forte augmentation du taux de reconnaissance et que leur robustesse au bruit est relativement bonne<sup>2</sup>. Les  $GCFD1$  et les  $GFD1$  version concaténée donnent les meilleurs résultats au fur et à mesure que la taille des descripteurs augmentent. On suppose pour ces derniers que le classifieur SVM permet de pallier à la redondance des 3 descripteurs  $GFD1$ .

Tableau 2. Color FERET : Comparaison de 5 descripteurs par SVM(RBF)

color FERET	$GFD1$ (64)	$GCFD1b$ (64)	$GCFD3$ (64)	$GCFD1$ (128)	$GFD1 B_r + B_v + B_b$ (192)(Smach <i>et al.</i> , 2008)
Bivecteurs	76.70	83.32	75.60	87.90	88.41
$B_r$	73.66	70.32		79.65	
$B_v$	70.49	79.48		84.49	
$B_b$	73.03	70.22		78.10	
$B_\mu$	73.72±1	80.12±4.39		85.34±2.92	
$B_{rand}(\times 100)$ max.	76.14	86.80		90.37	$\phi_\mu(64)$ (Guo, Zhu, 2011) 72.43
					$\phi_\mu(128)$ (Guo, Zhu, 2011) 74.87

Tableau 3. Color FERET bruitée : Comparaison de 5 descripteurs par SVM(RBF)

color FERET bruitée	$GFD1$ (64)	$GCFD1b$ (64)	$GCFD3$ (64)	$GCFD1$ (128)	$GFD1 B_r + B_v + B_b$ (192)(Smach <i>et al.</i> , 2008)
Bivecteurs	45.32	61.20	61.66	71.05	73.16
$B_r$	46.83	50.03		61.99	
$B_v$	48.49	62.46		73.46	
$B_b$	55.28	47.89		62.03	
$B_\mu$	54.23±1.75	59.12±4.47		69.64±3.21	
$B_{rand}(\times 100)$ max.	57.55	65.94		77.27	$\phi_\mu(64)$ (Guo, Zhu, 2011) 63.94
					$\phi_\mu(128)$ (Guo, Zhu, 2011) 63.87

### 5.6. Evaluation de la robustesse au bruit gaussien

Pour cette expérimentation, un bruit gaussien d'un écart-type croissant a été appliqué aux images de la base FERET. Les taux de reconnaissance obtenus avec les  $GFD1_{B_r}$ ,  $GCFD1b_{B_r}$ ,  $GCFD3$  et  $GCFD1_{B_r}$  sont reportés dans la figure 9. Les courbes des taux de reconnaissance des  $GCFD1_{B_r}$  et des  $GCFD3$  décroissent de manière analogue. Cela n'est pas surprenant car ces deux ensembles de descripteurs ont été calculés en intégrant les fréquences des différentes transformées de Fourier sur les mêmes cercles discrets. On observe aussi que les  $GCFD1b_{B_r}$ , de taille similaire aux  $GCFD3$ , sont moins robustes au bruit gaussien que ces derniers. En effet, ces descripteurs sont un sous-ensemble des  $GCFD1$  et donc certaines fréquences sont absentes dans cet ensemble. Enfin, les  $GFD1_{B_r}$  sont beaucoup moins robustes au bruit gaussien que les autres descripteurs.

2. Le type de bruit sélectionné affecte essentiellement les hautes fréquences

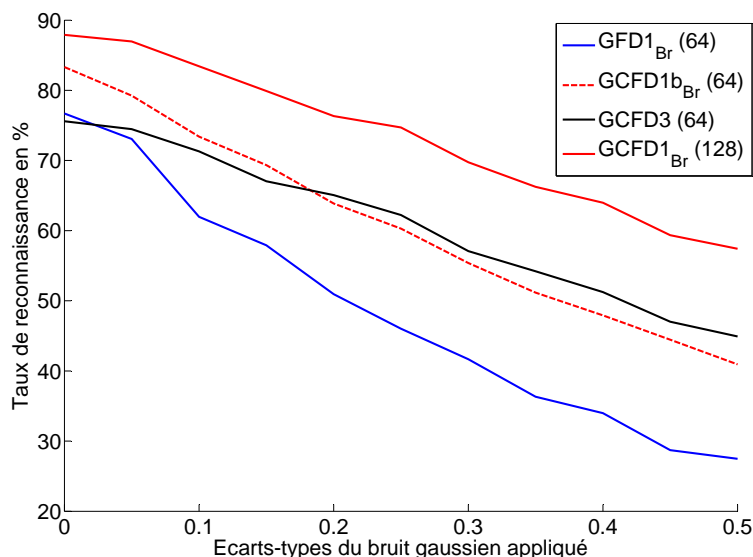


Figure 9. Color FERET : Taux de reconnaissance des  $GFD1_{Br}$ ,  $GCFD1b_{Br}$ ,  $GCFD3$  et  $GCFD1_{Br}$  en fonction de l'écart-type du bruit gaussien

### Conclusion et perspectives

Les descripteurs de Fourier généralisés couleur  $GCFD$  que nous proposons sont construits sur la base des descripteurs généralisés  $GFD$  en niveaux de gris de Smach *et al.* (2008). Ils en héritent les propriétés d'invariance en rotation et translation. Nos travaux précédents (Mennesson *et al.*, 2010) ont étendu les 2 variantes originales dites  $GFD1$  et  $GFD2$  à la couleur pour donner les  $GCFD1$  et  $GCFD2$  respectivement. Dans cet article nous introduisons de nouveaux descripteurs dit  $GCFD3$  qui peuvent être calculés à partir des termes orthogonaux et parallèles des  $GCFD1$ . La conséquence majeure de cette manipulation est de produire des descripteurs qui ne dépendent plus d'un plan d'analyse, *i.e.* d'un bivecteur, paramètre de la transformation de Fourier couleur (Batard *et al.*, 2010).

L'originalité de notre approche est d'utiliser le formalisme des algèbres de Clifford pour traiter les images couleurs, dans le domaine fréquentiel, de façon vectorielle et non scalaire. En cela, elle se distingue des extensions à la couleur des descripteurs  $GFD$  proposées par Smach *et al.* (2008) qui procèdent plan couleur par plan couleur. Au delà d'une grande élégance mathématique, cette construction produit des ensembles de descripteurs plus compacts et, à taille d'image égale, nos ensembles de descripteurs  $GCFD3$  sont trois fois plus petits que la concaténation de 3 ensembles

*GFD1*. La complexité de calcul est aussi réduite et ils contiennent, par construction, moins de redondances colorimétriques, ce qui renforce leur intérêt.

De plus, au contraire des *GCFD1*, les nouveaux descripteurs sont indépendants d'un choix de bivecteur de référence. En effet, dans (Menesson *et al.*, 2010), il est montré que les *GCFD1* en sont, eux, très dépendants. Selon le contexte, cette propriété pourrait permettre d'améliorer les taux de bonne classification.

Quand les images ne contiennent que l'objet d'intérêt sur fond noir, nos expérimentations, montrent que les *GCFD3* donnent des résultats comparables aux *GCFD1*, à taille de descripteur moindre et à coût de calcul identique. Les taux de reconnaissance obtenus avec les *GCFD3* sont même meilleurs que les *GCFD1b*. Cependant, pour les images dont l'arrière-plan n'est pas uniforme, les *GCFD1* semblent être une meilleure approche puisque le choix d'un bivecteur adapté permet de filtrer la couleur dominante de cet arrière-plan. Le choix de tel ou tel descripteur est donc lié à l'application.

Signalons, pour terminer cette comparaison, que nos expérimentations ont montré que les *GCFD3* sont plus robustes au bruit que les *GFD1b* et les *GFD1*.

Nous avons également comparé nos descripteurs aux descripteurs de Fourier-Mellin quaternioniques (Guo, Zhu, 2011) qui donnent de bons taux de reconnaissance quand l'objet d'intérêt est au centre des images à reconnaître. Rappelons que notre approche ne nécessite aucune estimation préalable de nature géométrique puisque travaillant directement dans le domaine fréquentiel. En revanche, la transformée de Fourier-Mellin permet de définir des descripteurs invariants en échelle. Ce constat ouvre une première perspective de travail sur la définition de descripteurs de Fourier-Mellin Clifford. Ces descripteurs couleur devraient permettre d'ajouter la propriété d'invariance en échelle.

Une autre perspective est l'étude des *GCFD1* et des *GCFD3* dans des espaces colorimétriques distincts de *RVB* dont les composantes sont connues pour être corrélées. Dans le tableau 4, nous faisons figurer quelques résultats préliminaires pour différents espaces colorimétriques sur la base color FERET.

Tableau 4. Expérimentations sur le choix de l'espace colorimétrique

color FERET				
Descripteurs	<i>RVB</i>	<i>Lab</i>	<i>YCrCb</i>	$I_1 I_2 I_3$
<i>GCFD1</i> (128)	85.34± 2.9	88.63± 2.9	85.99± 3.3	92.14± 0.9
max.	90.37	95.35	94.79	95.58
<i>GCFD3</i> (64)	75.60	78.74	78.41	82.12

Cette expérimentation confirme une fois de plus que l'espace *RVB* n'est pas un bon choix pour l'approche fréquentielle couleur. Des espaces colorimétriques dont les composantes sont décorréliées, comme l'espace  $I_1 I_2 I_3$  défini par Ohta *et al.* (Ohta *et al.*, 1980), semblent être bien plus prometteurs.

Une dernière perspective correspond à la définition de descripteurs de Fourier Clifford couleur locaux. En effet, les approches locales comme celle des descripteurs *SIFT* couleur donnent de meilleurs taux de reconnaissance au détriment d'un temps de calcul long et d'une taille de vecteur de descripteurs importante. À l'aide du logiciel

“ColorDescriptor” (Sande *et al.*, 2010) et de la méthode de classification par vote majoritaire de Choksuriwong *et al.* (2008), les descripteurs OpponentSIFT calculés sur 10 (resp. 20) points d’intérêt par image permettent d’obtenir 72.12% (resp. 96.89%) de bonne classification sur la base color FERET. Les taux obtenus sont relativement proches de ceux de nos méthodes mais pour des tailles de vecteur de descripteurs bien supérieures : chaque point est décrit par  $128 \times 3 = 384$  valeurs ! Nos descripteurs calculés localement devraient être plus compacts et possiblement plus efficaces. . .

## Bibliographie

- Antani S. (2002). A survey on the use of pattern recognition methods for abstraction, indexing and retrieval of images and video. *Pattern Recognition*, vol. 35, n° 4, p. 945–965.
- Batard T., Berthier M., Saint-Jean C. (2010). Clifford fourier transform for color image processing. In E. Bayro-Corrochano, G. Scheuermann (Eds.), *Geometric algebra computing in engineering and computer science*, p. 135-161. Springer Verlag. (ISBN 978-1-84996-107-3)
- Bornard G., Gauthier J.-P., Silbermann M. (1986). Mouvements et traitement d’images. *Traitement du Signal*, vol. 6, p. 281-290.
- Bracewell R. (1986). *The fourier transform and its applications*. McGraw-Hill Companies. Hardcover. (ISBN 0070070156)
- Chang C.-C., Lin C.-J. (2001). *Libsvm: a library for support vector machines*. (Software available at <http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm>)
- Choksuriwong A., Emile B., Laurent H., Rosenberger C. (2008). Comparative study of global invariant descriptors for object recognition. *Journal of Lightwave Technology Electronic Imaging*, vol. 17, n° 2.
- Datta R., Joshi D., Li J., Wang J. Z. (2008). Image retrieval: Ideas, influences, and trends of the new age. *ACM Comput. Surv.*, vol. 40, n° 2, p. 5:1–5:60.
- Denis P. (2007). *Quaternions et Algèbres Géométriques, de nouveaux outils pour les images numériques couleur*. These, Université de Poitiers. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00277993>
- Denis P., Carre P., Fernandez-Maloigne C. (2007). Spatial and spectral quaternionic approaches for colour images. *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 107, n° 1-2, p. 74 - 87. (Special issue on color image processing)
- Derrode S., Ghorbel F. (2001). Robust and efficient fourier-mellin transform approximations for gray-level image reconstruction and complete invariant description. *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 83, n° 1, p. 57-78.
- Duda R. O., Hart P. E., Stork D. G. (2001). *Pattern Classification (2nd Edition)* (2<sup>e</sup> éd.). Wiley-Interscience. Hardcover. (ISBN 0471056693)
- Ell T. A. (1992). *Hypercomplex spectral transformations*. Thèse de doctorat non publiée, University of Minnesota, Minneapolis, MN, USA. <http://books.google.fr/books?id=jMyGuAAACAAJ>
- Ell T. A., Sangwine S. J. (2007). Hypercomplex fourier transforms of color images. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16, n° 1, p. 22-35.

- Flusser J., Suk T., Zitova B. (2009). *Moments and moment invariants in pattern recognition*. Wiley.
- Ghorbel F. (1993, 13-16 Septembre). Application de la transformée de fourier généralisée au problème de l'invariance en reconnaissance de formes a niveaux de gris. In *GRETSI 93 - actes de colloques*. Juan-Les-Pins , France.
- Guo L.-Q., Zhu M. (2011). Quaternion fourier-mellin moments for color images. *Pattern Recognition*, vol. 44, n° 2, p. 187-195.
- Hestenes D., Sobczyk G. (1984). *Clifford algebra to geometric calculus*. Reidel. (ISBN 9027725616)
- Hu M.-K. (1962). Visual pattern recognition by moment invariants. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 8, n° 2, p. 179-187.
- Kovesi P. D. (2012). *MATLAB and Octave functions for computer vision and image processing*. Centre for Exploration Targeting, School of Earth and Environment, The University of Western Australia. (Available from: <<http://www.csse.uwa.edu.au/~pk/research/matlabfns/>>)
- Lowe D. G. (1999). Object recognition from local scale-invariant features. In *ICCV' 99*, p. 1150-1157. Kerkyra, Greece.
- Mennesson J. (2011). *Méthodes fréquentielles pour la reconnaissance d'images couleur : une approche par les algèbres de Clifford*. These, Université de La Rochelle. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00703445>
- Mennesson J., Saint-Jean C., Mascarilla L. (2010, 26-29 Septembre). New geometric fourier descriptors for color image recognition. In *International conference on image processing (icip2010)*, p. 2685-2688. Hong Kong, Chine.
- Mennesson J., Saint-Jean C., Mascarilla L. (2011). Color object recognition based on a clifford fourier transform. In L. Dorst, J. Lasenby (Eds.), *Guide to geometric algebra in practice*, p. 175-191. Springer London. (ISBN 978-0-85729-811-9)
- Mennesson J., Saint-Jean C., Mascarilla L. (2012, 24-27 Janvier). Un nouvel ensemble de descripteurs de Fourier Clifford pour les images couleur : les GCFD3. In *Actes de la conférence RFIA 2012*. Lyon, France.
- Moisan L. (2011). Periodic plus Smooth Image Decomposition. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 39, n° 2, p. 161-179.
- Nene S. A., Nayar S. K., Murase H. (1996). *Columbia object image library (COIL-100)*. (Technical Report CUCS-006-96)
- Ohta Y., Kanade T., Sakai T. (1980). Color information for region segmentation. *Computer Graphics and Image Processing*, vol. 13, n° 3, p. 222-241.
- Phillips P. J., Wechsler H., Huang J., Rauss P. (1998). The FERET database and evaluation procedure for face recognition algorithms. *Image and Vision Computing*, vol. 16, n° 5, p. 295-306.
- Sande K. van de, Gevers T., Snoek C. (2010). Evaluating color descriptors for object and scene recognition. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. 32, n° 9, p. 1582 -1596.
- Sangwine S. J., Ell T. A. (2000). The discrete fourier transform of a colour image. In J. M. Blackledge, M. J. Turner (Eds.), *Image processing II: Mathematical methods, algorithms and*



*applications, (proceedings of second ima conference on image processing, de montfort university, leicester, uk, september 1998)*, p. 430-441. Horwood Publishing for Institute of Mathematics and its Applications. (ISBN 1898563616)

Sangwine S. J., Horne R. E. N. (1998). *The colour image processing handbook (optoelectronics, imaging and sensing)*. Secaucus, NJ, USA, Springer-Verlag New York, Inc. (ISBN 0412806207)

Serra J. (2009, 24-27 Août). The "false colour" problem. In *Proceedings of the 9th international symposium on mathematical morphology and its application to signal and image processing*, p. 13–23. Groningen, The Netherlands, Springer-Verlag.

Smach F., Lemaître C., Gauthier J.-P., Mitéran J., Atri M. (2008). Generalized fourier descriptors with applications to objects recognition in svm context. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 30, n° 1, p. 43–71.

Zhang D., Lu G. (2002). Shape-based image retrieval using generic fourier descriptor. *Signal Processing: Image Communication*, vol. 17, n° 10, p. 825 - 848.